



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND  
IMAGE COMPUTING

# Low-rank- und sparsity-basierte Bildregistrierung

*Low-rank- and sparsity-based image registration*

## Masterarbeit

im Rahmen des Studiengangs  
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften  
der Universität zu Lübeck

### **vorgelegt von**

Roland Michel Haase

### **ausgegeben und betreut von**

Prof. Dr. rer. nat. Jan Lellmann  
Institute of Mathematics and Image Computing

### **mit Unterstützung von**

Dr. rer. nat. Stefan Heldmann  
Fraunhofer MEVIS

7. Juli 2019



## Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Lübeck,  
7. Juli 2019

---

Roland Haase



## Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein neuartiger Ansatz zur gruppenweisen Registrierung monomodaler Bilddaten untersucht. Das hierzu verwendete Distanzmaß arbeitet mit Methoden der Rangminimierung und wird motiviert aus der robusten Hauptkomponentenanalyse. Ge paart wird dieses mit einer Regularisierung mittels Totaler Variation. Als Besonderheit dienen zur Minimierung des Modells konvexe Optimierungsverfahren erster Ordnung. Im Anschluss an eine ausführliche Diskussion des kontinuierlichen Modells, seiner Diskretisierung sowie seiner numerischen Implementierung wird anhand realer Bilddaten aus der kardialen Magnetresonanztomographie die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Ansatzes für die Bewegungskorrektur geprüft.

## Abstract

This thesis explores a novel approach for the groupwise registration of monomodal image data. The distance measure is based on the principle of rank minimization and is motivated by a variant of the robust Principal Component Analysis. Furthermore, it is coupled with Total Variation regularization. As a distinctive feature, the resulting model is solved by first-order convex optimization methods. Following an in-depth discussion of the continuous model, its discretization and its numerical implementation, the performance of the approach when applied to motion correction is evaluated on real-life image data from cardiac magnetic resonance tomography.



## Danksagung

Mein Dank in allen inhaltlichen Fragen gilt meinen beiden Betreuern Stefan Heldmann und Jan Lellmann – ohne Eure großartige Unterstützung, die vielen konstruktiven Anregungen und überhaupt die viele Zeit, die Ihr für mich aufgebracht habt, wäre diese Arbeit niemals möglich gewesen. Zweifelsohne habe ich von Euch in dieser Zeit mehr über Bildregistrierung und konvexe Optimierung gelernt, als es mir in einer Lehrveranstaltung je möglich gewesen wäre. Es hat mir großen Spaß gebracht!

Im Privaten gebührt mein Dank zuallererst Celina Claus, die mich in dieser Arbeit von Anfang bis Ende begleitet hat und die ein offenes Ohr für mich hatte, wann immer ich eines brauchte. Vielen Dank noch einmal für deinen unbändigen Optimismus und deine nicht enden wollende Geduld und Unterstützung!

Ebenso danken möchte ich meinen Eltern, die mir nicht nur das Studium ermöglicht haben, sondern mir auch stets den nötigen Rückhalt und das Gefühl gegeben haben, dass alles in Ordnung ist, egal was kommen sollte.

Letztlich danke ich all meinen Kommilitoninnen und Kommilitonen, die über die Jahre zu guten Freunden geworden sind und die das Studium die Zeit wert gemacht haben.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Grundlagen der Bildregistrierung . . . . .	1
1.2	Motivation & verwandte Ansätze . . . . .	3
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Grundlagen der konvexen Optimierung</b>	<b>9</b>
2.1	Existenz von Minimierern . . . . .	9
2.2	Konvexität, Subgradienten & Proximalabbildung . . . . .	12
2.3	Fenchel-Dualität . . . . .	15
2.4	Ein konvexes Optimierungsverfahren erster Ordnung . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Ein low-rank- und sparsity-basiertes Registrierungsmodell</b>	<b>23</b>
3.1	Motivation mittels RPCA . . . . .	23
3.2	Definition eines gruppenweisen Distanzmaßes . . . . .	29
3.3	Regularisierung mit Totaler Variation . . . . .	35
3.4	Zusammenfassung des Modells . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Details der Implementierung</b>	<b>41</b>
4.1	Diskretisierung des Registrierungsmodells . . . . .	41
4.2	Definition einer konvexen Zielfunktion . . . . .	42
4.3	Numerische Lösung in der Standardform . . . . .	43
4.4	Multilevelstrategie . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>53</b>
5.1	Synthetische Bilddaten . . . . .	53
5.2	Reale Bilddaten: Kardiale MRT . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Fazit &amp; Ausblick</b>	<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>73</b>
A.1	Teilbeweis von Satz 3.3 . . . . .	73
A.2	Projektion auf $\mathcal{B}_\infty$ . . . . .	74
A.3	Spektralnorm der Zentrierungsmatrix $K$ . . . . .	75
A.4	Algorithmus zur Projektion auf $\mathcal{B}_1$ . . . . .	76
	<b>Literatur</b>	<b>79</b>



# Notationsverzeichnis

## Normen

$\ \cdot\ $	Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$
$\ \cdot\ _{\ell_p}$	$\ell_p$ -Norm auf $\mathbb{R}^n$
$\ \cdot\ _2$	Spektralnorm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$
$\ \cdot\ _F$	Frobeniusnorm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$
$\ \cdot\ _{S,q}$	Schatten- $q$ -Norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ (s. Def. 3.2)
$\ \cdot\ _0$	„0-Norm“ auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ (Anzahl nicht-verschwindender Einträge)
$\ \cdot\ _*$	nuclear norm auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ (definiert als $\ \cdot\ _{S,1}$ )
$\ \cdot\ _1$	Summierte Beträge aller Einträge einer Matrix aus $\mathbb{R}^{m \times n}$
$\ \cdot\ _{2,1}$	Summe euklidischer Normen auf $\mathbb{R}^{4n}$ (s. Glg. (4.4))
$\ \cdot\ _{2,\infty}$	Maximum euklidischer Normen auf $\mathbb{R}^{4n}$ (s. Glg. (4.11))

## Konvexe Optimierung

$\bar{\mathbb{R}}$	Erweiterte reelle Zahlen (s. Def. 2.1)
$\delta_S$	Indikatorfunktion der Menge $S$ (s. Def. 2.2)
$\text{dom } f$	Effektiver Definitionsbereich einer Funktion $f$ (s. Def. 2.3)
$\text{id}$	Identitätsabbildung (auf beliebigen Räumen)
$\text{cl } f$	Abschluss einer Funktion $f$ (s. Def. 2.4)
$\text{con } f$	Konvexe Hülle einer Funktion $f$ (s. Def. 2.9)
$\partial f$	Subdifferential einer Funktion $f$ (s. Satz 2.10)
$(\text{id} + \tau \partial f)^{-1}$	Proximalabbildung einer Funktion $f$ (s. Satz 2.12)
$f^*, f^{**}$	Konjugierte, Bikonjugierte einer Funktion $f$ (s. Def. 2.14)
$\Pi_S(x)$	Projektion von $x$ auf die Menge $S$
$\mathcal{B}_p$	$\ell_p$ -Einheitskugel

## Bildregistrierung

$\mathfrak{T}_i$	Kontinuierliches Bild (als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ )
$T_i$	Diskretes Bild (als Matrix $\mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ )
$\mathfrak{T}_i^{\text{lin}}$	Lineare Interpolation von $T_i$ (als Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ )
$\mathbf{u}^i$	Kontinuierliches Verschiebungsfeld (als Abbildung $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ )
$\bar{\mathbf{u}}_j$	Mittel über $j$ -te Koordinate von $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ (s. Glg. (3.35))
$u^i$	Diskretes Verschiebungsfeld (als Vektor $\mathbb{R}^{2m_1 m_2}$ )
$\hat{T}_i(u^i)$	Auswertung diskreter Verschiebung über diskretem Bild (s. Glg. (4.1))

## Sonstige

$\sigma$	Singulärwertabbildung auf $\mathbb{R}^{m \times n}$
$\text{vec}$	Vektorisierungsoperation auf $\mathbb{R}^{m \times n}$ (column-major Sortierung)
$A \otimes B$	Kroneckerprodukt zwischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{p \times l}$
$S^\perp$	Orthogonalkomplement einer Menge $S$
$C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$	Menge stetig differenzierbarer Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit kompaktem Träger
$\text{BV}(\Omega, \mathbb{R}^d)$	Menge aller Funktionen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ beschränkter Variation (s. Def. 3.4)



---

# Kapitel 1: Einleitung

Dieses Kapitel bildet die Einleitung der Arbeit und gliedert sich in drei Abschnitte: Im Abschnitt 1.1 werden grundlegende Aspekte der Bildregistrierung besprochen, der Abschnitt 1.2 motiviert das in dieser Arbeit untersuchte Verfahren und grenzt es gegenüber verwandten Ansätzen ab. Abschnitt 1.3 gibt einen Überblick über den Aufbau der restlichen Arbeit.

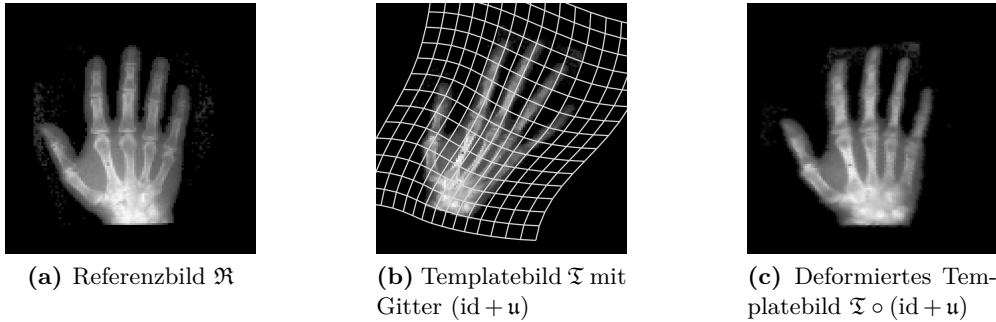
## 1.1 Grundlagen der Bildregistrierung

Ähnlich wie etwa die Bildsegmentierung oder die Bildrestauration zählt die Bildregistrierung zu den Grundaufgaben der modernen Bildverarbeitung. Grob gesprochen lässt sie sich als das Problem beschreiben, eine Reihe von Bildern derselben Szene in ein gemeinsames Koordinatensystem zu bringen [Han09, S. 71]. Die Eingabebilder können sich dabei beispielsweise im Zeitpunkt ihrer Aufnahme, in ihrer Perspektive der Szene oder in ihrer Aufnahmemethode, fachsprachlich „Modalität“, unterscheiden [Mod09, S. 1].

Insbesondere in der medizinischen Bildverarbeitung, mit der sich auch diese Arbeit befasst, finden sich zahlreiche Beispiele für Registrierungsaufgaben. Bildgebungsverfahren wie Computertomographie (CT) oder Magnetresonanztomographie (MRT) sind in der Medizin allgegenwärtig und können dabei helfen, Therapieverläufe zu überwachen oder die korrekte Funktionsweise von Organen zu beurteilen. Im ersten Fall werden zum Beispiel wiederholte Aufnahmen zur Überwachung der Heilung von Knochenbrüchen eingesetzt. Im zweiten Fall dienen Aufnahmen über ein kurzes Zeitintervall dazu, die atmungsbedingte Bewegung von Organen wie der Lunge zu begutachten oder über den Verlauf einer Kontrastmittelvergabe die Stoffwechselaktivität, etwa von Hirn oder Niere, zu analysieren. All diesen Beispielen ist gemein, dass zunächst eine Registrierung der Bilddaten vonnöten ist, um die verschiedenen Positionen der Organe in den einzelnen Aufnahmen zu vereinheitlichen und somit eine feste Zuordnung von Bildkoordinaten zu realen physischen Orten herzustellen.

Das in dieser Arbeit untersuchte Verfahren verfolgt einen variationellen Ansatz. Diese Herangehensweise hat sich aufgrund ihrer Flexibilität als überaus leistungsfähig für Registrierungsprobleme erwiesen, vor allem auch in der medizinischen Bildverarbeitung [Han09, S. 79]. Ausgangspunkt ist die Betrachtung eines Bildes  $\mathcal{I}$  als mathematische Funktion aus dem Koordinatenraum  $\mathbb{R}^d$  in den Grauwertbereich  $\mathbb{R}$ , kurz  $\mathcal{I} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ . Hierbei ist stets ein Bildgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  von Interesse ausgezeichnet, das in der Regel offen, zusammenhängend und beschränkt ist und außerhalb dessen  $\mathcal{I}(x) = 0$  für  $x \notin \Omega$  gilt. Die Dimension  $d$  eines Bildes beträgt im einfachsten Falle  $d = 2$ , in der Medizin ist heutzutage aber auch  $d = 3$  für die räumliche Dimension üblich.

Mittels dieser Sichtweise lässt sich die oben formulierte Aufgabenstellung präzisieren: Betrachtet man den einfachen Fall von zwei zu registrierenden Bildern  $\mathfrak{A}, \mathfrak{T} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , so sucht ein Registrierungsverfahren nach einer räumlichen Transformation des Templatebildes  $\mathfrak{T}$ , sodass dieses dem Referenzbild  $\mathfrak{A}$  auf  $\Omega$  „ähnlich“ wird. Eine solche Transformation kann beispielsweise durch ein Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  aus einem geeigneten An-



**Abbildung 1:** Beispiel eines variationellen Registrierungsansatzes. Ziel ist es, das Templatebild (1b) so zu deformieren, dass es dem Referenzbild (1a) möglichst ähnlich wird. Aus einem geeigneten Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  erhält man ein deformiertes Gitter  $(\text{id} + \mathbf{u})$ , wie es (1b) zeigt. Die Auswertung von  $\mathfrak{T}$  auf diesem Gitter ergibt das transformierte Bild  $\mathfrak{T} \circ (\text{id} + \mathbf{u})$  in (1c). Bilddaten entnommen aus FAIR.M [Mod09].

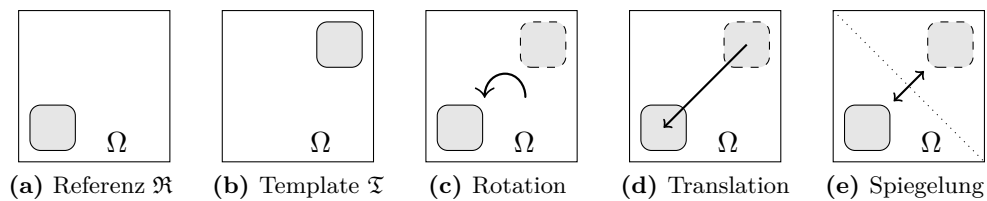
satzraum  $V \subseteq \{\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d\}$  beschrieben werden. Jeder Koordinate  $x \in \Omega$  wird dabei eine Verschiebung  $\mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^d$  zugeordnet. Die Problemstellung lässt sich damit wie folgt ausdrücken:

$$\text{Finde ein } \mathbf{u} \in V, \text{ sodass } \mathfrak{R} \approx \mathfrak{T} \circ (\text{id} + \mathbf{u}) \text{ auf } \Omega. \quad (1.1)$$

Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 1 ein Beispiel einer Registrierung.

Die hauptsächliche Schwierigkeit der Bildregistrierung besteht nun darin, dass es sich in der Regel um ein sogenanntes schlecht gestelltes Problem handelt. Im Sinne von Hadamard ist ein mathematisches Problem wohlgestellt, wenn es eine Lösung besitzt, wenn diese Lösung eindeutig ist und wenn sie stetig von den Eingabedaten abhängt [Had02]. Andernfalls heißt das Problem schlecht gestellt. Wie schon das einfache Beispiel in Abbildung 2 zeigt, ist die Lösung der Aufgabe (1.1) im Allgemeinen nicht eindeutig und das Problem ist folglich schlecht gestellt. Als Konsequenz ist eine sogenannte Regularisierung unabdingbar, die dazu dient, plausible und unplausible Transformationen voneinander zu unterscheiden und erstere als Lösungen zu bevorzugen.

Die übliche Strategie, eine Registrierungsaufgabe (1.1) zu modellieren, besteht in einem



**Abbildung 2:** Uneindeutigkeit der Registrierung von (2b) auf (2a) auf dem Gebiet  $\Omega$ . Sowohl Rotationen (2c) als auch Translationen (2d) und Spiegelungen (2e) ergeben eine perfekte Übereinstimmung des transformierten Templatebildes mit dem Referenzbild.

Optimierungsproblem der Form

$$\inf_{\mathbf{u} \in V} D(\mathfrak{R}, \mathfrak{T} \circ (\text{id} + \mathbf{u})) + \lambda S(\mathbf{u}), \quad (1.2)$$

wobei das Distanzmaß  $D$  die Ähnlichkeit zweier Bilder und der Regularisierer  $S$  die Plausibilität eines Verschiebungsfeldes bemisst. Der Parameter  $\lambda > 0$  kontrolliert die Gewichtung der beiden Terme im Zielfunktional.

Zu den am häufigsten verwendeten Distanzmaßen zählen etwa die Sum of Squared Differences (SSD) [Mod09, Kap. 6.2]

$$\text{SSD}(\mathfrak{R}, \mathfrak{T}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathfrak{R}(x) - \mathfrak{T}(x))^2 dx \quad (1.3)$$

oder die negierte Mutual Information (MI) [Mod03, Kap. 7.3]

$$- \text{MI}(\mathfrak{R}, \mathfrak{T}) := H((\mathfrak{R}, \mathfrak{T})) - H(\mathfrak{R}) - H(\mathfrak{T}). \quad (1.4)$$

Erstere zeichnet sich durch ihre Einfachheit aus, kann aber aufgrund des Umstandes, dass die Grauwerte von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{T}$  direkt miteinander verglichen werden, nur für Bilder aus derselben Bildquelle, sogenannte *monomodale* Bilddaten, verwendet werden.

Letztere ist aus der Informationstheorie entlehnt und fasst die Bilder  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{T}$  als kontinuierliche Zufallsvariablen auf.  $H(\mathfrak{X})$  bezeichnet die differentielle Entropie einer Zufallsgröße  $\mathfrak{X}$ . Der hauptsächliche Vorteil der MI besteht darin, dass sie ausschließlich mit den Häufigkeitsverteilungen von  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{T}$  arbeitet und daher auch für *multimodale* Bilddaten geeignet ist, also für Bilder aus verschiedenen Quellen. Im praktischen Fall folgt hieraus jedoch die Notwendigkeit einer Schätzung ebendieser Verteilungen, die für sich genommen eine Schwierigkeit darstellt, siehe [Mod09, Kap. 7.3.1].

Eine gängige Wahl für den Regularisierer ist beispielsweise das aus der Mechanik motivierte linearisierte elastische Potential [Mod03, Kap. 9]

$$P(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \sum_{j,k=1}^d \left( \partial_{x_j} \mathbf{u}_k(x) + \partial_{x_k} \mathbf{u}_j(x) \right)^2 + \lambda (\text{div } \mathbf{u}(x))^2 dx \quad (1.5)$$

mit Lamé-Konstanten  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . Details hierzu und zahlreiche weitere Beispiele für Distanzmaße und Regularisierer können in [Mod03] und [Mod09] nachgelesen werden.

## 1.2 Motivation & verwandte Ansätze

### 1.2.1 Gruppenweise Registrierung

Während sich das übliche Modell (1.2) explizit mit dem Problem der Registrierung *zweier* Bilder  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{T}$  beschäftigt, bestehen Datensätze in der Medizin häufig aus sehr viel mehr Aufnahmen. Als Beispiel hierfür seien etwa Cine-Sequenzen aus dem MRT genannt, deren Bewegungskorrektur eine denkbare Anwendung für die in dieser Arbeit vorgestellte Registrierungsmethode darstellt.

Die Registrierung mehrerer Bilder  $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  (mit  $N > 2$ ) in einem Verfahren wird – im Unterschied zum klassischen *paarweisen* Problem von zwei Bildern –

gemeinhin als *gruppenweises* Registrierungsproblem bezeichnet. Im Folgenden wird dabei von keiner festen Sortierung der Bilder ausgegangen, auch wenn eine solche aufgrund eines zeitlichen Aufnahmeverlaufs oder anderer Umstände existieren mag.

Eine einfache und naheliegende Methode, um ein paarweise arbeitendes Verfahren für den gruppenweisen Fall zu adaptieren, besteht darin, ein Bild  $\mathfrak{T}_r$  für ein  $r \in \{1, \dots, N\}$  als Referenz auszuzeichnen und die übrigen Bilder  $\mathfrak{T}_i$  für  $i \neq r$  einzeln auf dieses zu registrieren. Obwohl dieses Vorgehen den Vorteil hat, dass es hinsichtlich seiner Komplexität linear mit der Anzahl der Bilder  $N$  skaliert, überwiegen für praktische Anwendungen die folgenden zwei Nachteile [PKH<sup>+</sup>18]:

1. Die Wahl der Referenz  $\mathfrak{T}_r$  kann die Ergebnisse der Registrierung qualitativ beeinflussen und verzerren. Entsprechende Untersuchungen finden sich in [HPG<sup>+</sup>16].
2. In jedem Teilproblem wird nur ein Bruchteil der verfügbaren Bildinformation verwendet, was zu vergleichsweise suboptimalen Registrierungsergebnissen führen kann, siehe beispielsweise [MKS<sup>+</sup>11].

Unter diesen Aspekten ergibt sich angelehnt an (1.1) eine neue Aufgabenstellung für den gruppenweisen Fall:

$$\text{Finde } \mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N \in V, \text{ sodass } \mathfrak{T}_i \circ (\text{id} + \mathbf{u}^i) \approx \mathfrak{T}_j \circ (\text{id} + \mathbf{u}^j) \text{ auf } \Omega \text{ für } 1 \leq i, j \leq N. \quad (1.6)$$

Wiederum angelehnt an (1.2) wird diese modelliert als Optimierungsproblem

$$\inf_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N \in V} D(\mathfrak{T}_1 \circ (\text{id} + \mathbf{u}^1), \dots, \mathfrak{T}_N \circ (\text{id} + \mathbf{u}^N)) + \lambda \sum_{i=1}^N S(\mathbf{u}^i), \quad (1.7)$$

wie es in dieser Arbeit verfolgt wird. Insbesondere besagen (1.6) und (1.7), dass jedes Bild  $\mathfrak{T}_i$  mittels eines individuellen Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}^i$  deformierbar sein soll. Damit wird kein Bild gesondert als Referenz behandelt und es droht keine Verzerrung der Ergebnisse im oben beschriebenen Sinne.

Zur Regularisierung lassen sich in (1.7) ohne Weiteres alle aus dem paarweisen Problem bekannten Ausdrücke  $S$  verwenden, indem man sie wie dargestellt separat für die einzelnen Felder  $\mathbf{u}^i$  auswertet. Folglich besteht die Hauptaufgabe in der Entwicklung einer gruppenweisen Registrierungsmethode im Entwurf eines geeigneten Distanzmaßes  $D$ .

### 1.2.2 Informelle Beschreibung des Registrierungsmodells

Für die Zwecke dieser Arbeit soll die Ähnlichkeit von Bildern mittels des Konzepts der linearen Abhängigkeit bemessen werden. Anders ausgedrückt ist eine Menge von Bildern sich damit untereinander ähnlich, wenn sich jedes von ihnen als Linearkombination einer kleinen Anzahl von Basisvektoren beschreiben oder mit geringem Fehler approximieren lässt. Um diese Idee in einem endlichdimensionalen Kontext präzisieren zu können, ist es zunächst einmal notwendig, die Sichtweise zu wechseln und anstelle von Bildern im eingangs definierten Sinne nun ihre Auswertungen auf diskreten Gittern zu betrachten.



Da digitale Bilder in der Regel ohnehin diskret vorliegen, ist diese Sichtweise sogar gewissermaßen natürlich.

Es sei also ein äquidistantes Gitter  $X \in \Omega^{m_1 \times \dots \times m_d}$  mit Schrittweiten  $h_1, \dots, h_d > 0$  und mit der Auflösung  $(m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^d$  auf  $\Omega$  gegeben. Die entsprechenden Gitterpunkte  $x_{i_1, \dots, i_d}$  seien durch  $(i_1, \dots, i_d) \in \{1, \dots, m_1\} \times \dots \times \{1, \dots, m_d\}$  indiziert. Insbesondere gelte dabei  $(x_{i_1, \dots, i_k+1, \dots, i_d} - x_{i_1, \dots, i_k, \dots, i_d})_k = h_k$  für alle  $i_k = 1, \dots, m_k - 1$  und alle  $k = 1, \dots, d$ . Die Auswertung  $G_X(\mathfrak{T}) \in \mathbb{R}^{m_1 \times \dots \times m_d}$  eines kontinuierlichen Bildes  $\mathfrak{T}$  auf einem solchen Gitter  $X$  definiert nun ein diskretes Bild mit

$$(G_X(\mathfrak{T}))_{i_1, \dots, i_d} := \mathfrak{T}(x_{i_1, \dots, i_d}) \text{ für alle } (i_1, \dots, i_d) \in \{1, \dots, m_1\} \times \dots \times \{1, \dots, m_d\}. \quad (1.8)$$

Zur besseren Unterscheidung werden diskretisierte Bilder mittels kursiver Großbuchstaben und die entsprechenden kontinuierlichen Bilder (wie bisher) mittels fraktaler Großbuchstaben notiert, also beispielsweise  $T = G_X(\mathfrak{T})$ .

Für diskrete zweidimensionale Bilder  $T \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ , mit denen sich diese Arbeit ausschließlich beschäftigt, bezeichne  $\text{vec}(T)$  mit  $\text{vec} : \mathbb{R}^{m_1 \times m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 m_2}$  weiterhin die Vektorisierung von  $T$ . Diese entspricht dem „Untereinanderschreiben“ der Spalten von  $T$  in einen langen Spaltenvektor und wird in der Literatur üblicherweise die *column-major*-Sortierung von  $T$  genannt.

Grundsätzlich erlaubt es dieser Formalismus, den Grad der linearen Abhängigkeit zwischen den diskreten Bildern  $T_1, \dots, T_N$  (und damit ihre Ähnlichkeit) über den Rang der Matrix

$$M := [\text{vec}(T_1) | \dots | \text{vec}(T_N)] \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N} \quad (1.9)$$

zu bemessen. Für den Rest der Arbeit ist dabei von  $N < m_1 m_2$  auszugehen. Bezüglich der numerischen Umsetzung eines solchen Ansatzes ergeben sich jedoch zweierlei Probleme.

Zum einen kann selbst bei erfolgreich registrierten Aufnahmen aufgrund von örtlichen Unterschieden zwischen den Bildern nicht davon ausgegangen werden, dass die Spalten von  $M$  tatsächlich lineare Abhängigkeiten aufweisen. Diese Unterschiede können beispielsweise in den verschiedenen Zuständen eines dynamischen physiologischen Prozesses innerhalb einer bilddiagnostischen Videosequenz bestehen. Aus diesem Grund wird als Teil der vorgeschlagenen Registrierungsprozedur eine Zerlegung von  $M$  in zwei Matrizen  $L + E = M$  berechnet, bei der anstelle von  $M$  nun die Matrix  $L$  von niedrigem Rang ist und die Differenzmatrix  $E = M - L$  die besagten Intensitätsunterschiede beschreibt. Aufgrund der örtlicher Beschränktheit der letzteren ist wiederum die Matrix  $E$  dünn besetzt, besitzt also wenige nicht-verschwindende Einträge.

Zum anderen reagiert die Rangfunktion aufgrund ihrer Unstetigkeit äußerst sensibel auf Rundungsfehler, die bei endlich genauer Arithmetik unvermeidbar sind. Um diese Problematik zu umgehen, wird der Rang einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  daher durch eine robuste Relaxation im Sinne der Summe ihrer Singulärwerte  $\sigma_i(A)$  für  $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$  ersetzt. Details hierzu werden in Abschnitt 3.1 diskutiert.

In Abhängigkeit eines Parameters  $\nu > 0$ , der zwischen der „Dünnbesetztheit“ (engl. *sparsity*) der Differenzmatrix  $M - L$  und dem Grad der linearen Abhängigkeit unter den

Spalten von  $L$  abwägt, wird als Distanzmaß in dieser Arbeit schließlich der Ausdruck

$$\min_{L \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N}} \sum_{i=1}^{m_1 m_2} \sum_{j=1}^N |M_{i,j} - L_{i,j}| \quad \text{u. d. Nb.} \quad \sum_{i=1}^N \sigma_i(L - \bar{L}) \leq \nu \quad (1.10)$$

dienen, wobei  $\bar{L}$  in jeder Spalte das arithmetische Mittel über die Spalten von  $L$  enthält und eine Mittelwertbereinigung in Anlehnung an die Hauptkomponentenanalyse (engl. *Principal Component Analysis*, kurz PCA) bewirkt. Für Details sei auf die Abschnitte 3.1 und 3.2 verwiesen. Regularisiert wird das Modell mittels der Totalen Variation  $\sum_{i=1}^N \text{TV}(\mathbf{u}^i)$  – die entsprechende Diskussion ist in Abschnitt 3.3 zu finden.

### 1.2.3 Verwandte Ansätze

Die Idee der Zerlegung einer Matrix  $M$  in einen *low-rank*-Anteil  $L$  und einen *sparsity*-Anteil  $E$  ist entlehnt aus dem Verfahren der *Robust PCA* (RPCA), die in Abschnitt 3.1 näher vorgestellt wird. Insbesondere in der Bildverarbeitung finden sich zahlreiche Anwendungen für RPCA-Methoden. Hierzu zählt auch die Veröffentlichung [HP14], die einen entsprechenden Ansatz zur Stereo-Rekonstruktion aus plenoptischen Kameraaufnahmen nutzt und die die Grundlage dieser Arbeit bildet.

Bereits 2010 wurde in [PGW<sup>+</sup>10] eine gruppenweise Registrierung mittels RPCA untersucht, dies allerdings noch mit der Einschränkung auf eine kleine Klasse von parametrisierten Transformationen, die für Registrierungsaufgaben in der Medizin im Allgemeinen nicht mächtig genug sind.

Weitere RPCA-basierte Verfahren für das Gruppenproblem finden sich in [HDP<sup>+</sup>14] und [LNK<sup>+</sup>14]. Diesen beiden ist gemein, dass sie die RPCA explizit als Vorverarbeitungsschritt nutzen und dass die eigentliche Registrierung erst im Anschluss auf den resultierenden low-rank-Komponenten  $L_1, \dots, L_N$  ausgeführt wird. Letztere entsprechen den Spalten von  $L$  in der obigen Darstellung. Die errechneten Transformationen werden dann in einem zweiten Schritt auf die Eingabebilder  $T_1, \dots, T_N$  propagiert. Als Transformationsmodell dienen in beiden Veröffentlichungen B-Splines. Diese sind zwar sehr viel mächtiger als die in [PGW<sup>+</sup>10] behandelten Transformationen, sind aber nach der Kategorisierung in [Mod09] immer noch parametrisch.

Unter den Veröffentlichungen der jüngeren Zeit weisen zudem [HPG<sup>+</sup>16], [GHP<sup>+</sup>18] und [PKH<sup>+</sup>18] eine Verwandtschaft zu dem hier untersuchten Verfahren auf, indem sie entweder explizit (im Falle von [HPG<sup>+</sup>16]) oder implizit (im Falle von [GHP<sup>+</sup>18] und [PKH<sup>+</sup>18]) auf der klassischen PCA basieren. Die in [HPG<sup>+</sup>16] vorgestellten Distanzmaße bestrafen die Eigenwerte der Korrelationsmatrix

$$K := \frac{1}{N-1} \Sigma^{-1} (M - \bar{M})^\top (M - \bar{M}) \Sigma^{-1}, \quad (1.11)$$

wobei  $M$  wie in (1.9) definiert ist,  $\bar{M}$  ähnlich wie in (1.10) in jeder Spalte das arithmetische Mittel über die Spalten von  $M$  enthält und die Diagonalmatrix  $\Sigma$  die empirischen Standardabweichungen der Spalten von  $M$  als Diagonalelemente hat. Wohlgemerkt entspricht die Anzahl der nicht-verschwindenden Eigenwerte von  $K$  genau dem

Rang von  $M$ , was den Zusammenhang zum Ansatz dieser Arbeit verdeutlicht. Ein ähnliches Distanzmaß, das sich einzig in der Gewichtung dieser Eigenwerte unterscheidet, ergibt sich in [GHP<sup>+</sup>18] aus einer Verallgemeinerung der Mutual Information (1.4) und unter Annahme einer Normalverteilung des Vektors  $(T_1, \dots, T_N)^\top$  (interpretiert als Zufallsgröße). In [PKH<sup>+</sup>18] hingegen wird mittels der Mutual Information eine andere Art von gruppenweisem Distanzmaß motiviert, das als (synthetische) Referenz eine Linearkombination der Bilder  $T_1, \dots, T_N$  nutzt. Diese werden dabei mit den Einträgen der ersten Hauptkomponente von  $M$  gewichtet. Alle drei genannten Arbeiten verwenden wiederum B-Splines als Transformationsmodell. Für weitere Details sei auf die jeweilige Veröffentlichung verwiesen.

Abschließend ist noch [BWM18] zu erwähnen, das ebenfalls mit Methoden der Rangminimierung arbeitet. Hierin wird anstelle des Ranges der (globalen) Bildmatrix  $M$  allerdings der punktweise Rang der normalisierten Bildgradienten

$$\left[ \frac{\nabla \mathfrak{I}_1(x)}{\|\nabla \mathfrak{I}_1(x)\|} \mid \dots \mid \frac{\nabla \mathfrak{I}_N(x)}{\|\nabla \mathfrak{I}_N(x)\|} \right] \in \mathbb{R}^{d \times N} \quad (1.12)$$

über alle  $x \in \Omega$  minimiert.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Nach der in diesem **Kapitel 1** gegebenen Einleitung in die Thematik der Arbeit folgt in **Kapitel 2** ein Überblick über die Grundlagen der konvexen Optimierung. Insbesondere wird dabei auf das Verständnis des Algorithmus aus [CP11] hingearbeitet, welcher als numerisches Optimierungsverfahren für diese Arbeit dient.

Anschließend wird in **Kapitel 3** das gruppenweise Registrierungsmodell motiviert und hergeleitet, das bereits im vorangegangenen Abschnitt 1.2 skizziert wurde. Dieses Kapitel bildet demzufolge auch das Kernstück der vorliegenden Arbeit. Aspekte der Diskretisierung und der numerischen Implementierung des Modells sind Gegenstand von **Kapitel 4**.

Experimente an synthetischen sowie an realen medizinischen Bilddaten folgen in **Kapitel 5**. Schließlich wird in **Kapitel 6** ein Fazit gezogen und ein kurzer Ausblick auf mögliche Fortentwicklungen gegeben.



---

## Kapitel 2: Grundlagen der konvexen Optimierung

Insbesondere aus Sicht der Bildverarbeitung ist die konvexe Optimierung ein interessantes Gebiet, da ihre Methoden es ermöglichen, hochdimensionale und sogar nicht-differenzierbare Optimierungsprobleme effizient zu lösen – vorausgesetzt sie sind konvex.

Neben dem Grundbegriff der Konvexität werden in diesem Kapitel unter anderem die Begriffe der erweiterten reellen Zahlen, der Unterhalbstetigkeit, des Subgradienten, der Legendre-Fenchel Transformation, der Dualität sowie der Proximal-Abbildung eingeführt. Ziel des Kapitels ist es, die Grundlagen zum Verständnis des Optimierungsalgorithmus aus [CP11] zu schaffen, der im letzten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellt wird und der in dieser Arbeit zur numerischen Lösung aller auftretenden konvexen Optimierungsprobleme dient. Für die Beweise der vorgestellten Aussagen sei auf die jeweils angegebenen Quellen verwiesen.

Als Literatur zur konvexen Optimierung empfehlen sich [RW98] und [Roc70]. Neben den Grundlagen werden in [BL11] zudem Anwendungen in der Bildverarbeitung diskutiert.

### 2.1 Existenz von Minimierern

Den Anfang machen die Definitionen der erweiterten reellen Zahlen und darauf aufbauend der Indikatorfunktionen.

#### Definition 2.1 (*Erweiterte reelle Zahlen & Regeln [RW98, S. 15]*)

Es sei  $\bar{\mathbb{R}}$  definiert durch  $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Dabei gelten:

1.  $\alpha + \infty = \infty$  für alle  $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ ,  $\alpha - \infty = \begin{cases} -\infty, & -\infty \leq \alpha < \infty, \\ \infty, & \alpha = \infty, \end{cases}$
2.  $\alpha \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & 0 < \alpha \leq \infty, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\infty, & -\infty \leq \alpha < 0 \end{cases}$  und  $\alpha \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & 0 < \alpha \leq \infty, \\ 0, & \alpha = 0, \\ \infty, & -\infty \leq \alpha < 0. \end{cases}$

#### Definition 2.2 (*Indikatorfunktion [RW98, S. 6]*)

Für eine Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  sei ihre *Indikatorfunktion*  $\delta_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gegeben durch

$$\delta_C(x) := \begin{cases} 0, & x \in C, \\ \infty, & x \notin C. \end{cases} \quad (2.1)$$

Indikatorfunktionen ermöglichen einen sehr kompakten Formalismus, um Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen auszudrücken. Anstatt beispielsweise ein Minimierungsproblem für  $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , dessen Nebenbedingungen durch  $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

beschrieben werden, als

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) \quad \text{u. d. Nb.} \quad f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$$

anzugeben, lässt sich dieses mittels der Definition  $C := \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, k\}$  auch äquivalent als

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) + \delta_C(x)$$

formulieren [RW98, S. 7].

Entscheidende Fragen im Kontext der Optimierung sind stets die der Regularität eines Problems: Existiert ein Minimierer? Wenn ja, ist er eindeutig? Erlaubt man Zielfunktionen mit Werten in  $\bar{\mathbb{R}}$ , ergeben sich neue Anforderungen bezüglich der Regularität: Funktionen, die den Wert  $-\infty$  annehmen, sowie die Funktion  $f \equiv \infty$  sollen ausgeschlossen werden. Dies ist Gegenstand der folgenden Definition.

**Definition 2.3 (Eigentliche Funktion [RW98, S. 6f.]**

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eine Funktion. Dann bezeichne

1.  $\text{dom } f := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\}$  ihren *effektiven Definitionsbereich* und
2.  $\text{argmin } f := \begin{cases} \emptyset, & f \equiv \infty, \\ \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)\}, & \text{sonst,} \end{cases}$  ihre *Minimierermenge*.

Weiter heiÙe  $f$  *eigentlich* (engl. *proper*), falls  $\text{dom } f \neq \emptyset$  und  $f(x) > -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Das bekannte Resultat, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge stets ihr Minimum annimmt, ist aufgrund der fehlenden Stetigkeit nicht mehr anwendbar auf Funktionen  $f$ , die an mindestens einer Stelle  $x \in \mathbb{R}^n$  den Wert  $f(x) = \infty$  annehmen [RW98, S. 11]. Dennoch lassen sich verallgemeinerte Bedingungen für die Existenz eines Minimierers angeben. Dazu braucht es den (gegenüber der Stetigkeit schwächeren) Begriff der Unterhalbstetigkeit.

**Definition 2.4 (Unterhalbstetigkeit [RW98, Def. 1.5 & S. 14])**

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gelte

$$\liminf_{x \rightarrow x'} f(x) := \lim_{\delta \searrow 0} \inf_{\|x-x'\| \leq \delta} f(x). \quad (2.2)$$

$f$  heiÙe *unterhalbstetig in  $x' \in \mathbb{R}^n$*  (engl. *lower semi-continuous*), falls

$$f(x') \leq \liminf_{x \rightarrow x'} f(x) \quad (2.3)$$

und *unterhalbstetig (auf  $\mathbb{R}^n$ )*, falls  $f$  in allen  $x' \in \mathbb{R}^n$  unterhalbstetig ist.

Weiterhin sei der *Abschluss*  $\text{cl } f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  von  $f$  definiert durch

$$\text{cl } f(x') := \liminf_{x \rightarrow x'} f(x) \quad \text{für } x' \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Es sei dazu bemerkt, dass nichtnegative Linearkombinationen  $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$  mit  $\lambda_i \geq 0$  von eigentlichen, unterhalbstetigen Funktionen  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  für  $i = 1, \dots, k$  ebenfalls unterhalbstetig sind. Ist weiterhin  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so ist auch  $f_1 \circ g$  unterhalbstetig [BL11, Lem. 6.14].

Mit den in den Definitionen 2.3 und 2.4 geschaffenen Voraussetzungen lässt sich nun der folgende Satz zur Existenz eines Minimierers angeben.

**Satz 2.5 (Existenz eines Minimierers [RW98, Kor. 1.10])**

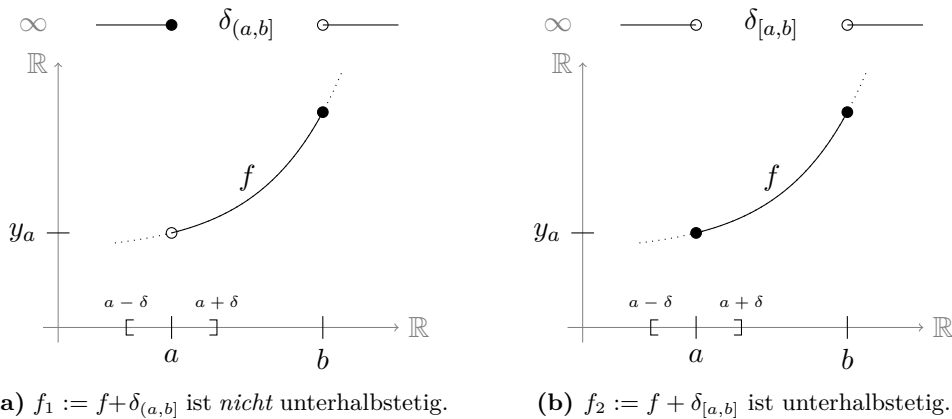
Eine eigentliche und unterhalbstetige Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  nimmt auf jeder kompakten Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  mit  $M \cap \text{dom } f \neq \emptyset$  ihr Minimum (bzgl.  $M$ ) an.

Aussagen über die Existenz globaler Minimierer auf ganz  $\mathbb{R}^n$  sind im Allgemeinen nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Funktion  $f$  möglich – dies wird schon am einfachen Beispiel der Identität  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = x$  klar, die eigentlich und unterhalbstetig ist, aber trotzdem keinen Minimierer auf  $\mathbb{R}$  besitzt. Details finden sich in [RW98, Kap. 1.C]. Bestenfalls ist aber  $\text{dom } f$  beschränkt und Satz 2.5 erlaubt bereits eine globale Aussage.

Zum Abschluss des Abschnitts sei noch ein einfaches Resultat gegeben, das eine geometrische Interpretation der Forderung der Unterhalbstetigkeit erlaubt. Dieses wird auch in Abbildung 3 illustriert.

**Lemma 2.6 (Unterhalbstetige Indikatoren [RW98, S. 11])**

Eine Indikatorfunktion  $\delta_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ist genau dann unterhalbstetig, wenn die Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  abgeschlossen ist.



**Abbildung 3:** Illustration von Satz 2.5 und Lemma 2.6. Links: Obwohl  $f_1$  eigentlich und  $\text{dom } f_1$  beschränkt ist, existiert kein Minimierer auf  $\mathbb{R}$ , denn  $f_1$  ist nicht unterhalbstetig in  $a$ : Auf jeder  $\delta$ -Umgebung von  $a$  gilt  $\inf_{|x-a| \leq \delta} f_1(x) = y_a$  und damit  $\liminf_{x \rightarrow a} f_1(x) = y_a < \infty = f_1(a)$ . Rechts:  $f_2$  ist eigentlich, unterhalbstetig (denn die Menge  $[a, b]$  ist abgeschlossen) und  $\text{dom } f_2$  ist beschränkt. Folglich besitzt  $f_2$  einen Minimierer auf  $\mathbb{R}$ .

## 2.2 Konvexität, Subgradienten & Proximalabbildung

### Konvexität

Neben der Frage der Existenz eines Minimierers einer Funktion  $f$  stellt sich die Frage der Struktur von  $\operatorname{argmin} f$ . Während Aussagen hierzu im Allgemeinen schwierig sind, existiert für die Klasse der konvexen Funktionen eine geschlossene Antwort.

#### **Definition 2.7 (Konvexität [RW98, Def. 2.1])**

1. Eine Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt *konvex*, falls

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C \text{ für alle } x, y \in C, \lambda \in (0, 1). \quad (2.5)$$

2. Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt *konvex*, falls

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in (0, 1). \quad (2.6)$$

Indikatorfunktionen stellen dabei einen natürlichen Zusammenhang zwischen der Konvexität von Mengen und der Konvexität von Funktionen her [Roc70, S. 28]: Eine Menge  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  ist genau dann konvex, wenn ihr Indikator  $\delta_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eine konvexe Funktion ist.

Das bereits eingangs angedeutete zentrale Resultat über konvexe Funktionen liefert der folgende Satz.

#### **Satz 2.8 (Globale Minimierer konvexer Funktionen [RW98, Thm. 2.6])**

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eine konvexe Funktion, dann ist jeder lokale Minimierer von  $f$  ein globaler Minimierer und die Menge dieser Minimierer  $\operatorname{argmin} f$  ist konvex.

Aufgrund von Satz 2.8 ist Konvexität stets eine wünschenswerte Eigenschaft in der Optimierung. Sollte eine Zielfunktion nicht konvex sein, besteht ein möglicher Weg, ihre Minimierer zu finden, darin, sie durch eine konvexe Funktion im Sinne der folgenden Definition zu ersetzen.

#### **Definition 2.9 (Konvexe Hülle [RW98, S. 56])**

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ist ihre *konvexe Hülle*  $\operatorname{con} f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  definiert als die größte konvexe Funktion  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , für die  $g \leq f$  gilt.

Dass  $\operatorname{con} f$  stets existiert, liegt darin begründet, dass das punktweise Supremum einer beliebigen Menge konvexer Funktionen wieder konvex ist [Roc70, Thm. 5.5].

Zielfunktionen in der Optimierung sind häufig aus mehreren Termen zusammengesetzt – ähnlich wie bei der Unterhalbstetigkeit gilt hier: Sowohl nichtnegative Linearkombinationen  $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$  konvexer Funktionen  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit  $\lambda_i \geq 0$  für  $i = 1, \dots, k$  als auch affine Kompositionen  $f_1 \circ g$  mit  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert durch  $g(x) = Ax + b$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  bleiben konvex [BV04, S. 79].



### Subgradienten

Differenzierbare konvexe Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, dass ihre Taylorapproximation erster Ordnung für jeden Entwicklungspunkt  $x \in \mathbb{R}^n$  unterhalb von  $f$  liegt:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (2.7)$$

Dies lässt sich mittels der Definition der Konvexität zeigen. Aus (2.6) erhält man zunächst für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $x \neq y$  und für alle  $\lambda \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda y) &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \\ \Leftrightarrow f(x + \lambda(y-x)) - f(x) &\leq \lambda(f(y) - f(x)) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda} &\leq f(y) - f(x) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda \|y-x\|} &\leq \frac{f(y) - f(x)}{\|y-x\|}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ist  $f$  differenzierbar, so fällt der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f(x + \lambda(y-x)) - f(x)}{\lambda \|y-x\|} \quad (2.9)$$

mit der Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x$  in Richtung  $(y-x)/\|y-x\|$  zusammen. Diese wiederum lässt sich ausdrücken als  $\langle \nabla f(x), \frac{y-x}{\|y-x\|} \rangle$ . Da die rechte Seite von (2.8) von  $\lambda$  unabhängig ist, erhält man

$$\langle \nabla f(x), \frac{y-x}{\|y-x\|} \rangle \leq \frac{f(y) - f(x)}{\|y-x\|}, \quad (2.10)$$

woraus direkt (2.7) folgt.

Die Ungleichung (2.7) soll nun im Folgenden dazu genutzt werden, den Begriff der Ableitung auf nicht-differenzierbare Funktionen zu verallgemeinern [BL11, S. 272].

**Definition 2.10 (Subdifferential [Roc70, S. 214f.]**

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sei ihr *Subdifferential*  $\partial f(x)$  an der Stelle  $x \in \mathbb{R}^n$  definiert als die Menge ihrer *Subgradienten*:

$$\partial f(x) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid f(x) + \langle v, y - x \rangle \leq f(y) \ \forall y \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.11)$$

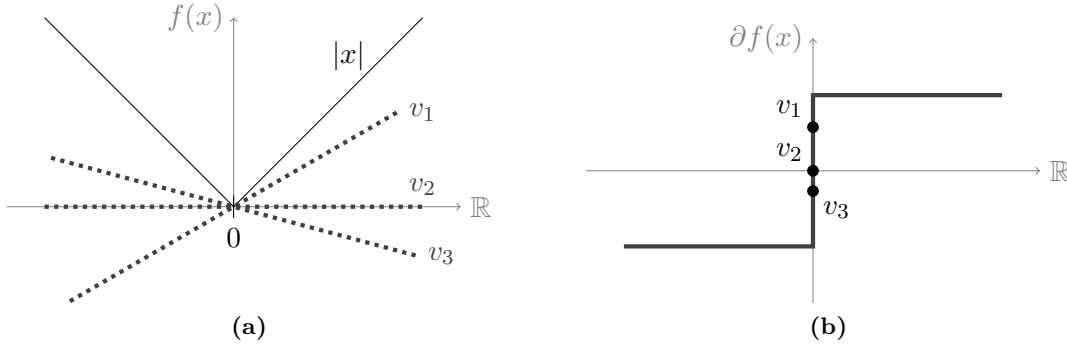
Das Subdifferential  $\partial f$  kann als Abbildung aus  $\mathbb{R}^n$  in die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  aufgefasst werden, kurz bezeichnet mit  $\partial f : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ . Die zu einer solchen mengenwertigen Abbildung  $M : X \rightrightarrows U$  inverse Abbildung ist definiert durch  $M^{-1} : U \rightrightarrows X$  mit  $M^{-1}(u) := \{x \in X : u \in M(x)\}$  und ist ebenfalls mengenwertig [BL11, Def. 6.41].

Es sei darauf hingewiesen, dass in Def. 2.10 keine Konvexität von  $f$  gefordert wurde. Insbesondere kann  $\partial f(x)$  leer sein, denn dass ein Subgradient nicht immer existiert, ist bereits anschaulich klar. Für eigentliche und konvexe  $f$  ist die Existenz eines Subgradienten immerhin in allen inneren Punkten von  $\text{dom } f$  gewährleistet [Roc70, Thm. 23.4]. Satz 2.11 zeigt, dass die Definition dennoch im allgemeinen Kontext sinnvoll ist.

**Satz 2.11 (Hinreichende Bedingung [BL11, Satz 6.43])**

Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eigentlich und  $x \in \mathbb{R}^n$ , so ist  $x \in \operatorname{argmin} f \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x)$ .

Abbildung 4 veranschaulicht das Subdifferential und die hinreichende Bedingung anhand der nicht differenzierbaren Betragsfunktion.



**Abbildung 4:** Veranschaulichung von Definition 2.10 und Satz 2.11 anhand von  $f(x) = |x|$ . Links: Die Betragsfunktion mit drei Subgradientengeraden  $v_1, v_2, v_3$  entsprechend (2.11) an der Stelle  $x = 0$ . Rechts: Darstellung des Subdifferentials  $\partial f(x)$  mit  $\partial f(0) = [-1, 1]$ . Hervorgehoben sind wiederum die Steigungen von  $v_1, v_2$  und  $v_3$ . Die Steigung von  $v_2$  beträgt 0, also liegt in  $x = 0$  ein globaler Minimierer vor.

**Proximal-Abbildung**

Die Auswertung und numerische Handhabe des Subdifferentials  $\partial f$  ist im Allgemeinen kompliziert, weswegen sich das Kriterium aus Satz 2.11 nicht direkt zur numerischen Optimierung eignet. Gleichwohl lässt es sich zur Motivation numerischer Verfahren nutzen, wie die folgende Herleitung zeigt. Ausgehend von der Optimalitätsbedingung für  $x^*$  aus Satz 2.11 erhält man für  $\tau > 0$ :

$$\begin{aligned}
 & 0 \in \partial f(x^*) \\
 \Leftrightarrow & 0 \in \tau \partial f(x^*) \\
 \Leftrightarrow & x^* \in x^* + \tau \partial f(x^*) = (\operatorname{id} + \tau \partial f)(x^*) \\
 \Leftrightarrow & (\operatorname{id} + \tau \partial f)^{-1}(x^*) \ni x^*.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Aus (2.12) lässt sich nun ein einfaches Fixpunktschema der Form  $x^{k+1} \in (\operatorname{id} + \tau \partial f)^{-1}(x^k)$  für  $x^*$  konstruieren. Dieses Verfahren ist für praktische Zwecke der numerischen Optimierung zwar von geringer Bedeutung – für eine Diskussion siehe [PB14, Kap. 4.1] –, dennoch motiviert es den Begriff der Proximalabbildung  $(\operatorname{id} + \tau \partial f)^{-1}$ , die in höher entwickelten numerischen Verfahren von zentraler Bedeutung ist.

**Satz 2.12 (Proximalabbildung [BL11, Lem. 6.134])**

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eigentlich, unterhalbstetig und konvex. Dann ist die *Proximalabbildung*  $(\text{id} + \tau \partial f)^{-1}$  (engl. *proximal operator*) für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $\tau > 0$  eindeutig gegeben durch

$$(\text{id} + \tau \partial f)^{-1}(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \tau f(y). \quad (2.13)$$

Entscheidender Vorteil der Proximalabbildung gegenüber der Auswertung von  $(\partial f)^{-1}$  ist neben ihrer Eindeutigkeit der Umstand, dass der Ausdruck  $(\text{id} + \tau \partial f)^{-1}$  für zahlreiche Beispiele explizit bekannt ist. Eine gute Referenz hierzu (und zur Proximalabbildung allgemein) bildet [PB14].

Zum Abschluss seien noch einige Rechenregeln für die Proximalabbildung gegeben, die sich in Kapitel 3 als hilfreich erweisen werden.

**Lemma 2.13 (Rechenregeln der Proximalabbildung [BL11, Lem. 6.136])**

Es seien  $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  und  $f_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eigentlich, unterhalbstetig sowie konvex. Dann gelten für  $\tau > 0$  die folgenden Regeln:

1. Für  $\varphi(x) := \alpha f_1(x) + \beta$  mit  $\alpha > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  ist

$$(\text{id} + \tau \partial \varphi)^{-1}(x) = (\text{id} + (\alpha \tau) \partial f_1)^{-1}(x). \quad (2.14)$$

2. Für  $\varphi(x) := f_1(\alpha x + d)$  mit  $\alpha \neq 0$  und  $d \in \mathbb{R}^n$  ist

$$(\text{id} + \tau \partial \varphi)^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha} \left( (\text{id} + (\alpha^2 \tau) \partial f_1)^{-1}(\alpha x + d) - d \right). \quad (2.15)$$

3. Für  $\varphi(x) := f_1(x) + \langle d, x \rangle$  mit  $d \in \mathbb{R}^n$  ist

$$(\text{id} + \tau \partial \varphi)^{-1}(x) = (\text{id} + \tau \partial f_1)^{-1}(x - \tau d). \quad (2.16)$$

4. Für  $\varphi((x, y)) := f_1(x) + f_2(y)$  ist

$$(\text{id} + \tau \partial \varphi)^{-1}((x, y)) = \begin{pmatrix} (\text{id} + \tau \partial f_1)^{-1}(x) \\ (\text{id} + \tau \partial f_2)^{-1}(y) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

**2.3 Fenchel-Dualität**

Der Ausgangspunkt für die Klasse der primal-dualen Optimierungsverfahren ist die Legendre-Fenchel Transformation. Diese stellt eine Verknüpfung zwischen einem *primalen Problem*, in der Regel dem Optimierungsproblem von Interesse, und einem verwandten Maximierungsproblem, dem sogenannten *dualen Problem*, her. Dieser Abschnitt

basiert im Wesentlichen auf der Darstellung in [BL11, Kap. 6.2.4] und behandelt nur primale Probleme der Bauart

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} G(x) + F(Kx), \quad (2.18)$$

wie sie im Rahmen dieser Arbeit relevant sind.  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  und  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sind dabei eigentliche, unterhalbstetige, konvexe Funktionen und  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist ein linearer Operator. Eine Betrachtung in einem viel allgemeineren Kontext ist wohlgemerkt möglich und findet sich beispielsweise in [RW98, Kap. 11].

Den Anfang macht die Definition der Legendre-Fenchel Transformation.

**Definition 2.14 (Legendre-Fenchel Transformation [RW98, S. 473f.]**

Für eine eigentliche Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  werde die durch

$$f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad f^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle y, x \rangle - f(x) \quad (2.19)$$

definierte Funktion die *Duale* oder auch *Konjugierte* (von  $f$ ) genannt. Die Abbildung  $f \mapsto f^*$  wird als *Legendre-Fenchel Transformation* bezeichnet und die zweifach Transformierte  $f^{**}$ , gegeben durch

$$f^{**} : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad f^{**}(z) := \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \langle y, z \rangle - f^*(y), \quad (2.20)$$

heißt *Bikonjugierte*.

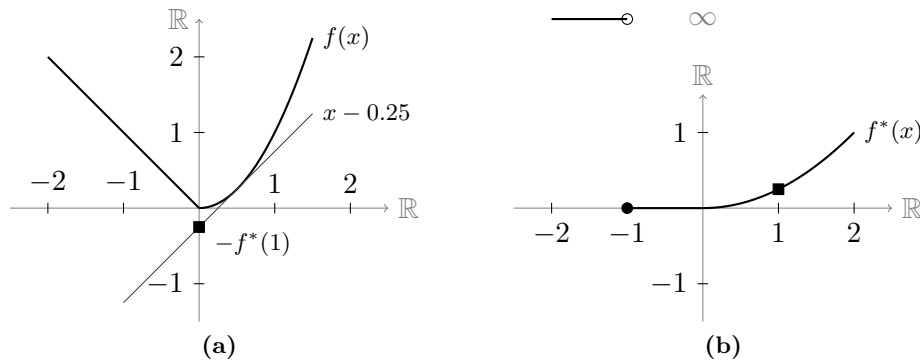
Analog zu den *primalen Variablen*  $x$ , von denen  $f$  abhängt, werden die Variablen  $y$ , von denen  $f^*$  abhängt, als *duale Variablen* bezeichnet.

Aus geometrischer Sicht lässt sich der Wert  $f^*(y)$  wie folgt interpretieren: Für die gegebene „Steigung“  $y$  betrachte man alle affinen Funktionen  $g = \langle y, \cdot \rangle - c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , die unterhalb von  $f$  liegen, für die also  $g(x) \leq f(x) \forall x$  gilt. Der Achsenabschnitt einer solchen Funktion  $g$  ist bekanntlich gegeben durch  $g(0) = -c$ . Wie die nachstehende Rechnung zeigt, beschreibt nun  $-f^*(y)$  den größten erlaubten Achsenabschnitt für  $g$ :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq \langle y, x \rangle - c \quad \forall x \\ \Leftrightarrow c &\geq \langle y, x \rangle - f(x) \quad \forall x \\ \Leftrightarrow c &\geq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle y, x \rangle - f(x) = f^*(y) \\ \Leftrightarrow -c &\leq -f^*(y). \end{aligned}$$

Veranschaulicht wird dieser Zusammenhang in Abbildung 5.

Wie sich schon anhand der Sätze 2.5, 2.8 und 2.12 zeigt, spielen eigentliche, unterhalbstetige und konvexe Funktionen  $f$  in der konvexen Optimierung eine ausgezeichnete Rolle. Das nun folgende Resultat unterstreicht die Bedeutung dieser Funktionen im Kontext der Fenchel-Dualität.



**Abbildung 5:** Geometrischer Zusammenhang zwischen  $f$  und ihrer Konjugierten  $f^*$ . Links: Neben der Funktion  $f$  wurde beispielhaft die größte affine Funktion mit der Steigung 1 eingezeichnet, die noch unterhalb von  $f$  liegt. Ihr Achsenabschnitt ist mit ■ markiert. Rechts: Der Wert der Konjugierten  $f^*(x)$  an der Stelle 1 entspricht dem negierten Achsenabschnitt aus (5a).

**Satz 2.15 (Bikonjugation [RW98, Thm. 11.1])**

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sei  $\text{con } f$  eigentlich. Dann sind  $f^*$  und  $f^{**}$  eigentlich, unterhalbstetig sowie konvex und es gilt  $f^{**} = \text{cl con } f$ . Ist  $f$  selbst eigentlich, unterhalbstetig und konvex, so ist  $f^{**} = f$ .

Die Legendre-Fenchel Transformation ist also eine zu sich selbst inverse Eins-zu-Eins-Abbildung in der Menge der Funktionen mit den erwähnten Eigenschaften – nebenbei bemerkt ist ihr einziger Fixpunkt die Funktion  $f = \frac{1}{2} \|\cdot\|^2$  [RW98, Ex. 11.11]. Insbesondere besagt Satz 2.15, dass  $f^*$  die gesamte Information über  $f$  enthält, wenn  $f$  eigentlich, unterhalbstetig und konvex ist. Er rechtfertigt zudem den Gebrauch der Notation  $f \xleftarrow{*} f^*$  für ein Paar von zueinander konjugierten Funktionen dieser Art. Anschließend werden einige Rechenregeln für entsprechende Paare von Funktionen gegeben.

**Lemma 2.16 (Rechenregeln der Konjugierten [RW98, S. 475 & Prop. 11.22])**

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eigentlich, unterhalbstetig und konvex, dann gelten:

1.  $f(\cdot) - \langle a, \cdot \rangle \xleftarrow{*} f^*(\cdot + a)$  für  $a \in \mathbb{R}^n$ ,
2.  $f(\cdot) + c \xleftarrow{*} f^*(\cdot) - c$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
3.  $\lambda f(\cdot) \xleftarrow{*} \lambda f^*(\cdot/\lambda)$  für  $\lambda > 0$ .

Ist  $f$  separabel in seinen Variablen, existieren also  $f_1 : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  und  $f_2 : \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit  $f((x_1, x_2)) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$  sowie  $n = n_1 + n_2$ , dann gilt

4.  $f^*((y_1, y_2)) = f_1^*(y_1) + f_2^*(y_2)$ .

Ein gängiges Beispiel von Funktionen, mit denen sich Anwendungen der konvexen Optimierung beschäftigen, sind Normen. Insbesondere sind alle Normen stetige und konvexe

Abbildungen mit Werten in  $\mathbb{R}$  und erfüllen damit stets die gängigen Voraussetzungen. Als Beispiel werden an dieser Stelle noch genauer  $\ell_p$ -Normen auf  $\mathbb{R}^n$  betrachtet, bekanntlich gegeben durch  $\|x\|_{\ell_p} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$  für  $1 \leq p < \infty$  und  $\|x\|_{\ell_\infty} = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$  für  $p = \infty$ . Es sei daran erinnert, dass sich  $\ell_p$ -Normen mittels ihrer *dualen Norm* darstellen lassen als  $\|x\|_{\ell_p} = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \{\langle x, z \rangle \mid \|z\|_{\ell_q} \leq 1\}$ . Der *duale Exponent*  $q$  für  $1 < p < \infty$  ist dabei durch die Gleichung  $1/p + 1/q = 1$  definiert. Im Grenzfall  $p = 1$  ist  $q = \infty$  (und umgekehrt) [BV04, Kap. A.1.6]. Das folgende Beispiel 2.17 gibt nun einen geschlossenen Ausdruck für die Konjugierte einer  $\ell_p$ -Norm.

**Beispiel 2.17 (Konjugierte einer  $\ell_p$ -Norm [BV04, Bsp. 3.26])**

Ist  $q \in [1, \infty]$  der zu  $p \in [1, \infty]$  duale Exponent, dann gilt  $\|\cdot\|_{\ell_p} \xleftarrow{*} \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_q} \leq 1\}}$ .

**Beweis:** Für  $f := \|\cdot\|_{\ell_p}$  auf  $\mathbb{R}^n$  gilt nach (2.19), dass  $f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle y, x \rangle - \|x\|_{\ell_p}$  ist.

Im Falle  $\|y\|_{\ell_q} > 1$  existiert mittels der dualen Norm ein  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|\tilde{x}\|_{\ell_p} \leq 1$  und  $\langle y, \tilde{x} \rangle > 1$ , also ist  $\alpha := \langle y, \tilde{x} \rangle - \|\tilde{x}\|_{\ell_p} > 0$ . Für alle  $\lambda > 0$  gilt  $f^*(y) \geq \langle y, \lambda \tilde{x} \rangle - \|\lambda \tilde{x}\|_{\ell_p} = \lambda \alpha$  und daher ist  $f^*(y) = \infty$  für  $\|y\|_{\ell_q} > 1$ .

Für den Fall  $\|y\|_{\ell_q} \leq 1$  gilt dagegen das Folgende: Im Allgemeinen wird das Supremum  $\|y\|_{\ell_q} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle y, x \rangle \mid \|x\|_{\ell_p} \leq 1\}$  stets auf dem Rand  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_{\ell_p} = 1\}$  angenommen, woraus die Ungleichung  $\|\tilde{y}\|_{\ell_q} \|\tilde{x}\|_{\ell_p} \geq \langle \tilde{y}, \tilde{x} \rangle$  für alle  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$  folgt. Im Speziellen gilt daher für  $\|y\|_{\ell_q} \leq 1$ , dass  $\langle y, x \rangle - \|x\|_{\ell_p} \leq \|x\|_{\ell_p} (\|y\|_{\ell_q} - 1) \leq 0$  ist. Maximiert wird der linke Ausdruck folglich durch  $x = 0$  und somit ist  $f^*(y) = 0$  für  $\|y\|_{\ell_q} \leq 1$ .

Da Normen insbesondere eigentlich, unterhalbstetig und konvex sind, gilt nach Satz 2.15 auch die Rückrichtung  $f^{**} = f$ , also  $(\delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_q} \leq 1\}})^* = \|\cdot\|_{\ell_p}$ . ■

Ein weiteres überaus nützliches Resultat, das die Legendre-Fenchel Transformation in direkten Bezug zu der in Abschnitt 2.2 eingeführten Proximalabbildung setzt, besagt, dass die Auswertung der Proximalabbildung einer Konjugierten exakt so aufwändig ist wie die der Ausgangsfunktion.

**Satz 2.18 (Moreau-Identität [PB14, Kap. 2.5])**

Für eigentliche, unterhalbstetige und konvexe  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $\tau > 0$  die Identität

$$x = (\text{id} + \tau \partial f)^{-1}(x) + \tau \left( \text{id} + \frac{1}{\tau} \partial f^* \right)^{-1}(x/\tau). \quad (2.21)$$

Im Anschluss wird das Beispiel 2.17 fortgeführt, indem mittels Satz 2.18 nun die Proximalabbildung einer  $\ell_p$ -Norm bestimmt wird.

**Beispiel 2.19 (Proximalabbildung einer  $\ell_p$ -Norm [PB14, Kap. 6.5])**

Es sei  $q \in [1, \infty]$  der zu  $p \in [1, \infty]$  duale Exponent. Weiter seien  $\tau > 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt:

$$\left( \text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_p}) \right)^{-1}(x) = x - \tau \Pi_{B_q}(x/\tau). \quad (2.22)$$

Dabei beschreibt  $\Pi_S : \mathbb{R}^n \rightarrow S$  die Projektion eines Punktes  $y \in \mathbb{R}^n$  auf den bezüglich des euklidischen Abstandes nächstgelegenen Punkt  $\Pi_S(y)$  in der Menge  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{B}_q := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|_{\ell_q} \leq 1\}$  bezeichnet weiterhin die  $\ell_q$ -Einheitskugel.

**Beweis:** Zunächst erhält man aus Satz 2.18:

$$(\text{id} + \tau \partial \|\cdot\|_{\ell_p})^{-1}(x) = x - \tau \left( \text{id} + \frac{1}{\tau} \partial \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_q} \leq 1\}} \right)^{-1}(x/\tau). \quad (2.23)$$

Nach Satz 2.12 gilt dabei für  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \left( \text{id} + \frac{1}{\tau} \partial \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_q} \leq 1\}} \right)^{-1}(y) &= \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|y - z\|^2 + \frac{1}{\tau} \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_q} \leq 1\}}(z) \\ &= \operatorname{argmin}_{\{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_{\ell_q} \leq 1\}} \|y - z\| = \Pi_{\mathcal{B}_q}(y). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Einsetzen von (2.24) in (2.23) ergibt (2.22). ■

### Fenchel-Rockafellar Dualität

Mithilfe der bis hier vorgestellten Definitionen und Resultate lässt sich nun das duale Problem zu (2.18) formulieren und verstehen. Es sei zunächst rekapituliert, dass es sich bei  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  um eigentliche, unterhalbstetige, konvexe Funktionen und bei  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  um eine Matrix handelt. Daraus erhält man die folgende Ableitung:

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{G(x) + F(Kx)\} \quad | \text{Satz 2.15} \quad (2.25)$$

$$= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{G(x) + F^{**}(Kx)\} \quad | \text{Def. 2.14}$$

$$\begin{aligned} &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ G(x) + \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \{ \langle Kx, y \rangle - F^*(y) \} \right\} \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \{ G(x) + \langle Kx, y \rangle - F^*(y) \} \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ G(x) + \langle Kx, y \rangle - F^*(y) \} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \{ -F^*(y) + \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{ G(x) + \langle Kx, y \rangle \} \} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \{ -F^*(y) - \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ -G(x) - \langle Kx, y \rangle \} \} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ -F^*(y) - \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \langle -K^\top y, x \rangle - G(x) \} \right\} \quad | \text{Def. 2.14} \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \{ -F^*(y) - G^*(-K^\top y) \}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Bis auf die Vertauschung von Infimum und Supremum zwischen (2.26) und (2.27) folgen alle Schritte aus elementaren algebraischen Umformungen oder aus den angegebenen Definitionen und Sätzen.

Das resultierende *duale Maximierungsproblem* (2.28) und seine Beziehung zum primalen Minimierungsproblem (2.25) sollen im Folgenden näher untersucht werden. Zunächst gibt der folgende Satz 2.20 Aufschluss darüber, wann der fragliche Schritt von (2.26) auf (2.27) erlaubt ist und wie hinreichende Optimalitätsbedingungen der beiden Probleme aussehen.

**Satz 2.20 (Optimalitätsbedingungen [BL11, Satz 6.68 & Kor. 6.70])**

Es seien  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ,  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  eigentlich, unterhalbstetig und konvex, es sei  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und das primale Problem (2.25) besitze eine Lösung  $x^* \in \mathbb{R}^n$ . Existiert weiterhin ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $G(x_0) < \infty$ ,  $F(Kx_0) < \infty$ , sodass  $F$  im Punkt  $(Kx_0)$  stetig ist, so gilt die Gleichheit zwischen (2.25) und (2.28).

Außerdem löst  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  das Paar aus primalem Problem (2.25) und dualem Problem (2.28) genau dann, wenn

$$-K^\top \tilde{y} \in \partial G(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \tilde{y} \in \partial F(K\tilde{x}). \quad (2.29)$$

Die Eigenschaft, dass das Infimum eines primalen Zielfunktional  $\varphi$ , in diesem Abschnitt gegeben durch  $\varphi(x) := G(x) + F(Kx)$ , mit dem Supremum des dazu dualen Zielfunktional  $\psi$ , hier  $\psi(y) := -F^*(y) - G^*(-K^\top y)$ , übereinstimmt, wird als *starke Dualität* bezeichnet. Im Allgemeinen kann dies nicht immer gewährleistet werden, es gilt dann aber immerhin die *schwache Dualität*  $\inf_x \varphi(x) \geq \sup_y \psi(y)$  [BV04, S. 255f.]. Die Differenz  $d(x, y) := \varphi(x) - \psi(y) \geq 0$  wird als *numerische Dualitätslücke* (engl. *numerical duality gap*) bezeichnet. und dient in modifizierter Form als gängiges Abbruchkriterium für numerische Verfahren [Lel13, Kap. 8.2].

Zum Abschluss dieses Abschnittes sei noch einmal näher auf die durch (2.26) gegebene Variante des primal-dualen Problempaares eingegangen. Es mag vorkommen, dass das duale Problem (2.28) bezüglich der Optimierung günstigere Eigenschaften aufweist als das primale Problem (2.25). Dennoch besteht im Allgemeinen kein einfacher Zusammenhang zwischen dualen Maximierern  $y^*$  und primalen Minimierern  $x^*$ , mit dessen Hilfe sich letztere aus ersteren gewinnen ließen – das Kriterium (2.29) beispielsweise erfordert die Auswertung von Subdifferentialen. Der bessere Ansatz besteht daher darin, sich mit dem Problem (2.26) auseinanderzusetzen, in dem primale Variablen  $x$  und duale Variablen  $y$  gleichzeitig vorkommen.

Es bezeichne genauer  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit

$$L(x, y) := G(x) + \langle Kx, y \rangle - F^*(y) \quad (2.30)$$

die sogenannte *Lagrange-Funktion*. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.20 gilt dann für ein primal-dual optimales Paar  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  [BL11, Bem. 6.72]:

$$\begin{aligned} L(x^*, y^*) &= \sup_{y \in \mathbb{R}^m} L(x^*, y) = G(x^*) + F(Kx^*) \\ &= -F^*(y^*) - G^*(-K^\top y^*) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, y^*). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Daraus folgt insbesondere

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \quad (2.32)$$



Geometrisch kann man  $(x^*, y^*)$  also als Sattelpunkt auffassen, denn während  $x^*$  einen Minimierer von  $L$  bezüglich der primalen Variablen darstellt, ist  $y^*$  ein Maximierer von  $L$  bezüglich der dualen Variablen.

## 2.4 Ein konvexes Optimierungsverfahren erster Ordnung

Die Umformulierung des primal-dualen Problems in ein Sattelpunktproblem für die assoziierte Lagrange-Funktion  $L$  ist grundlegend für zahlreiche Optimierungsverfahren. Die Idee ist die folgende: In einem iterativen Verfahren werden für  $L$  abwechselnd Minimierungsschritte in primaler und Maximierungsschritte in dualer Richtung ausgeführt.

Dieser Ansatz soll im Folgenden kurz ausgeführt werden: Für  $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  sind die Abbildungen  $L_{y^0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, -L_{x^0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit  $L_{y^0}(x) := L(x, y^0)$  beziehungsweise  $-L_{x^0}(y) := -L(x^0, y)$  eigentlich, unterhalbstetig und konvex. Mittels der Rechenregeln aus Satz 2.13 folgt für ihre Proximalabbildungen (mit  $\tau, \sigma > 0$ ):

$$\begin{aligned} (\text{id} + \tau \partial L_{y^0})^{-1}(x) &= (\text{id} + \tau \partial G)^{-1}(x - \tau K^\top y^0), \\ (\text{id} + \sigma \partial(-L_{x^0}))^{-1}(y) &= (\text{id} + \sigma \partial F^*)^{-1}(y + \sigma K x^0). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Analog zur Herleitung des einfachen Fixpunktschemas (2.12) erhält man für einen Sattelpunkt  $(x^*, y^*)$  von  $L$  [BL11, S. 386]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \in \partial L_{y^*}(x^*), \\ 0 \in \partial(-L_{x^*})(y^*) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^* = (\text{id} + \tau \partial L_{y^*})^{-1}(x^*), \\ y^* = (\text{id} + \sigma \partial(-L_{x^*}))^{-1}(y^*) \end{array} \right\} \tag{2.34}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^* = (\text{id} + \tau \partial G)^{-1}(x^* - \tau K^\top y^*), \\ y^* = (\text{id} + \sigma \partial F^*)^{-1}(y^* + \sigma K x^*). \end{array} \right\} \tag{2.35}$$

Das Optimierungsverfahren aus [CP11], das in Algorithmus 1 beschrieben wird, kann nun als modifizierte Fixpunktiteration für die Gleichungen (2.35) verstanden werden. Es handelt sich dabei um ein sogenanntes Verfahren *erster Ordnung*, da es nur mit Informationen über die erste Ableitung von  $F^*$  und  $G$  in Form der Subdifferenziale  $\partial F^*$  und  $\partial G$  arbeitet und keine Ableitungen höherer Ordnung verwendet.

---

**Algorithmus 1:** Optimierungsalgorithmus erster Ordnung aus [CP11]

---

**Initialisierung** Wähle Schrittweiten  $\tau, \sigma > 0$  mit  $\tau\sigma\|K\|_2^2 < 1$  und Startpunkte  $x^0 \in \mathbb{R}^n, y^0 \in \mathbb{R}^m$ . Setze  $\bar{x}^0 \leftarrow x^0$ .

**Iteriere über  $n \geq 0$  :**

$$\left[ \begin{array}{l} y^{n+1} \leftarrow (\text{id} + \sigma \partial F^*)^{-1}(y^n + \sigma K \bar{x}^n) \\ x^{n+1} \leftarrow (\text{id} + \tau \partial G)^{-1}(x^n - \tau K^\top y^{n+1}) \\ \bar{x}^{n+1} \leftarrow 2x^{n+1} - x^n \end{array} \right.$$


---

$\|K\|_2 := \max\{\|Kx\| \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| = 1\}$  bezeichnet in Algorithmus 1 die Spektralnorm der Matrix  $K$ . Wählt man Schrittweiten  $\tau, \sigma > 0$  mit  $\tau\sigma\|K\|_2^2 < 1$ , so lässt sich zeigen [CP11, Thm. 1]: Unter den Voraussetzungen von Satz 2.20 konvergiert die von Algorithmus 1 erzeugte Folge  $((x^n, y^n))_{n \in \mathbb{N}_0}$  für beliebige Startpunkte  $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  gegen einen Sattelpunkt  $(x^*, y^*)$  von  $L$ .

### Abbruchbedingungen

Als Abbruchkriterium für Algorithmus 1 dient in dieser Arbeit eine Variante der *normalisierten Dualitätslücke* [Lel13, Def. 8.3]. Diese stellt eine Modifikation der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Dualitätslücke in folgender Art und Weise dar:

$$\bar{d}(x, y) := \frac{d(x, y)}{\psi(y)} = \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{\psi(y)}. \quad (2.36)$$

Gegenüber der gewöhnlichen Dualitätslücke  $d$  besitzt  $\bar{d}$  den Vorteil der Skalierungsinvarianz. Jedoch erfordert sie im Gegenzug, dass stets  $\psi(y) > 0$  gilt, damit  $\bar{d} \geq 0$  ist. Da dies für die Zwecke dieser Arbeit nicht gewährleistet werden kann, wird stattdessen die *absolute normalisierte Dualitätslücke*  $|d(x, y)|/|\psi(y)|$  verwendet. Um hierbei wiederum eine Division durch 0 zu verhindern, wird der Nenner für Werte von  $|\psi(y)|$  unterhalb eines kleinen Schwellwertes  $\epsilon > 0$  durch  $\epsilon$  ersetzt. Zusammengefasst ergibt sich

$$\tilde{d}(x, y) := \begin{cases} |d(x, y)|/|\psi(y)|, & |\psi(y)| > \epsilon, \\ |d(x, y)|/\epsilon, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.37)$$

Neben der eigentlichen Dualitätslücke ist ebenfalls die Handhabe eventueller Nebenbedingungen erforderlich, um ein verlässliches Abbruchkriterium zu schaffen. Die gängige Lösung besteht darin, Indikatorfunktionen  $\delta_C(x)$  in der Implementierung unabhängig von  $x$  den Wert 0 zu geben und zusätzlich den Wert eines Fehlermaßes  $\mathcal{E}(x)$  zurückzuliefern, das den Abstand zum zulässigen Bereich  $C$  angibt [Lel13, Kap. 8.3]. Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass dies zu einer Verletzung der Dualitätsungleichung  $\varphi(x) \geq \psi(y)$  führen kann. Zum einen ist es daher sinnvoll, in (2.37) mit Beträgen zu arbeiten, zum anderen sollten die Fehlermaße direkt in das Abbruchkriterium einbezogen werden, um zumindest eine Nähe der finalen Iterierten zum zulässigen Bereich sicherzustellen.

Sind primales und duales Problem also gegeben durch

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \delta_{C^p}(x) \quad \text{und} \quad \psi(y) = \psi_0(y) - \delta_{C^d}(y) \quad (2.38)$$

mit  $\text{dom } \varphi_0 = \mathbb{R}^n$ ,  $\text{dom } \psi_0 = \mathbb{R}^m$  und Fehlermaßen  $\mathcal{E}^p(x) \approx \text{dist}(x, C^p)$  beziehungsweise  $\mathcal{E}^d(y) \approx \text{dist}(y, C^d)$ , so beschreibt die Bedingung

$$\max\{\tilde{d}(x, y), \mathcal{E}^p(x), \mathcal{E}^d(y)\} \leq \gamma \quad (2.39)$$

das gemeinsame Abbruchkriterium. Äquivalent zum oben beschriebenen Vorgehen werden zur Berechnung von  $\tilde{d}(x, y)$  dabei  $\varphi_0$  und  $\psi_0$  anstelle von  $\varphi$  und  $\psi$  verwendet. Gängige Werte für den Schwellwert  $\gamma$  bewegen sich in der Bildverarbeitung im Bereich von  $\gamma = 10^{-4}$  [Lel13, S. 56].

---

## Kapitel 3: Ein low-rank- und sparsity-basiertes Registrierungsmodell

Dieses Kapitel bildet das Kernstück dieser Arbeit, indem es das gruppenweise Registrierungsmodell, das bereits kurz in Abschnitt 1.2 erwähnt wurde, ausführlich motiviert und vorstellt. Abschnitt 3.1 widmet sich zunächst der Robust Principal Component Analysis, die als Ausgangspunkt für die Definition eines gruppenweisen Distanzmaßes in Abschnitt 3.2 dient. Anschließend diskutiert Abschnitt 3.3 die Totale Variation als zugehörigen Regularisierer. Eine Zusammenfassung des resultierenden Modells wird in Abschnitt 3.4 präsentiert.

### 3.1 Motivation mittels RPCA

Im Anschluss an die Diskussion der nötigen Grundlagen behandelt dieser Abschnitt die *Robust Principal Component Analysis* (RPCA), deren folgende Darstellung in erster Linie auf den Veröffentlichungen [CLMW11] und [HP14] beruht.

#### 3.1.1 Grundlagen: PCA, SVD & Schatten- $q$ -Normen

Wie bereits in Abschnitt 1.2 erläutert, soll für die Zwecke dieser Arbeit die Ähnlichkeit einer Reihe von Bildern über ihre lineare Abhängigkeitsstruktur bemessen werden. Anders ausgedrückt sind Bilder sich somit ähnlich, wenn sie sich in einen niedrigdimensionalen linearen Unterraum einbetten lassen.

Eine der gängigsten Methoden zur Suche nach niedrigdimensionalen linearen Unterräumen in hochdimensionalen Datensätzen ist die klassische Hauptkomponentenanalyse (PCA). Mit ihrer Hilfe lassen sich Probleme wie das folgende lösen: Angenommen es seien fehlerbehaftete Datenpunkte  $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N\} \subset \mathbb{R}^p$  mit  $p < N$  gegeben, die sich aus  $\tilde{x}_i = x_i + \epsilon_i$  zusammensetzen. Über die fehlerfreien Daten  $x_i$  sei einzig bekannt, dass es sich bei ihnen um Punkte aus einem linearen Unterraum der Dimension  $r < p$  handelt. Die Fehler  $\epsilon_i$  seien zufällig, weshalb die Matrix  $\tilde{X} = [\tilde{x}_1 | \dots | \tilde{x}_N]^\top \in \mathbb{R}^{N \times p}$  mit hoher Wahrscheinlichkeit vollen Rang  $p$  hat. Folgen die Fehler  $\epsilon_i$  weiterhin gewissen Normalverteilungseigenschaften, so lassen sich die fehlerfreien Daten  $X = [x_1 | \dots | x_N]^\top$  als Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{N \times p}} \|X - \tilde{X}\|_F \quad \text{u. d. Nb.} \quad \text{rang}(X) \leq r \quad (3.1)$$

mittels der PCA rekonstruieren [HP14]. Dabei bezeichnet  $\|A\|_F := (\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2)^{1/2}$  die Frobeniusnorm einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Ein numerisch stabiles sowie effizientes Verfahren zur Berechnung der PCA und insbesondere zur Lösung des Problems (3.1) stellt die *Singulärwertzerlegung* (engl. *singular value decomposition*, kurz SVD) dar.

**Satz 3.1 (Singularwertzerlegung [GVL96, Thm. 2.5.2 & Kap. 2.5.4])**

Für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existiert eine Zerlegung in Faktoren

$$A = U \Sigma V^\top, \quad (3.2)$$

sodass  $U = [u_1 | \dots | u_m] \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und  $V = [v_1 | \dots | v_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  orthonormal sind. Dabei ist  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $k = \min\{m, n\}$  und  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k \geq 0$ . Eine Faktorisierung der Form (3.2) wird *Singularwertzerlegung* genannt. Die Diagonalelemente  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  von  $\Sigma$  heißen *Singularwerte* und sind eindeutig bestimmt.

Für den Fall  $m \geq n$  existiert zudem eine reduzierte Darstellung von  $A$  durch

$$A = \hat{U} \hat{\Sigma} V^\top \quad (3.3)$$

mit  $\hat{U} = [u_1 | \dots | u_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\hat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Diese wird üblicherweise bezeichnet als die *ökonomische Variante* der Singularwertzerlegung von  $A$ .

**Beweis:** Siehe [GVL96, Thm. 2.5.2]. ■

Die Singularwertzerlegung aus Satz 3.1 ermöglicht nun eine explizite Lösung von (3.1): Ist  $\tilde{X} = U \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) V^\top$  eine SVD der fehlerbehafteten Daten, dann ist der Minimierer des Problems gegeben durch  $X = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^\top$  [GVL96, Thm. 2.5.3]. Dieses Resultat illustriert bereits den Zusammenhang zwischen der Singularwertzerlegung und dem Rang einer Matrix. Genauer gilt [GVL96, S. 71]: Ist  $\sigma : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\min\{m, n\}}$  diejenige Abbildung, die einer Matrix den Vektor ihrer Singularwerte in absteigender Sortierung zuordnet, so ist

$$\text{rang}(A) = |\{1 \leq i \leq \min\{m, n\} \mid (\sigma(A))_i \neq 0\}|. \quad (3.4)$$

Weiterhin lassen sich verschiedene bekannte Matrixnormen mittels der Singularwerte ausdrücken. Es gelten beispielsweise [GVL96, S. 71]:

1.  $\|A\|_2 = \max(\sigma(A))$  für die Spektralnorm aus Abschnitt 2.4 oder
2.  $\|A\|_F = \langle \sigma(A), \sigma(A) \rangle^{1/2}$  für die oben erwähnte Frobeniusnorm.

Tatsächlich erlaubt die Singularwertzerlegung die Definition einer ganzen Klasse von Matrixnormen, die bekannt sind als *Schatten- $q$ -Normen*.

**Definition 3.2 (Schatten- $q$ -Normen [HJ12, S. 465])**

Die Schatten- $q$ -Norm, kurz SqN, auf  $\mathbb{R}^{m \times n}$  ist für  $q \in [1, \infty]$  definiert als die Komposition  $\|\cdot\|_{S,q} := \|\cdot\|_{\ell_q} \circ \sigma$ .

Einen Beweis dafür, dass es sich bei den Schatten- $q$ -Normen tatsächlich um Normen auf dem Raum  $\mathbb{R}^{m \times n}$  handelt, findet man beispielsweise in [HJ12, Thm. 7.4.7.2].

Im Lichte von Definition 3.2 erscheinen die obigen Beispiele nun als Spezialfälle, denn offensichtlich ergibt sich für  $q = \infty$  die Spektralnorm  $\|\cdot\|_2 = (\|\cdot\|_{\ell_\infty} \circ \sigma) = \|\cdot\|_{S,\infty}$  und für  $q = 2$  die Frobeniusnorm  $\|\cdot\|_F = (\|\cdot\|_{\ell_2} \circ \sigma) = \|\cdot\|_{S,2}$ .

Wie sich zeigt, weisen Schatten- $q$ -Normen auch bezüglich ihrer Konjugation und ihrer Proximalabbildung eine weitreichende Verwandtschaft zu den gewöhnlichen  $\ell_q$ -Normen auf, die in Kapitel 2 als Beispiel betrachtet wurden. Aufgrund der Bedeutung der entsprechenden Resultate für den Rest dieser Arbeit seien diese hier wiedergegeben.

**Satz 3.3 (Konjugierte & Proximalabbildung einer SqN [Lew95] & [PB14])**

Für  $\|\cdot\|_{S,q}$  auf  $\mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $q \in [1, \infty]$  und dualem Exponenten  $p \in [1, \infty]$  gilt:

$$\|\cdot\|_{S,q} = (\|\cdot\|_{\ell_q} \circ \sigma) \xleftarrow{*} (\delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_p} \leq 1\}} \circ \sigma) = \delta_{\{\|\cdot\|_{S,p} \leq 1\}} \quad (3.5)$$

Weiter gilt für  $\tau > 0$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Singulärwertzerlegung  $A = U \operatorname{diag}(\sigma(A)) V^\top$ :

$$(\operatorname{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{S,q}))^{-1}(A) = U \operatorname{diag} \left( \left( \operatorname{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q}) \right)^{-1}(\sigma(A)) \right) V^\top. \quad (3.6)$$

**Beweis:** Für (3.5) siehe [Lew95]. Für (3.6) siehe Abschnitt A.1 im Anhang. ■

Abschließend sei erwähnt, dass verschiedene Algorithmen zur numerischen Berechnung der SVD einer Matrix existieren, die beispielsweise in [GVL96] nachgelesen werden können. In der Regel wird dabei aus Gründen der Speicher- und Zeiteffizienz die ökonomische Variante (3.3) ausgewertet. Die Zeitkomplexität gängiger Verfahren hierfür lässt sich angeben als  $\mathcal{O}(mn^2)$  [GVL96, S. 254], wobei von  $m \geq n$  ausgegangen wird.

### 3.1.2 Robust Principal Component Analysis

Zwar existiert mit der PCA beziehungsweise der SVD eine explizite Lösung für das low-rank-Approximationsproblem (3.1), doch ist die Güte dieser Lösung in praktischen Anwendungen stark davon abhängig, inwieweit die Fehler in den vorliegenden Daten die geforderten Normalverteilungseigenschaften erfüllen. Besonders sensibel reagiert die PCA dabei auf den Fall, in dem die niedrigdimensionale Struktur eines Datensatzes nicht mehr durch ein geringfügiges und gleichmäßiges Rauschen, sondern durch starke und lokal beschränkte Abweichungen gestört ist [CLMW11]. In der Bildverarbeitung ist eine solche Situation beispielsweise aufgrund von Sensorfehlern oder aufgrund von zeitweisen Verdeckungen in Videosequenzen denkbar.

Um dem beschriebenen Problem beizukommen, wurden verschiedene Versionen einer robusten PCA vorgeschlagen – eine vergleichende Analyse einiger Ansätze findet sich beispielsweise in [GBZ12]. In dieser Arbeit ist mit dem Begriff RPCA allerdings durchweg der Ansatz aus [CLMW11] gemeint. Dieser geht von der Existenz einer Zerlegung der Datenmatrix  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  in einen niedrigdimensionalen Strukturanteil  $L \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und einen dünn besetzten Fehleranteil  $E \in \mathbb{R}^{m \times n}$  aus. Diese Anforderungen werden für  $L$  über die Rangfunktion und für  $E$  über die „0-Norm“  $\|\cdot\|_0$  modelliert, wobei letztere die Anzahl der nicht-verschwindenden Einträge einer Matrix angibt. Wohlgermerkt handelt es sich bei  $\|\cdot\|_0$  nicht wirklich um eine Norm, da  $\|\lambda E\|_0 = |\lambda| \|E\|_0$  nur im Falle  $\lambda E = 0$

richtig ist – folglich bestraft der Term auch nur die Anzahl der fehlerhaften Einträge und nicht ihre absolute Abweichung.

Zunächst ergibt sich nun das Optimierungsproblem [HP14]

$$\min_{L,E \in \mathbb{R}^{m \times n}} \text{rang}(L) + \mu \|E\|_0 \quad \text{u. d. Nb.} \quad M = L + E, \quad (3.7)$$

in dem der Faktor  $\mu > 0$  die beiden Terme gegeneinander gewichtet. Dieses Problem hat einen kombinatorischen Anteil und ist deshalb nicht effizient lösbar. In [CLMW11] wird daher vorgeschlagen, (3.7) durch eine konvexe Relaxierung zu ersetzen, in der die Rangfunktion durch die Summe der Singulärwerte von  $L$  ausgetauscht wird, was im Sinne von Definition 3.2 der Schatten-1-Norm entspricht. Diese ist auch bekannt als *nuclear norm* oder *trace norm* und wird im Folgenden mit  $\|\cdot\|_*$  bezeichnet. Weiterhin wird die „0-Norm“ von  $E$  durch die summierten Beträge aller Einträge von  $E$  ersetzt, notiert als  $\|E\|_1 := \|\text{vec}(E)\|_{\ell_1}$ . Aufgrund der Konvexität von Normen im Allgemeinen ist das resultierende Ersatzproblem

$$\min_{L,E \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|L\|_* + \mu \|E\|_1 \quad \text{u. d. Nb.} \quad M = L + E \quad (3.8)$$

$$\Leftrightarrow \min_{L \in \mathbb{R}^{m \times n}} \|L\|_* + \mu \|M - L\|_1, \quad (3.9)$$

genannt *Principal Component Pursuit* (PCP) [CLMW11], ebenfalls konvex.

Theoretisch gerechtfertigt sind diese Ersetzungen im Sinne der konvexen Hülle aus Definition 2.9. Konkret gelten zwischen (3.7) und (3.8) die Zusammenhänge

1.  $\text{con} \left( \text{rang} + \delta_{\{\|\cdot\|_2 \leq c_1\}} \right) (X) = \frac{1}{c_1} \|X\|_*$  für  $c_1 > 0$ ,  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sowie
2.  $\text{con} \left( \|\cdot\|_0 + \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_\infty} \leq c_2\}} \right) (x) = \frac{1}{c_2} \|x\|_{\ell_1}$  für  $c_2 > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

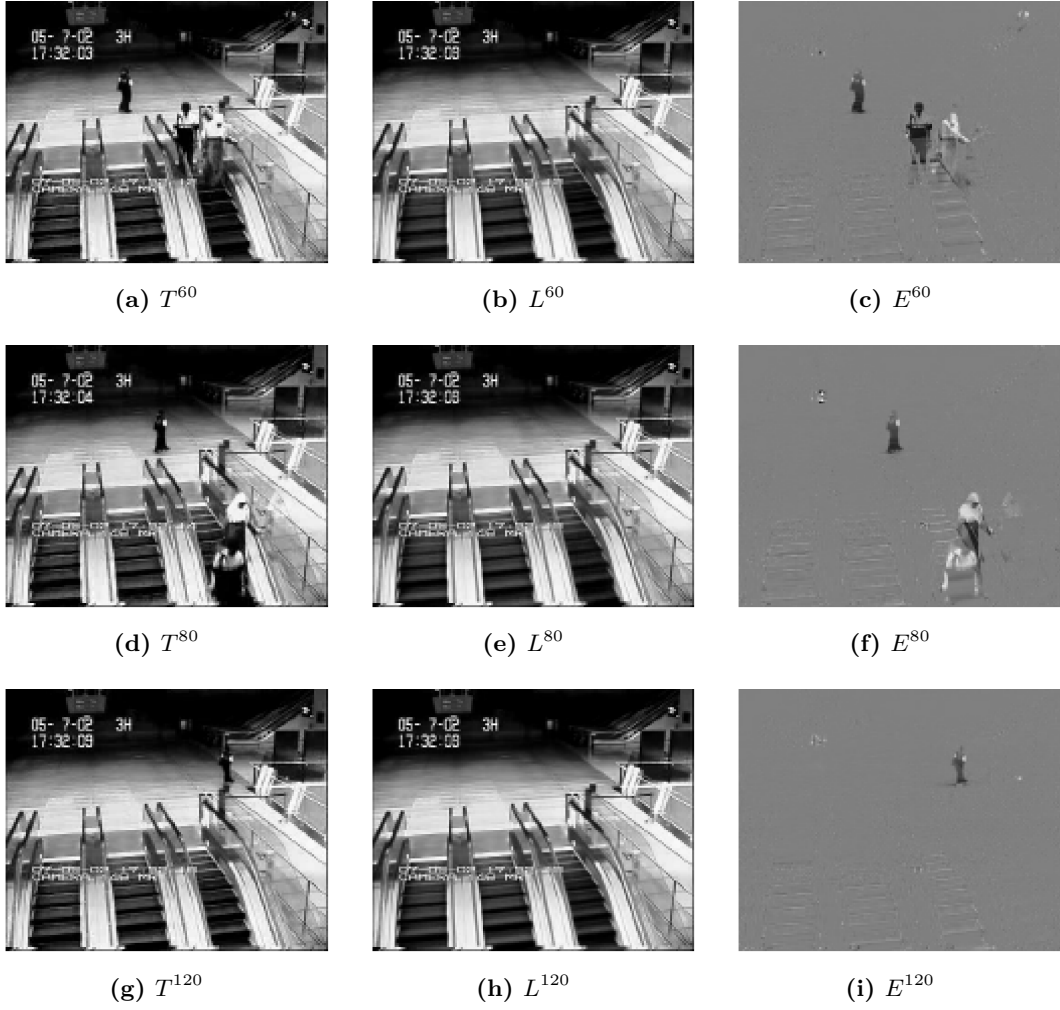
die beide mittels Satz 2.15 gezeigt werden können. Ersteren Beweis findet man in [FHB01], letzteren beispielsweise in [JSK11].

Es sei noch erwähnt, dass in [CLMW11] die Optimalität der Wahl  $\mu = \max\{m, n\}^{-1/2}$  für den Gewichtungparameter in (3.8) beziehungsweise (3.9) gezeigt werden konnte.

### 3.1.3 Anwendungsbeispiel

Zur Illustration der Funktionsweise der RPCA beziehungsweise der PCP wird in diesem Unterabschnitt ein Beispiel gegeben. Hierzu dient ein Ausschnitt von  $N = 200$  Standbildern  $T^1, \dots, T^N \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$  aus der „subway-Sequenz“ aus [LHGT04]. Dieser ist aufgelöst mit  $m_1 \times m_2 = 130 \times 160$  Bildpunkten und wurde auf einen Grauwertkanal reduziert. Die Aufnahme stammt von einer stationären Überwachungskamera, die auf eine Halle mit drei bewegten Rolltreppen gerichtet ist, über die sich mehrfach Gruppen von Menschen bewegen. Abbildung 6 zeigt in der linken Spalte beispielhaft die drei Standbilder  $T^{60}$ ,  $T^{80}$  und  $T^{120}$  aus diesem Ausschnitt.

Für die Datenmatrix  $M = [\text{vec}(T^1) | \dots | \text{vec}(T^N)] \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N}$  kann (3.9) als konvexes Optimierungsproblem mit dem Algorithmus 1 gelöst werden. Mit den Zuordnungen  $F(L) := \mu \|M - L\|_1$ ,  $G(L) := \|L\|_*$  und  $K := \text{id}$  bedarf es dazu der Konjugierten  $F^*(Y)$ ,  $G^*(Y)$  sowie der Proximalabbildungen  $(\text{id} + \eta \partial F^*)^{-1}(Y)$ ,  $(\text{id} + \tau \partial G)^{-1}(L)$ .  $Y \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N}$  bezeichnet die dualen Variablen.



**Abbildung 6:** Anwendungsbeispiel der RPCA. Linke Spalte: (6a), (6d) und (6g) zeigen drei Standbilder aus der „subway-Sequenz“ aus [LHGT04]. Mittlere Spalte: (6b), (6e) und (6h) zeigen die ermittelten zugehörigen low-rank-Komponenten. Rechte Spalte: (6c), (6f) und (6i) zeigen die entsprechenden Differenzbilder  $E^k = T^k - L^k$ . Zu erkennen ist, dass die RPCA erfolgreich den niedrigdimensionalen Anteil der Sequenz, den fixierten Blick auf die Rolltreppen, von den „Störungen“ durch die verschiedenen Menschengruppen trennen konnte – diese tauchen nur noch in den sparsity-Komponenten  $E^k$  auf.

Die Konjugierten ergeben sich aus Beispiel 2.17, Satz 3.3 und Lemma 2.16 zu

$$F^*(Y) = \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_\infty} \leq \mu\}}(\text{vec}(Y)) + \langle \text{vec}(Y), \text{vec}(M) \rangle, \quad (3.10)$$

$$G^*(Y) = \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_\infty} \leq 1\}}(\sigma(Y)). \quad (3.11)$$

Für die Proximalabbildungen mit den Schrittweiten  $\eta, \tau > 0$  gilt aufgrund von Bei-

spiel 2.19, Satz 3.3 und Lemma 2.13:

$$(\text{id} + \eta \partial F^*)^{-1}(Y) = \text{vec}^{-1}(\mu \Pi_{\mathfrak{B}_\infty}(\text{vec}(Y - \eta M)/\mu)), \quad (3.12)$$

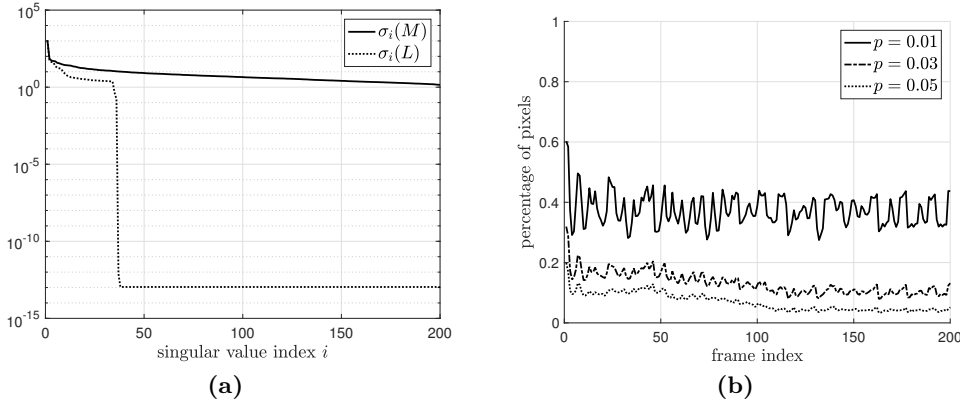
$$(\text{id} + \tau \partial G)^{-1}(L) = U \text{diag}(\sigma(L) - \tau \Pi_{\mathfrak{B}_\infty}(\sigma(L)/\tau)) V^\top. \quad (3.13)$$

Dabei ist  $L = U \text{diag}(\sigma(L)) V^\top$  eine Singulärwertzerlegung von  $L$  und  $\text{vec}^{-1}$  die Umkehr der Vektorisierung, also das „Zurückschreiben“ der einzelnen Spaltenvektoren in eine Matrix. Für einen expliziten Ausdruck für die Projektion  $\Pi_{\mathfrak{B}_\infty}$ , wie er in (3.12) und (3.13) benötigt wird, siehe Anhang A.2.

Wegen  $K = \text{id}$  gilt  $\|K\|_2 = 1$ , woraus sich beispielsweise  $\eta = \tau = 1 - 10^{-5}$  als gültige Schrittweiten ergeben. Der Gewichtungssparameter wird entsprechend der obigen Anmerkung als  $\mu = (m_1 m_2)^{-1/2}$  gewählt.

Das Ergebnis für die ausgewählten Standbilder  $T^{60}$ ,  $T^{80}$  und  $T^{120}$  zeigt Abbildung 6: In der mittleren Spalte sind die korrespondierenden low-rank-Komponenten  $L^{60}$ ,  $L^{80}$  und  $L^{120}$  dargestellt. Weiterhin zeigt die rechte Spalte die zugehörigen Differenzbilder  $E^{60}$ ,  $E^{80}$  und  $E^{120}$ . Es ist zu erkennen, dass die RPCA die niedrigdimensionale Struktur der Bildsequenz, nämlich die fixierte Sicht auf die Halle mit den Rolltreppen, erfolgreich von den „Störungen“ in Form der durch das Bild laufenden Menschengruppen getrennt hat: Letztere sind deutlich (und ausschließlich) in den Differenzbildern zu erkennen. Insbesondere nennenswert ist, dass die periodische Bewegung der Rolltreppen als strukturelles Element der Sequenz „erkannt“ und im low-rank-Anteil  $L$  erhalten wurde.

Weiteren Aufschluss über das Ergebnis für die Gesamtsequenz gibt Abbildung 7. In (7a) wird die Singulärwertstruktur der Eingangsdaten  $M$  und die des ermittelten low-rank-Anteils  $L$  in logarithmischer Ordinatenkalierung verglichen. Klar zu erkennen



**Abbildung 7:** Auswertung der RPCA der „subway-Sequenz“ aus Abb. 6. Links: Singulärwerte der Eingabedaten  $M$  und des errechneten low-rank-Anteils  $L$  in logarithmischer Ordinatenkalierung. Anhand der zahlreichen vernachlässigbaren Singulärwerte von  $L$  zeigt sich der deutlich verringerte Rang (im Vergleich zu  $M$ ). Rechts: Relativer Anteil der Bildpunkte mit absoluter Grauwertdifferenz  $|M_{i,j}^k - L_{i,j}^k| \leq p$  für verschiedene Schwellwerte  $p$ . Die Abszisse gibt den Index  $k$  des betrachteten Einzelbildes an. Der Anteil der Bildpunkte mit nennenswerten Differenzen ist durchweg klein und die Komponenten  $E^k$  sind in ebendiesem Sinne dünn besetzt.



ist, dass ein überwiegender Anteil der  $N = 200$  Singulärwerte von  $L$  sich in Größenordnungen nahe der Maschinengenauigkeit bewegt und daher als vernachlässigbar klein anzusehen ist. Im Sinne von (3.4) ist es also gerechtfertigt, von einem verringerten Rang von  $L$  zu sprechen.

In (7b) wird zusätzlich die „sparsity“ der Differenzbilder in  $E = M - L$  untersucht. Für jedes Einzelbild  $k = 1, \dots, N$  wurde dazu der relative Anteil der Bildpunkte  $(i, j)$  mit  $1 \leq i \leq m_1$  und  $1 \leq j \leq m_2$  bestimmt, für die der Grauwertabstand  $|M_{i,j}^k - L_{i,j}^k|$  unterhalb eines Schwellwertes  $p$  lag. Wenngleich nur ein geringer Teil dieser Werte als verschwindend anzusehen ist, ist dennoch zu erkennen, dass umgekehrt nur an wenigen Bildpunkten nennenswerte Differenzen  $|M_{i,j}^k - L_{i,j}^k| > p$  auftreten. Folglich kann  $E$  in dem Sinne als dünn besetzt angesehen werden, als dass vielen Bildpunkten mit kleinen Werten von  $|E_{i,j}^k|$  nur wenige Bildpunkte mit großen Unterschieden gegenüberstehen.

### 3.1.4 Motivation einer RPCA-basierten Bilddistanz

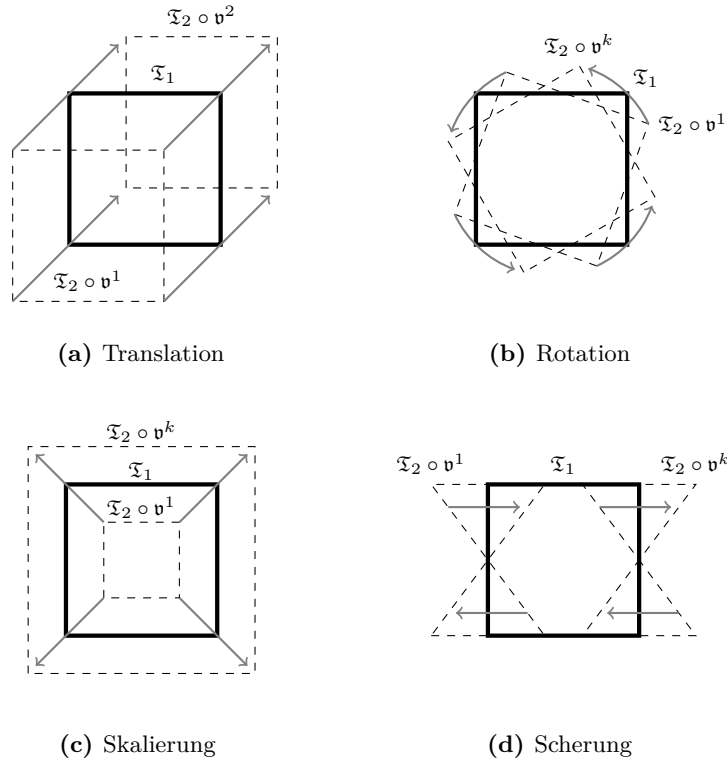
Wie das Beispiel aus dem vorangegangenen Unterabschnitt zeigt, eignen sich RPCA-basierte Methoden besonders gut für Bildsequenzen, denen eine klare niedrigdimensionale Struktur innewohnt. In Abbildung 6 war diese durch den fixierten Blickwinkel der Kamera und die periodische Bewegung der Rolltreppe gegeben. Folglich dürften sich Distanzmaße, die auf der RPCA basieren, insbesondere zur Registrierung von Bildsequenzen mit ebendieser Eigenschaft eignen.

In der Medizin findet sich ein prototypische Beispiel von Bildsequenzen mit periodisch wiederholten Bewegungen in der kardialen Bildgebung. Eine gruppenweise Registrierung kann dabei etwa zur Korrektur der atmungsbedingten Bewegung verschiedener Organe in einer zeitlichen MRT-Aufnahme dienen. Dementsprechende Experimente sind Gegenstand von Abschnitt 5.2 und stellen die Motivation für das nun folgende Registrierungsmodell dar.

## 3.2 Definition eines gruppenweisen Distanzmaßes

In diesem Abschnitt soll ausgehend von der vorangegangenen Diskussion der RPCA das gruppenweise Distanzmaß hergeleitet und untersucht werden, das bereits eingangs in (1.10) erwähnt wurde. Für letztere Zwecke sollen im Folgenden insbesondere die vier Experimente dienen, die in Abbildung 8 schematisch veranschaulicht werden. Allgemein besteht die Idee darin, den Wert  $D(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \circ \mathbf{v})$  eines gegebenen Distanzmaßes  $D$  für zwei sich ähnelnde Beispielbilder  $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  an vorgegebenen Stellen  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  über dem Bildgebiet  $\Omega$  auszuwerten und den Verlauf der resultierenden Kurve zu analysieren, beispielsweise in Hinblick auf lokale und globale Minimierer. Die Transformationen  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$  beschreiben dabei die verschiedenen Fälle von Translation, Rotation, Skalierung und Scherung. Es sei darauf hingewiesen, dass hierbei mit den Feldern  $\mathbf{v}^j$  im Unterschied zu Abschnitt 1.1 tatsächliche Transformationen anstelle von reinen Verschiebungen  $\mathbf{u}^j$  (mit  $\mathbf{u}^j = \mathbf{v}^j - \text{id}$ ) gemeint sind.

Eine Verallgemeinerung dieses Prinzips auf mehr als zwei Beispielbilder ist zwar denkbar, scheitert aber an der Schwierigkeit, einen Plot in Abhängigkeit von mehr als zwei

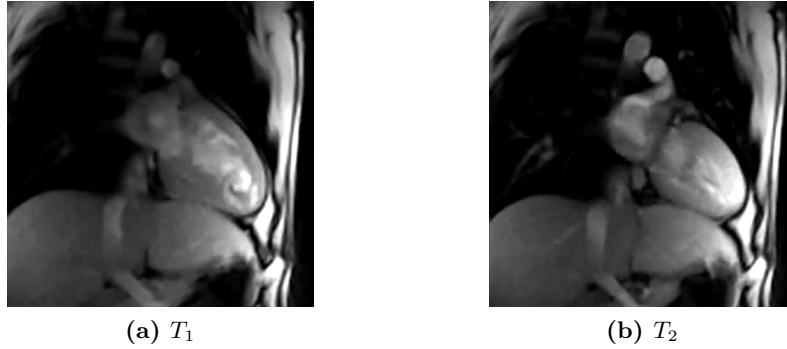


**Abbildung 8:** Schematische Darstellung vierer Experimente zur Untersuchung eines Distanzmaßes  $D$ . Das Bild  $\mathfrak{T}_1$  ist fixiert, während  $\mathfrak{T}_2$  mittels  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$  transformiert wird. Für jedes  $j = 1, \dots, k$  wird der Wert  $D(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \circ \mathbf{v}^j)$  ermittelt, um anschließend die resultierende Kurve für  $D$  (in Abhängigkeit von  $j$ ) auf Minima zu untersuchen oder um  $D$  mit anderen Distanzmaßen in einen Vergleich setzen zu können.

Eingabegrößen geeignet darzustellen. Aus diesem Grund wird in diesem Abschnitt auch für gruppenweise Distanzmaße  $D$  mit der Methode für zwei Eingabebilder gearbeitet. Als Beispielbilder dienen zwei Einzelbilder aus einer kardialen MRT-Aufnahme, dargestellt in Abbildung 9.

### 3.2.1 RCPA-Bilddistanz

Der naheliegendste Ansatz zur Definition einer Bilddistanz für  $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_N : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  in Anlehnung an die RPCA aus Abschnitt 3.1 besteht offensichtlich darin, ihre Auswertungen  $G_X(\mathfrak{T}_j) \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$  auf einem äquidistanten  $\Omega$ -Gitter  $X$  zu betrachten. Diese werden dann wie zuvor vektorisiert und in den Spalten einer Datenmatrix  $M$  zusammengefasst, sodass ihre Ähnlichkeit direkt über (3.9) bemessen werden kann.



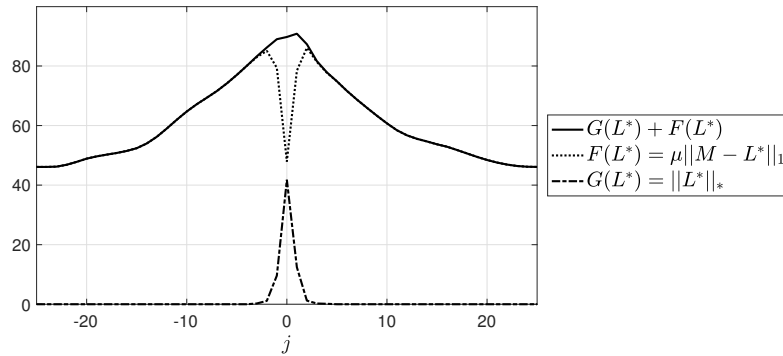
**Abbildung 9:** Diskrete Beispielbilder  $T_1$  und  $T_2$  für die in Abb. 8 beschriebenen Experimente.  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$  sind mit  $m_1 = m_2 = 220$  aufgelöst. Bilder mit freundlicher Genehmigung von Allen D. Elster, MRIquestions.com.

Aus dieser Idee ergibt sich das Distanzmaß

$$D(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_N) = \min_{L \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N}} \|L\|_* + \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \|[\text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_1)) | \dots | \text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_N))] - L\|_1 \quad (3.14)$$

mit der gängigen Wahl  $\mu = (m_1 m_2)^{-1/2}$  für den Gewichtungssparameter.

Wie sich jedoch zeigt, weist (3.14) einige für die Bildregistrierung ungünstige Eigenschaften auf. Hierzu sei auf Abbildung 10 verwiesen, in der das Ergebnis von (3.14) für das in (8a) dargestellte Translationsexperiment und die Beispielbilder aus Abbildung 9 zu sehen ist. Um die diskreten Bilder  $T_1$  und  $T_2$  kontinuierlich zu approximieren und folglich an Nichtgitterstellen auswerten zu können, wurden diese linear interpoliert. Wie auch im Rest der Arbeit wird dies gekennzeichnet durch die Notation  $\mathfrak{T}_1^{lin}$  beziehungsweise  $\mathfrak{T}_2^{lin}$ .



**Abbildung 10:** Plot von (3.14) für das in (8a) dargestellte Translationsexperiment mit interpolierten Beispielbildern  $\mathfrak{T}_1^{lin}$  und  $\mathfrak{T}_2^{lin}$  aus Abb. 9. Während  $\mathfrak{T}_1^{lin}$  fixiert ist, wird  $\mathfrak{T}_2^{lin}$  durch  $\mathbf{v}^j$  schrittweise verschoben. Der Index  $j = 0$  entspricht dem Fall, in dem sich  $\mathfrak{T}_2^{lin}$  komplett im Bildbereich  $\Omega$  befindet. Dargestellt sind die Gesamtenergie sowie die beiden Summanden, aus denen sie sich zusammensetzt.  $L^*$  bezeichnet jeweils den Minimierer von (3.14).

ungsweise  $\mathfrak{T}_2^{lin}$ . Hintergründe finden sich in [Mod09, Kap. 3.3]. Zur numerischen Lösung von (3.14) für die Daten  $M = [\text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_1^{lin})) | \text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_2^{lin} \circ v^j))]$  diene schließlich dieselbe Implementierung wie in Abschnitt 3.1.

Problematisch an dem Plot in Abbildung 10 sind zweierlei Aspekte. Zum einen weist die Kurve der Gesamtenergie in  $j = 0$ , also der Position, in der sich  $\mathfrak{T}_2^{lin}$  komplett im Bildbereich  $\Omega$  befindet, ein Maximum anstelle des erwarteten Minimums auf. Genauer noch ist zu erkennen, dass dies auf den  $\|\cdot\|_*$ -Term zurückzuführen ist, denn der  $\|\cdot\|_1$ -Term besitzt an dieser Stelle sehr wohl ein lokales Minimum – dieses wird in der Summe allerdings vom  $\|\cdot\|_*$ -Ausdruck „überdeckt“.

Zum anderen ist über alle drei Kurven hinweg diejenige Situation global am günstigsten, in der  $\mathfrak{T}_2^{lin}$  durch  $\mathbf{v}$  komplett aus dem Bildbereich  $\Omega$  „hinausgeschoben“ wird. Eine solche Lösung ist in der Bildregistrierung keinesfalls wünschenswert.

### 3.2.2 Modifikationen

Aus den aufgeführten Gründen wird das Distanzmaß (3.14) nun wie folgt modifiziert: Der Ausdruck  $\|L\|_*$ , interpretiert als relaxierte Nebenbedingung an die nuclear norm von  $L$ , wird für einen geeigneten Schwellwert  $\nu > 0$  ersetzt durch eine strikte Nebenbedingung in Form eines Indikators  $\delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}}$ . Weiterhin erfolgt nicht länger eine Beschränkung der nuclear norm  $\|L\|_*$  selbst, sondern in Anlehnung an die PCA eine Beschränkung der Norm der vom spaltenweisen Mittelwert befreiten Matrix  $\tilde{L} = L - \bar{L}$ . Die Matrix  $\bar{L}$  enthält dazu in jeder Spalte das arithmetische Mittel  $\bar{l}$  der Spalten von  $L$ . Dies hat zur Folge, dass Nullspalten in  $\tilde{L}$ , welche sich in Abb. 10 als besonders günstig bezüglich der  $\|\cdot\|_*$ -Norm erwiesen haben, nicht länger zu  $G_X(\mathfrak{T}_j) = 0$  korrespondieren. Stattdessen entspricht eine Nullspalte in  $\tilde{L}$  nun dem Fall  $G_X(\mathfrak{T}_j) = \bar{l}$ .

Zusammengenommen ergibt sich aus diesen Modifikationen das Distanzmaß

$$\begin{aligned} D(\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_N) &= \min_{L \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N}} \left[ \|\text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_1)) | \dots | \text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_N))\|_1 + \delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}}(L - \bar{L}) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Wohlgermerkt ist für (3.15) kein Gewichtungparameter  $\mu$  mehr nötig – der Tradeoff zwischen den beiden Termen wird über den Schwellwert  $\nu$  geregelt. Insbesondere sei noch darauf hingewiesen, dass (3.15) für  $M = [\text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_1)) | \dots | \text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_N))]$  als Datenmatrix exakt dem Ausdruck (1.10) aus der Einleitung entspricht.

Um (3.15) ähnlich wie (3.14) numerisch mit dem Algorithmus 1 zu lösen, werden die Zuordnungen  $F(L) := \delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}}(L)$  und  $G(L) := \|M - L\|_1$  verwendet. Die Zentrierung von  $L$  wird über einen linearen Operator  $K$  bewerkstelligt, sodass  $F(\text{vec}^{-1}(K \text{vec}(L)))$  dem Indikatorterm in (3.15) entspricht. Für den low-rank-Anteil  $L$  in vektorisierter Form  $\text{vec}(L) \in \mathbb{R}^{N m_1 m_2}$  ist  $K \in \mathbb{R}^{(N m_1 m_2) \times (N m_1 m_2)}$  dazu von der Gestalt

$$K = \begin{bmatrix} I_{m_1 m_2} & & \\ & \ddots & \\ & & I_{m_1 m_2} \end{bmatrix} - \frac{1}{N} \begin{bmatrix} I_{m_1 m_2} & \cdots & I_{m_1 m_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{m_1 m_2} & \cdots & I_{m_1 m_2} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Wie in Anhang A.3 gezeigt wird, gilt  $\|K\|_2 = 1$ , sodass die Schrittweiten  $\eta = \tau = 1 - 10^{-5}$  gültig bleiben.

Die Konjugierte von  $G(L) = \|M - L\|_1$  ist bereits aus Abschnitt 3.1 bekannt und  $F^*$  lässt sich aus Satz 3.3 und den Rechenregeln 2.16 berechnen. Insgesamt gelten:

$$F^*(Y) = \nu \|Y\|_{S,\infty} = \nu \|Y\|_2, \quad (3.17)$$

$$G^*(Y) = \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_\infty} \leq 1\}}(\text{vec}(Y)) + \langle \text{vec}(Y), \text{vec}(M) \rangle. \quad (3.18)$$

Für die benötigten Proximalabbildungen gilt nach Beispiel 2.19, den Sätzen 3.3 und 2.18 sowie den Rechenregeln aus Lemma 2.13 (mit  $\eta, \tau > 0$ ):

$$(\text{id} + \eta \partial F^*)^{-1}(Y) = U \text{diag}(\sigma(Y) - (\eta\nu)\Pi_{\mathfrak{B}_1}(\sigma(Y)/(\eta\nu)))V^\top, \quad (3.19)$$

$$(\text{id} + \tau \partial G)^{-1}(L) = \text{vec}^{-1}(\text{vec}(L) - \tau \Pi_{\mathfrak{B}_\infty}(\text{vec}(L - M)/\tau)). \quad (3.20)$$

$Y = U \text{diag}(\sigma(Y))V^\top$  ist dabei eine Singulärwertzerlegung der dualen Variablen. Ein effizienter Algorithmus für die Projektion  $\Pi_{\mathfrak{B}_1}$  in (3.19) wird in Anhang A.4 beschrieben.

Bei der Auswertung aller in Abbildung 8 dargestellten Experimente für das modifizierte Distanzmaß (3.15) werden für den Schwellwert  $\nu$  verschiedene Anteile des Wertes  $\|M - \bar{M}\|_*$  der Eingabedaten  $M$  im Bereich von 0 bis 1 verwendet. In Analogie zu  $\bar{L}$  und  $L$  enthält  $\bar{M}$  in jeder Spalte das Spaltenmittel von  $M$ . Das Ergebnis der vier Experimente zeigt Abbildung 11.

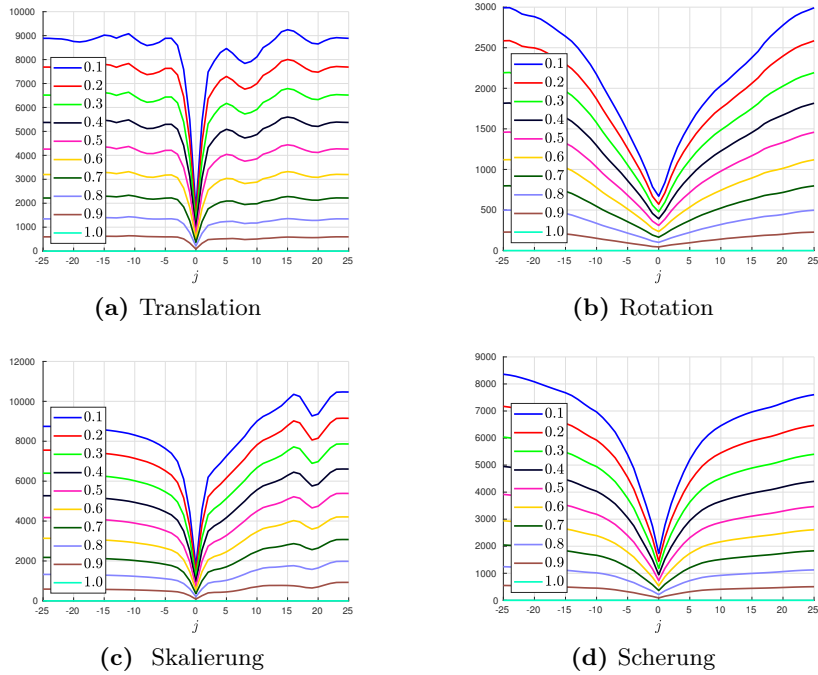
Im Vergleich zum ursprünglichen Distanzmaß (3.14) und der Abbildung 10 ist gut zu erkennen, dass das modifizierte Distanzmaß (3.15) ein wesentlich günstigeres Verhalten aufweist: In allen vier Experimenten nehmen sämtliche Kurven mit Schwellwerten  $\nu < \|M - \bar{M}\|_*$  deutliche globale Minima an den erwarteten Stellen an.

Gilt dagegen  $\nu = \|M - \bar{M}\|_*$ , so liegt  $M$  selbst in dem für  $L$  zulässigen Bereich und das Distanzmaß entartet zur Nullabbildung, wie es auch in Abbildung 11 in den cyanfarbenen Kurven zu erkennen ist. Im umgekehrten Fall von  $\nu = 0$  lässt sich der Wert von (3.15) ebenfalls analytisch bestimmen: Es gilt dann nämlich  $L = \bar{L}$ , was genau dann der Fall ist, wenn alle Spalten von  $L$  miteinander übereinstimmen. Damit entspricht die Bestimmung von  $L$  in (3.15) nunmehr dem Problem einer bildpunktweisen  $\ell_1$ -Distanzminimierung, deren Lösung bekanntermaßen durch den Median gegeben ist [BV04, S. 433].

Zusammenfassend bestimmt der Parameter  $\nu$  also den Detailgrad der Approximation von  $M$  durch  $L$ : Je dichter  $\nu$  an  $\|M - \bar{M}\|_*$  liegt, desto mehr Details der Spalten von  $M$  werden in  $L$  sichtbar. Je dichter  $\nu$  an 0 liegt, desto eher entsprechen die Spalten von  $L$  dem punktweisen Median der Bilddaten in  $M$ . In Bezug auf den Wert des Distanzmaßes (3.15) resultiert eine Variation von  $\nu$  im diskutierten Bereich augenscheinlich in einer linearen Skalierung, wie es Abbildung 11 zeigt.

### 3.2.3 Eigenschaften des Distanzmaßes

Ähnlich wie die beispielsweise die SSD (1.3) vergleicht das Distanzmaß (3.15) direkt die Intensitätswerte der Bilder  $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_N$ . Anders als informationstheoretisch motivierte Distanzmaße wie die Mutual Information (1.4) ist es daher ungeeignet für multimodale Bilddaten, das heißt für Aufnahmen aus verschiedenen Bildquellen.



**Abbildung 11:** Ergebnisse der vier Experimente aus Abb. 8 für das modifizierte Distanzmaß (3.15) mit interpolierten Testbildern  $\mathfrak{I}_1^{lin}$  und  $\mathfrak{I}_2^{lin}$  aus Abb. 9. In (11a), (11c) und (11d) entspricht der Index  $j = 0$  stets dem Fall, in dem sich  $\mathfrak{I}_1^{lin}$  komplett in  $\Omega$  befindet. In (11b) korrespondiert  $j = 0$  zu einem Rotationswinkel von  $0^\circ$ . Zusätzlich wurden  $\mathfrak{I}_1^{lin}$  und  $(\mathfrak{I}_2^{lin} \circ \mathbf{v}^j)$  für die Rotation kreisförmig maskiert, um für jeden Rotationswinkel übereinstimmende Bildbereiche zu gewährleisten. Die verschiedenfarbigen Plots korrespondieren zu unterschiedlichen Schwellwerten  $\nu$  in (3.15), gewählt als Anteile des Wertes  $\|M - \bar{M}\|_*$  für die Eingabedaten  $M$ . Im Unterschied zum ursprünglichen Distanzmaß (3.14) in Abb. 10 zeigt der modifizierte Term in (11a) für alle Schwellwerte  $\nu < \|M - \bar{M}\|_*$  ein klares globales Minimum bei korrekter Registrierung – selbiges gilt auch für die übrigen Versuche (11b), (11c) und (11d).

Wie sich weiterhin zeigt, erfasst (3.15) keine räumlichen Zusammenhänge in den Eingabebildern: Für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist  $\|A\|_1$  invariant unter Permutationen der Zeilen von  $A$ . Ist nämlich  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  eine entsprechende Permutationsmatrix, so folgt aus der Definition  $\|\cdot\|_1 := (\|\cdot\|_{\ell_1} \circ \text{vec})$  unmittelbar, dass  $\|A\|_1 = \|PA\|_1$  gilt. Eine analoge Aussage gilt auch für die nuclear norm  $\|A\|_*$ , denn ist  $A = U \text{diag}(\sigma(A))V^\top$  eine Singulärwertzerlegung von  $A$ , so ist  $(PU) \text{diag}(\sigma(A))V^\top$  aufgrund von

$$(PU)^\top (PU) = U^\top P^\top PU = U^\top U = I \quad (3.21)$$

eine SVD von  $(PA)$  mit denselben Singulärwerten  $\sigma(A)$ . Damit steht (3.15) im Gegensatz zu kantenbasierten Distanzmaßen wie der *Normalized Gradient Fields* (NGF) aus [Mod09, Kap. 7.4] oder ihrer gruppenweisen Verallgemeinerung aus [BWM18].

Das besondere Alleinstellungsmerkmal von (3.15) besteht stattdessen in der modifizierten Methodik der RPCA, die eine low-rank-/sparsity-Zerlegung der Eingabedaten

mit einer gruppenweisen Registrierung paart. Für diesbezügliche Experimente an synthetischen sowie an realen medizinischen Bilddaten sei auf Kapitel 5 verwiesen.

### 3.3 Regularisierung mit Totaler Variation

Zur Regularisierung des auf dem Distanzmaß (3.15) basierenden Registrierungsmodells dient in dieser Arbeit die *Totale Variation* (TV). Im Unterschied zu anderen gängigen Regularisierern der Bildregistrierung wie dem linearisierten elastischen Potential (1.5) oder dem diffusivem Regularisierer [Mod03, Kap. 11], die glatte Transformationen als Lösungen bevorzugen, zeichnet sich die Regularisierung mittels Totaler Variation dadurch aus, dass sie stückweise konstante Lösungen begünstigt. Die resultierenden Transformationen können also insbesondere Unstetigkeiten in Form von Sprungstellen aufweisen.

In der medizinischen Bildverarbeitung ist diese Eigenschaft insbesondere zur Modellierung von Gleitbewegungen (engl. *sliding motions*) geeignet: Bewegen sich zwei benachbarte anatomische Strukturen auf unterschiedliche Weise, so weist das zugehörige Bewegungsfeld an der Grenzfläche zwischen den Strukturen Unstetigkeiten auf. Ein gängiges Beispiel ist etwa die atembedingte Bewegung des Zwerchfells, das an den vergleichsweise starr gelegenen Brustkorb grenzt [PUZ<sup>+</sup>07]. Ebenso kann eine TV-Regularisierung zur Modellierung bewegter Objekte vor einheitlichem Hintergrund eingesetzt werden, weswegen sie auch zur Bestimmung des Optischen Flusses in der Computer Vision verwendet wird. Als dementsprechende Veröffentlichungen seien zum Beispiel [ZPB07] und [PBB<sup>+</sup>06] genannt. Anwendungen der Totalen Variation in der Bildregistrierung finden sich dagegen in [VGS<sup>+</sup>17] und [PUZ<sup>+</sup>07].

#### 3.3.1 Definition des TV-Regularisierers

Zunächst sei die Definition der Totalen Variation aus [AFP00] wiedergegeben.

##### **Definition 3.4** (*Totale Variation [AFP00, Def. 3.4 & Prop. 3.6]*)

Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ein offenes Gebiet mit stückweise glattem Rand  $\partial\Omega$ . Es sei zudem  $w = (w_1, \dots, w_k) \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^k)$ . Dann ist die Totale Variation von  $w$  auf  $\Omega$  gegeben durch

$$\text{TV}(w) := \sup \left\{ - \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} w_i(x) \operatorname{div}(\varphi_i)(x) \, dx \mid \varphi = [\varphi_1 | \dots | \varphi_k] \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times k}), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\}. \quad (3.22)$$

Dabei enthält  $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times k})$  alle stetig differenzierbaren Funktionen  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times k}$  mit kompaktem Träger in  $\Omega$ . Weiterhin ist  $\|\varphi\|_{\infty} := \sup_{x \in \Omega} \|\varphi(x)\|_F$  für  $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times k})$ .

Anschließend an (3.22) wird der Raum der Funktionen mit beschränkter Variation definiert als

$$\text{BV}(\Omega, \mathbb{R}^k) := \left\{ w \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^k) \mid \text{TV}(w) < \infty \right\}. \quad (3.23)$$

Was es mit der etwas technischen Definition (3.22) auf sich hat, offenbart sich in dem Fall, in dem  $w : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar ist – wohlgemerkt ist dies keine Voraussetzung, die in Definition 3.4 an  $w$  gestellt wurde. Wie sich nämlich zeigt, entspricht  $\text{TV}(w)$  in diesem Falle genau dem Ausdruck  $\int_{\Omega} \|\nabla w(x)\|_F dx$ , wobei als Konvention gilt, dass  $\nabla w(x) = [\nabla w_1(x) | \dots | \nabla w_k(x)] \in \mathbb{R}^{d \times k}$  ist.

Da die Frobeniusnorm aufgrund ihrer Verwandtschaft zur  $\ell_2$ -Norm  $\|\cdot\|_F = (\|\cdot\|_{\ell_2} \circ \text{vec})$  zu sich selbst dual ist – siehe hierzu auch Abschnitt 2.3 –, gilt zunächst einmal

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \|\nabla w(x)\|_F dx \\ &= \int_{\Omega} \sup_{\varphi(x) \in \mathbb{R}^{d \times k}} \{ \langle \text{vec}(\varphi(x)), \text{vec}(\nabla w(x)) \rangle \mid \|\varphi(x)\|_F \leq 1 \} dx. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Weiter ist es erlaubt, Supremum und Integration zu vertauschen und den Raum der Testfunktionen  $\varphi$  auf  $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times k})$  einzuschränken [AFP00, S. 117f.], woraus man erhält:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \|\nabla w(x)\|_F dx \\ &= \sup \left\{ \int_{\Omega} \langle \text{vec}(\varphi(x)), \text{vec}(\nabla w(x)) \rangle dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times k}), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$= \sup \left\{ \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} \langle \varphi_i(x), \nabla w_i(x) \rangle dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times k}), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\}. \quad (3.26)$$

Auf das Integral in (3.26) lässt sich nun noch der Satz von Gauß anwenden – siehe beispielsweise [BL11, Satz 2.74] – und es folgt

$$\int_{\Omega} \langle \varphi_i(x), \nabla w_i(x) \rangle dx = \int_{\partial\Omega} \langle w_i(x) \varphi_i(x), n(x) \rangle d\mathcal{H}^{d-1}(x) - \int_{\Omega} \text{div}(\varphi_i)(x) w_i(x) dx \quad (3.27)$$

für  $n(x)$  als äußere Normale von  $\Omega$  in  $x \in \partial\Omega$  und  $\mathcal{H}^{d-1}$  als  $(d-1)$ -dimensionales Hausdorff-Maß. Da alle  $\varphi_i$  in (3.26) einen in  $\Omega$  kompakten Träger aufweisen, verschwindet der Randterm in (3.27), sodass schließlich gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \|\nabla w(x)\|_F dx \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^k - \int_{\Omega} \text{div}(\varphi_i)(x) w_i(x) dx \mid \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^{d \times k}), \|\varphi\|_{\infty} \leq 1 \right\} \\ &= \text{TV}(w). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Als Regularisierer in der Bildregistrierung dient nun schlichtweg der Ausdruck  $\text{TV}(\mathbf{u})$ , angewendet auf ein Verschiebungsfeld  $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Im Sinne von Definition 3.4 gilt dabei  $k = d$  und im Folgenden noch genauer  $k = d = 2$ . Ein geeigneter Ansatzraum für das gruppenweise Registrierungsproblem (1.7) ist passenderweise durch  $\text{BV}(\Omega, \mathbb{R}^d)$  gegeben. Für das weitere Vorgehen wird zudem von Neumann-Randbedingungen für alle  $\mathbf{u}_i$  ausgegangen.



### 3.3.2 Diskretisierung

Der Einfachheit halber wird für die Diskretisierung der Totalen Variation von hier an der typische Fall eines rechteckigen Bildgebiet  $\Omega = (\omega^1, \omega^2) \times (\omega^3, \omega^4) \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\omega^1 < \omega^2$  und  $\omega^3 < \omega^4$  betrachtet. Das Diskretisierungsgitter  $X$  von Distanzmaß und Regularisierer sei dabei zellzentriert, es gelten also  $h_1 = (\omega^2 - \omega^1)/m_1$  und  $h_2 = (\omega^4 - \omega^3)/m_2$  für die Gitterweiten sowie  $x_{i_1, i_2} = (\omega^1 + (i_1 - 0.5)h_1, \omega^3 + (i_2 - 0.5)h_2)^\top$  für die Gitterpunktkoordinaten (mit  $1 \leq i_1 \leq m_1$  und  $1 \leq i_2 \leq m_2$ ).

Ausgangspunkt für die Diskretisierung von  $\text{TV}(\mathbf{u})$  ist der Ausdruck  $\int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}(x)\|_F dx$ , welcher im Folgenden mittels finiter Vorwärtsdifferenzen approximiert wird durch

$$h_1 h_2 \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \|(\nabla^h \mathbf{u})_{i_1, i_2}\|_F \quad \text{mit} \quad (\nabla^h \mathbf{u})_{i_1, i_2} = \begin{bmatrix} (\nabla_1^h \mathbf{u}_1)_{i_1, i_2} & (\nabla_1^h \mathbf{u}_2)_{i_1, i_2} \\ (\nabla_2^h \mathbf{u}_1)_{i_1, i_2} & (\nabla_2^h \mathbf{u}_2)_{i_1, i_2} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Unter Beachtung der Neumann-Randbedingungen gilt dabei

$$(\nabla_1^h w)_{i_1, i_2} = \frac{1}{h_1} \begin{cases} w(x_{i_1+1, i_2}) - w(x_{i_1, i_2}), & i_1 < m_1, \\ 0, & i_1 = m_1 \end{cases} \quad (3.30)$$

und analog

$$(\nabla_2^h w)_{i_1, i_2} = \frac{1}{h_2} \begin{cases} w(x_{i_1, i_2+1}) - w(x_{i_1, i_2}), & i_2 < m_2, \\ 0, & i_2 = m_2 \end{cases} \quad (3.31)$$

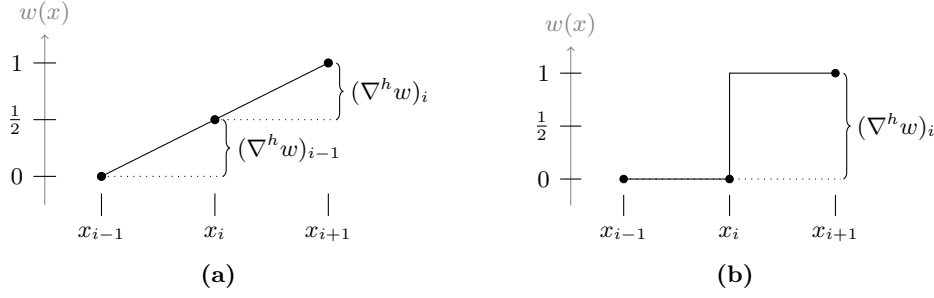
für  $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem zellzentrierten Gitter  $X$  der oben beschriebenen Bauart.

Es sei darauf hingewiesen, dass eine TV-Diskretisierung wie in (3.29) in der Literatur üblicherweise als *isotrop* bezeichnet wird und damit im Gegensatz zu *anisotropen* Diskretisierungen wie etwa

$$h_1 h_2 \sum_{j=1}^d \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \left\| \begin{pmatrix} (\nabla_1^h \mathbf{u}_j)_{i_1, i_2} \\ (\nabla_2^h \mathbf{u}_j)_{i_1, i_2} \end{pmatrix} \right\|_{\ell_1} \quad (3.32)$$

steht, die die  $d$  Koordinatenachsen getrennt behandeln. Wie in [VGS<sup>+</sup>17] festgestellt wurde, neigt letztere jedoch dazu, Transformationen  $\mathbf{u}$  entlang der Koordinatenachsen zu begünstigen und wird deswegen hier nicht verwendet.

Zum Abschluss des Abschnitts sei mittels der Diskretisierung noch ein Beispiel gegeben, das die anfängliche Behauptung illustriert, dass eine Regularisierung mittels Totaler Variation Unstetigkeiten in Form von Sprungstellen in der Lösung erlaube [LSKC13]. Es werde dazu der einfache Fall einer eindimensionalen Funktion  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und dreier äquidistanter Gitterpunkte  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  mit der Gitterweite  $h = 1$  betrachtet. Die Ableitung von  $w$  werde analog zu (3.30) und (3.31) durch Vorwärtsdifferenzen  $(\nabla^h w)$  diskretisiert. Weiterhin seien  $w(x_{i-1}) = 0$  und  $w(x_{i+1}) = 1$  bekannt. In Abhängigkeit von  $w(x_i)$  werden nun die Kosten eines diskretisierten TV-Terms  $|(\nabla^h w)_{i-1}| + |(\nabla^h w)_i|$  mit denen eines quadratischen Ausdrucks  $|(\nabla^h w)_{i-1}|^2 + |(\nabla^h w)_i|^2$  verglichen. Das mehrdimensionalen Analogon des letzteren Ausdrucks entspräche in der Bildregistrierung einem diffusiven Regularisierer. Veranschaulicht wird das Beispiel in Abbildung 12.



**Abbildung 12:** Illustration eines „0-1-Übergangs“. Links: für einen diskretisierten quadratischen Regularisierer  $|(\nabla^h w)_{i-1}|^2 + |(\nabla^h w)_i|^2$  ist ein glatter Übergang optimal. Rechts: ein diskretisierter TV-Regularisierer  $|(\nabla^h w)_{i-1}| + |(\nabla^h w)_i|$  erlaubt dagegen auch Sprungstellen.

Wie eine einfache Rechnung zeigt, ist  $w(x_i) = 1/2$  im quadratischen Fall die eindeutige optimale Lösung mit dem Wert  $(1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2$ . Dagegen zeigt sich im TV-Fall, dass jeder Wert  $w(x_i) \in [0, 1]$  die optimale Lösung von  $|w(x_i) - 0| + |1 - w(x_i)| = 1$  ergibt. Ein analoges Resultat gilt ebenso auf iterativ verfeinerten Gittern mit zusätzlichen Stützstellen in den Intervallen  $(x_{i-1}, x_i)$  und  $(x_i, x_{i+1})$ . Der quadratische Ausdruck bevorzugt also im Grenzfall eine glatte Lösung in Form einer Geraden. Für den TV-Ausdruck hingegen bleibt weiterhin jede Lösung aus monoton aufsteigenden Funktionswerten optimal, wobei insbesondere auch Sprünge erlaubt sind.

### 3.4 Zusammenfassung des Modells

Dieser Abschnitt enthält eine kurze Zusammenfassung des Registrierungsmodells, das durch das Distanzmaß aus Abschnitt 3.2 und den in Abschnitt 3.3 beschriebenen Regularisierer gegeben ist. Zudem wird die Frage der Eindeutigkeit einer Lösung diskutiert.

In der Standardform (1.7) eines gruppenweisen Registrierungsmodells ergibt sich für die Bilder  $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem Bildgebiet  $\Omega = (\omega^1, \omega^2) \times (\omega^3, \omega^4)$  mit zellzentriertem Diskretisierungsgitter  $X$  der Auflösung  $m_1 \times m_2$  das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \inf_{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N \in \text{BV}(\Omega, \mathbb{R}^2)} D(\mathfrak{T}_1 \circ (\text{id} + \mathbf{u}^1), \dots, \mathfrak{T}_N \circ (\text{id} + \mathbf{u}^N)) + \lambda \sum_{i=1}^N S(\mathbf{u}^i) \\ &= \inf_{\substack{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N \in \text{BV}(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ L \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N}}} \|M(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N) - L\|_1 + \delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}}(L - \bar{L}) + \lambda \sum_{i=1}^N \text{TV}(\mathbf{u}^i), \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei die Abhängigkeit des Distanzmaßes  $D$  von den Bildern  $\mathfrak{T}_1, \dots, \mathfrak{T}_N$  implizit durch die folgendermaßen definierte Datenmatrix gegeben ist:

$$M(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N) := [\text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_1 \circ (\text{id} + \mathbf{u}^1))) \mid \dots \mid \text{vec}(G_X(\mathfrak{T}_N \circ (\text{id} + \mathbf{u}^N)))]. \quad (3.34)$$

Als Modellparameter verbleiben der Gewichtungsfaktor  $\lambda > 0$  und der Schwellwert  $\nu > 0$ .

Im Unterschied zum einfachen Fall eines Zwei-Bilder-Problems (1.2) mit fester Referenz  $\mathfrak{R}$  besteht in (3.33) noch die Problematik einer möglichen Uneindeutigkeit der Lösung  $(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N)$ . Zur Illustration werde von dem einfachen Beispiel ausgegangen, dass die erfolgreich registrierten Bilder  $\mathfrak{T}_1 \circ (\text{id} + \mathbf{u}^1) = \dots = \mathfrak{T}_N \circ (\text{id} + \mathbf{u}^N)$  ein Rechteck  $\Xi = [\xi^1, \xi^2] \times [\xi^3, \xi^4] \subset \Omega$  mit  $\mathfrak{T}_i \circ (\text{id} + \mathbf{u}^i)(x) = 1$  für  $x \in \Xi$  zeigen. Auf dem Hintergrund  $(\Omega \setminus \Xi)$  gelte einheitlich  $\mathfrak{T}_i \circ (\text{id} + \mathbf{u}^i)(x) = 0$ . Dann ergibt sich für jede Translation  $t \in \mathbb{R}^2$ , für die noch  $\Xi + t \subset \Omega$  gilt, und für alle  $i = 1, \dots, N$  aus  $\hat{\mathbf{u}}^i := \mathbf{u}^i + t$  eine zu  $\mathbf{u}^i$  gleichwertige Lösung von (3.33).

Dies liegt zum einen daran, dass eine solche Verschiebung  $t$  aufgrund der Randbedingung für kontinuierliche Bilder (siehe Abschnitt 1.1) äquivalent zu einer Zeilenpermutation der Datenmatrix (3.34) ist und dass das verwendete Distanzmaß laut Abschnitt 3.2.3 unter derartigen Permutationen invariant ist. Zum anderen sind ableitungsbasierte Regularisierer wie die Totale Variation stets invariant gegenüber Translationen.

Um also den verbleibenden Freiheitsgrad einer konstanten Verschiebung aus (3.33) zu eliminieren, wird das Modell wie in [PKH<sup>+</sup>18] und [GHP<sup>+</sup>18] um die Nebenbedingung

$$\bar{\mathbf{u}}_j := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \mathbf{u}_j^i(x) \, dx = 0 \quad \text{für } j \in \{1, 2\} \quad (3.35)$$

ergänzt, sodass das finale Registrierungsmodell dem folgenden Ausdruck entspricht:

$$\inf_{\substack{\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N \in \text{BV}(\Omega, \mathbb{R}^2) \\ L \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times N}}} \|M(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N) - L\|_1 + \delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}}(L - \bar{L}) + \lambda \sum_{i=1}^N \text{TV}(\mathbf{u}^i) + \sum_{j=1}^2 \delta_{\{\bar{\mathbf{u}}_j = 0\}}(\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^N). \quad (3.36)$$



---

## Kapitel 4: Details der Implementierung

Dieses Kapitel befasst sich mit der numerischen Implementierung des in Kapitel 3 erarbeiteten Registrierungsmodells (3.36). Hierfür wird zunächst eine vollständige Diskretisierung dieses Modells besprochen (Abschnitt 4.1), aus der sich nach einer linearen Approximation des verwendeten Bildmodells (Abschnitt 4.2) ein endlichdimensionales und konvexes Optimierungsproblem ergibt, das mit dem Optimierungsverfahren aus Abschnitt 2.4 gelöst werden kann. Details hierzu finden sich in Abschnitt 4.3. Der letzte Abschnitt 4.4 dieses Kapitels diskutiert schließlich eine Multilevelstrategie, wie sie aus Effizienzgründen häufig in der Bildregistrierung eingesetzt wird.

### 4.1 Diskretisierung des Registrierungsmodells

Um aus (3.36) ein endlichdimensionales Optimierungsproblem zu erhalten, das sich numerisch lösen lässt, bedarf es offensichtlich noch einer Diskretisierung der Unbekannten  $u^1, \dots, u^N$  sowie der von ihnen abhängigen Ausdrücke. Sind die zu registrierenden Aufnahmen als diskrete Bilder  $T_1, \dots, T_N \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$  auf einem zellzentrierten Gitter  $X \in (\mathbb{R}^d)^{m_1 \times m_2}$  eines rechteckigen Bildbereiches  $\Omega$  gegeben, so sucht das diskretisierte Problem dementsprechend nach den optimalen Werten für die Verschiebungsfelder  $u^i$  an den Gitterpunkten  $x_{j_1, j_2}$ . Diese werden zusammengefasst in einem langen Spaltenvektor  $u^i = ((u_1^i)^\top, (u_2^i)^\top)^\top \in \mathbb{R}^{2m_1 m_2}$ , wobei für  $(j_1, j_2) \in \{1, \dots, m_2\} \times \{1, \dots, m_2\}$  gelte, dass  $(u_1^i)_{j_1 + (j_2 - 1)m_1} = u_1^i(x_{j_1, j_2})$  und  $(u_2^i)_{j_1 + (j_2 - 1)m_1} = u_2^i(x_{j_1, j_2})$  sind. Analog zur Unterscheidung zwischen diskreten und kontinuierlichen Bildern werden derartig diskretisierte Verschiebungsfelder im Unterschied zu fraktal notierten kontinuierlichen Feldern  $u^i$  mittels kursiver Kleinbuchstaben  $u^i$  gekennzeichnet.

Hieran anschließend werden für  $i = 1, \dots, N$  die Hilfsfunktionen  $\hat{T}_i : \mathbb{R}^{2m_1 m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_1 m_2}$  definiert, die ein diskretes Verschiebungsfeld  $u^i$  auf der linearen Interpolation eines diskreten Bildes  $T_i$  auswerten. Etwas genauer gilt also für  $1 \leq j_1 \leq m_1$  und  $1 \leq j_2 \leq m_2$ :

$$(\hat{T}_i(u^i))_k = \mathfrak{I}_i^{lin} \left( x_{j_1, j_2} + \begin{pmatrix} (u_1^i)_k \\ (u_2^i)_k \end{pmatrix} \right) \quad \text{mit} \quad k = j_1 + (j_2 - 1)m_1. \quad (4.1)$$

Der erste Summand von (3.36) wird damit diskretisiert zu  $\sum_{i=1}^N \|\hat{T}_i(u^i) - l_i\|_{\ell_1}$ , wobei  $l_i \in \mathbb{R}^{m_1 m_2}$  der  $i$ -ten Spalte der low-rank-Variable  $L$  entspricht.

Eine Diskretisierung der Totalen Variation wurde bereits in Unterabschnitt 3.3.2 diskutiert. Mit den Ableitungsoperatoren

$$D_1 := I_{m_2} \otimes \frac{1}{h_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}}, \quad D_2 := \frac{1}{h_2} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}} \otimes I_{m_1} \quad (4.2)$$

und

$$D := I_2 \otimes \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(4m_1m_2) \times (2m_1m_2)} \quad (4.3)$$

sowie der Definition

$$\|v\|_{2,1} := \sum_{i=1}^n \|(v_i, v_{i+n}, v_{i+2n}, v_{i+3n})^\top\| \text{ für } v \in \mathbb{R}^{4n} \quad (4.4)$$

lässt sich (3.29) nun in Abhängigkeit von  $u^i$  ausdrücken als  $h_1h_2\|Du^i\|_{2,1}$ .

Schließlich wird noch die Nebenbedingung  $\bar{u}_j = 0$  aus (3.35) für  $j \in \{1, 2\}$  diskretisiert:

$$\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{1}}, \underbrace{\begin{pmatrix} u_j^1 \\ \vdots \\ u_j^N \end{pmatrix}}_{=: u_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{m_1m_2} \sum_{i=1}^N (u_j^i)_k = 0. \quad (4.5)$$

Zusammengenommen ist die diskrete Entsprechung zum Registrierungsmodell (3.36) also gegeben durch

$$\inf_{\substack{u^1, \dots, u^N \in \mathbb{R}^{2m_1m_2} \\ l_1, \dots, l_N \in \mathbb{R}^{m_1m_2}}} \sum_{i=1}^N \|\hat{T}_i(u^i) - l_i\|_{\ell_1} + \delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}} \left( [l_1 | \dots | l_N] - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i \right) \cdot \mathbf{1}^\top \right) + \lambda \sum_{i=1}^N h_1h_2\|Du^i\|_{2,1} + \sum_{j=1}^2 \delta_{\{\langle \mathbf{1}, \cdot \rangle = 0\}}(u_j). \quad (4.6)$$

## 4.2 Definition einer konvexen Zielfunktion

Wie eingangs erwähnt, soll zur Lösung von (4.6) wieder der Algorithmus 1 dienen. Für diesen bedarf es nach den Abschnitten 2.3 und 2.4 einer Zielfunktion  $G(x) + F(Ax)$ , in der  $G$  und  $F$  eigentlich, unterhalbstetig und konvex sind. In (4.6) jedoch kann für den Term  $\|\hat{T}_i(u^i) - l_i\|_{\ell_1}$  keine Konvexität bezüglich  $u^i$  gewährleistet werden. Wie in den bereits erwähnten Veröffentlichungen [HP14], [PGW<sup>+</sup>10], [PUZ<sup>+</sup>07] und [ZPB07] wird das Bildmodell  $\hat{T}_i(u^i)$  daher im Folgenden durch eine lineare Approximation im Sinne einer Taylorapproximation erster Ordnung ersetzt. Linear-affine Funktionen sowie die Verkettung konvexer Funktionen mit linear-affinen Ausdrücken sind stets konvex – siehe hierzu Abschnitt 2.2 –, sodass sich auf diese Weise eine konvexe Approximation von (4.6) gewinnen lässt.

Ist nun  $\tilde{u}^i \in \mathbb{R}^{2m_1m_2}$  ein geeigneter Entwicklungspunkt, so gilt für nahegelegene Punkte  $u^i \in \mathbb{R}^{2m_1m_2}$  die Taylorapproximation

$$\hat{T}_i(u^i) \approx \hat{T}_i(\tilde{u}^i) + (\nabla \hat{T}_i(\tilde{u}^i))^\top (u^i - \tilde{u}^i), \quad (4.7)$$

wobei die Ableitung von  $\hat{T}_i$  (im Punkt  $\tilde{u}^i$ ) von der folgenden Gestalt ist:

$$(\nabla \hat{T}_i(\tilde{u}^i))^\top = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\hat{T}_i)_1}{\partial(u_1^i)_1}(\tilde{u}^i) & & \frac{\partial(\hat{T}_i)_1}{\partial(u_2^i)_1}(\tilde{u}^i) & & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \frac{\partial(\hat{T}_i)_{m_1 m_2}}{\partial(u_1^i)_{m_1 m_2}}(\tilde{u}^i) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\partial(\hat{T}_i)_{m_1 m_2}}{\partial(u_2^i)_{m_1 m_2}}(\tilde{u}^i) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_1 m_2) \times (2m_1 m_2)}. \quad (4.8)$$

Das resultierende konvexe Ersatzproblem für (4.6) ist daher

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u^1, \dots, u^N \in \mathbb{R}^{2m_1 m_2} \\ l_1, \dots, l_N \in \mathbb{R}^{m_1 m_2}}} & \sum_{i=1}^N \|\hat{T}_i(\tilde{u}^i) - (\nabla \hat{T}_i(\tilde{u}^i))^\top \tilde{u}^i + (\nabla \hat{T}_i(\tilde{u}^i))^\top u^i - l_i\|_{\ell_1} \\ & + \delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}} \left( |l_1| \dots |l_N| - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N l_i \right) \cdot \mathbf{1}^\top \right) + \lambda \sum_{i=1}^N h_1 h_2 \|Du^i\|_{2,1} \\ & + \sum_{j=1}^2 \delta_{\{\langle \mathbf{1}, \cdot \rangle = 0\}}(u_j). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Abkürzend werden im Folgenden auch die Notationen  $b_i := \hat{T}_i(\tilde{u}^i) - (\nabla \hat{T}_i(\tilde{u}^i))^\top \tilde{u}^i$  sowie  $b := (b_1^\top, \dots, b_N^\top)^\top$  für den konstanten Teil des  $\|\cdot\|_{\ell_1}$ -Terms verwendet.

### 4.3 Numerische Lösung in der Standardform

Das Problem (4.9) in den Variablen  $x = ((u^1)^\top, \dots, (u^N)^\top, l_1^\top, \dots, l_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{3Nm_1 m_2}$  lässt sich nun in der Standardform  $G(x) + F(Ax)$  eines konvexen Optimierungsproblems aus Abschnitt 2.3 ausdrücken. Dazu enthält  $F$  all diejenigen Terme, die eine lineare Transformation der primalen Variablen  $x$  einschließen und  $G$  enthält alle übrigen Terme. Definiert man den linearen Operator  $A \in \mathbb{R}^{(6Nm_1 m_2) \times (3Nm_1 m_2)}$  mit dem Zentrierungsoperator  $K \in \mathbb{R}^{(Nm_1 m_2) \times (Nm_1 m_2)}$  aus (3.16) durch

$$A = \begin{bmatrix} (\nabla \hat{T}_1(\tilde{u}^1))^\top & & & & -I_{m_1 m_2} & & & \\ & \ddots & & & & \ddots & & \\ & & (\nabla \hat{T}_N(\tilde{u}^N))^\top & & & & & -I_{m_1 m_2} \\ \hline & & & 0 & & & & K \\ \hline & & & & D & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & D & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

und  $F(((v^1)^\top, (v^2)^\top, (v^3)^\top)^\top) := F_1(v^1) + F_2(v^2) + F_3(v^3)$  durch

- $F_1 : \mathbb{R}^{Nm_1m_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_1(v^1) = \|v^1 + b\|_{\ell_1}$ ,
- $F_2 : \mathbb{R}^{Nm_1m_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_2(v^2) = \delta_{\{\|\cdot\|_* \leq \nu\}}(\text{vec}^{-1}(v^2))$ ,
- $F_3 : \mathbb{R}^{4Nm_1M_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F_3(v^3) = \lambda \sum_{i=1}^N h_1 h_2 \|(v_{(i-1)(m_1m_2)+1}^3, \dots, v_{i(m_1m_2)}^3)^\top\|_{2,1}$ ,

so deckt  $F(Ax)$  bereits die ersten drei Summanden von (4.9) ab.

Für  $G(x)$  verbleibt damit einzig der Ausdruck  $\sum_{j=1}^2 \delta_{\{(1,\cdot)=0\}}(u_j)$ . Dieser hängt wohl-gemerkt nur von  $u^1, \dots, u^N$  und nicht von  $l_1, \dots, l_N$  ab, was explizit in die folgende Definition eingeht: Es sei  $G(x) := G_1((u_1^\top, u_2^\top)^\top) + G_2((l_1^\top, \dots, l_N^\top)^\top)$  mit

- $G_1 : \mathbb{R}^{2Nm_1m_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G_1((u_1^\top, u_2^\top)^\top) := \sum_{j=1}^2 \delta_{\{(1,\cdot)=0\}}(u_j)$ ,
- $G_2 : \mathbb{R}^{Nm_1m_2} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G_2((l_1^\top, \dots, l_N^\top)^\top) := 0$ .

Sowohl  $F$  als auch  $G$  sind separabel in ihren primalen Variablen, sodass nach den Regeln aus Lemma 2.16 selbiges für ihre Konjugierten (in den dualen Variablen) gilt, das heißt also  $F^*(w) = F_1^*(w^1) + F_2^*(w^2) + F_3^*(w^3)$  und  $G^*(y) = G_1^*(y^1) + G_2^*(y^2)$ . Definiert man noch analog zu (4.4)

$$\|v\|_{2,\infty} := \max_{i=1,\dots,n} \|(v_i, v_{i+n}, v_{i+2n}, v_{i+3n})^\top\| \text{ für } v \in \mathbb{R}^{4n}, \quad (4.11)$$

so erhält man laut [CP11, Abs. 6.2.1] für  $F_3^*$  (neben den aus (3.17) und (3.18) bekannten Ausdrücken für  $F_1^*$  und  $F_2^*$ ):

- $F_1^*(w^1) = \delta_{\{\|\cdot\|_{\ell_\infty} \leq 1\}}(w^1) - \langle w^1, b \rangle$ ,
- $F_2^*(w^2) = \nu \|W^2\|_2$  mit  $W^2 := \text{vec}^{-1}(w^2)$ ,
- $F_3^*(w^3) = \sum_{i=1}^N \delta_{\{\|\cdot\|_{2,\infty} \leq \lambda h_1 h_2\}}(\underbrace{(w_{(i-1)(m_1m_2)+1}^3, \dots, w_{i(m_1m_2)}^3)^\top}_{=: w^{3,i}})$ .

Um die Konjugierten  $G_1^*$  und  $G_2^*$  zu bestimmen, bedarf es noch eines kurzen Lemmas.

**Lemma 4.1 (Konjugation des Indikators eines linearen Unterraums)**

Ist  $Z = \text{spann}\{z^1, \dots, z^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ein linearer Unterraum mit zugehörigem Orthogonalkomplement  $Z^\perp = \{a \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, z \rangle = 0 \ \forall z \in Z\}$ , so gilt  $\delta_Z \xrightarrow{*} \delta_{Z^\perp}$ .

**Beweis:** Zunächst einmal sind lineare Unterräume stets nichtleer, abgeschlossen und konvex. Da Indikatoren nichtleerer Mengen eigentliche Funktionen sind, ist  $f = \delta_Z$  nach Lemma 2.6 eigentlich, unterhalbstetig und konvex. Weiter gilt:

$$f^*(y) = \sup_{z \in \mathbb{R}^n} \langle y, z \rangle - f(z) = \sup_{z \in Z} \langle y, z \rangle.$$

Unter der Annahme, dass ein  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $\langle y, z^j \rangle \neq 0$  existiert, folgt

$$f^*(y) \geq \langle y, tz^j \rangle = t \langle y, z^j \rangle \ \forall t \in \mathbb{R}$$



und damit  $f^*(y) = \infty$ . Andernfalls gilt  $\langle y, z^j \rangle = 0$  für alle  $j = 1, \dots, k$  und damit  $y \in Z^\perp$ . Insbesondere ist in diesem Falle auch  $\langle y, z \rangle = 0$  für alle  $z \in Z$ , woraus  $f^*(y) = 0$  folgt. Unter Zuhilfenahme der obigen Überlegungen folgt die Behauptung.  $\blacksquare$

Im Falle von  $G_1$  sind  $\{\langle \mathbf{1}, \cdot \rangle = 0\}^\perp = \text{spann}\{\mathbf{1}\}$  zueinander orthogonale lineare Unterräume. Für  $G_2$  gilt mit  $0 \equiv \delta_{\mathbb{R}^{Nm_1m_2}}$  der Grenzfall  $(\mathbb{R}^{Nm_1m_2})^\perp = \{0\}$ . Insgesamt folgen damit aus Lemma 4.1:

- $G_1^*(y^1) = \sum_{j=1}^2 \delta_{\text{spann}\{\mathbf{1}\}}(y_j^1)$ ,
- $G_2^*(y^2) = \delta_{\{0\}}(y^2)$ .

Für  $j \in \{1, 2\}$  enthält  $y_j^1 \in \mathbb{R}^{Nm_1m_2}$  all diejenigen Einträge von  $y^1$ , die zur  $j$ -ten Koordinatenachse und damit zu den Indizes  $(2i + j - 3)(m_1m_2) + 1, \dots, (2i + j - 2)(m_1m_2)$  für alle  $i = 1, \dots, N$  gehören.

Analog zur Separabilität der Konjugierten  $F^*$  und  $G^*$  gilt nach Lemma 2.13 ein ähnliches Resultat für die benötigten Proximalabbildungen (mit  $\eta, \tau > 0$ ):

$$(\text{id} + \eta \partial F^*)^{-1}(w) = \begin{pmatrix} (\text{id} + \eta \partial F_1^*)^{-1}(w^1) \\ (\text{id} + \eta \partial F_2^*)^{-1}(w^2) \\ (\text{id} + \eta \partial F_3^*)^{-1}(w^3) \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

$$(\text{id} + \tau \partial G)^{-1}(x) = \begin{pmatrix} (\text{id} + \tau \partial G_1)^{-1}((u_1^\top, u_2^\top)^\top) \\ (\text{id} + \tau \partial G_2)^{-1}((l_1^\top, \dots, l_N^\top)^\top) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Für  $(\text{id} + \eta \partial F^*)^{-1}$  sind  $(\text{id} + \eta \partial F_1^*)^{-1}$  und  $(\text{id} + \eta \partial F_2^*)^{-1}$  wiederum aus (3.12) beziehungsweise aus (3.17) bekannt:

- $(\text{id} + \eta \partial F_1^*)^{-1}(w^1) = \Pi_{\mathcal{B}_\infty}(w^1 + \eta b)$ ,
- $(\text{id} + \eta \partial F_2^*)^{-1}(w^2) = U \text{diag}(\sigma(W^2) - (\eta\nu)\Pi_{\mathcal{B}_1}(\sigma(W^2)/(\eta\nu))) V^\top$

mit der Singulärwertzerlegung  $W^2 = U \text{diag}(\sigma(W^2)) V^\top$ . Die Proximalabbildung von  $F_3^*$  kann dagegen in [CP11, Abs. 6.2.1] nachgelesen werden – in etwaiger Analogie zu Anhang A.2 gilt dabei  $w^3 = (\text{id} + \eta \partial F_3^*)^{-1}(\tilde{w}^3)$  genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & (w_j^{3,i}, w_{j+m_1m_2}^{3,i}, w_{j+2m_1m_2}^{3,i}, w_{j+3m_1m_2}^{3,i})^\top \\ &= \frac{(\lambda h_1 h_2) (\tilde{w}_j^{3,i}, \tilde{w}_{j+m_1m_2}^{3,i}, \tilde{w}_{j+2m_1m_2}^{3,i}, \tilde{w}_{j+3m_1m_2}^{3,i})^\top}{\max\{(\lambda h_1 h_2), \|(\tilde{w}_j^{3,i}, \tilde{w}_{j+m_1m_2}^{3,i}, \tilde{w}_{j+2m_1m_2}^{3,i}, \tilde{w}_{j+3m_1m_2}^{3,i})^\top\|\}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

für alle  $i = 1, \dots, N$  und alle  $j = 1, \dots, (m_1m_2)$  richtig ist.

Bei den Proximalabbildungen von  $G_1$  und  $G_2$  handelt es sich nach Satz 2.12 um simple Projektionen auf lineare Unterräume:

- $(\text{id} + \tau \partial G_1)^{-1}((u_1^\top, u_2^\top)^\top) = (\Pi_{\{\langle \mathbf{1}, \cdot \rangle = 0\}}(u_1)^\top, \Pi_{\{\langle \mathbf{1}, \cdot \rangle = 0\}}(u_2)^\top)^\top$ ,
- $(\text{id} + \tau \partial G_2)^{-1}((l_1^\top, \dots, l_N^\top)^\top) = \Pi_{\mathbb{R}^{Nm_1m_2}}((l_1^\top, \dots, l_N^\top)^\top) = (l_1^\top, \dots, l_N^\top)^\top$ .

Mittels der in diesem Abschnitt diskutierten Ausdrücke lässt sich das linearisierte Problem (4.9) aus dem vorangegangenen Abschnitt nun numerisch mit dem Algorithmus 1 lösen. Wie dabei die zur Schrittweitenbestimmung benötigte Spektralnorm des Operators  $A$  aus (4.10) angenähert werden kann, wird in Unterabschnitt 4.3.2 beschrieben.

### 4.3.1 Äußere Iteration

Wohlgemerkt besteht aufgrund der linearen Approximation des Bildmodells noch eine andere zentrale Problematik in (4.9): Die Approximation (4.7) liefert nur auf einer kleinen Umgebung um den Entwicklungspunkt  $\tilde{u}^i$  verlässliche Werte und verliert mit dem Abstand  $\|\tilde{u}^i - u^i\|$  zunehmend an Güte. Aus diesem Grund wird die numerische Lösung von (4.6) noch um eine äußere Iteration über den Entwicklungspunkt ergänzt, wobei der jeweils neue Entwicklungspunkt  $\tilde{u}^i$  für alle  $i = 1, \dots, N$  aus der Lösung der vorangegangenen äußeren Iteration gewonnen wird.

Wie sich in Experimenten gezeigt hat, konnten die besten Ergebnisse zudem durch eine

---

#### Algorithmus 2: Äußeres Iterationsschema

---

**Eingabe** Diskrete Bilder  $T_1, \dots, T_N \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$

**Ausgabe** Diskrete Verschiebungsfelder  $u^1, \dots, u^N \in \mathbb{R}^{2m_1m_2}$  und  
low-rank-Anteile  $l_1, \dots, l_N \in \mathbb{R}^{m_1m_2}$  der registrierten Bilder

---

**Initialisierung** Wähle  $n_{outer} \in \mathbb{N}$  (Anzahl äußerer Iterationen),

$\lambda > 0$  (Gewichtung zwischen Bilddistanz und Regularisierung) und

$\nu_{factor} \in (0, 1)$  (Faktor zur Anpassung des Schwellwertes  $\nu$ )

**Setze**  $\bar{T} \leftarrow (\sum_{i=1}^N \frac{\text{vec}(T_i)}{N}) \cdot \mathbf{1}^\top \in \mathbb{R}^{(m_1m_2) \times N}$ ,  $\nu \leftarrow \|[\text{vec}(T_1) | \dots | \text{vec}(T_N)] - \bar{T}\|_*$

**Setze**  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^N \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{2m_1m_2}$  (Entwicklungspunkte für lineare Approximation)

**Setze**  $x_0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{3Nm_1m_2}$  (Startpunkt für primale Variablen) und

$w_0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{6Nm_1m_2}$  (Startpunkt für duale Variablen)

**Für**  $k = 1, \dots, n_{outer}$

**Aktualisiere**  $\nu \leftarrow \nu_{factor} \nu$

**Schätze**  $\|A\|_2$  (für  $A$  aus (4.10)) und wähle  $\eta, \tau > 0$  mit  $\eta\tau\|A\|_2^2 < 1$

**Löse** mit Alg. 1 das zu (4.9) äquivalente Sattelpunktproblem

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^{3Nm_1m_2}} \sup_{w \in \mathbb{R}^{6Nm_1m_2}} \{G(x) + \langle Ax, w \rangle - F^*(w)\}$$

    nach primalem Minimierer  $x^*$  und dualem Maximierer  $w^*$ .  $G$  und  $F$  seien wie in Abs. 4.3, Startpunkte seien  $x_0$  und  $w_0$ , Schrittweiten seien  $\eta$  und  $\tau$ .

**Aktualisiere**  $x_0 \leftarrow x^*$  und  $w_0 \leftarrow w^*$

**Aktualisiere**  $\tilde{u}^i \leftarrow u_i^*$  für  $i = 1, \dots, N$

    mit  $u_i^* = (x_{(2i-2)(m_1m_2)+1}^*, \dots, x_{(2i)(m_1m_2)}^*)^\top$

**Setze**  $u^i = u_i^*$ ,  $l_i = (x_{(2N+i-1)(m_1m_2)+1}^*, \dots, x_{(2N+i)(m_1m_2)}^*)^\top$  für  $i = 1, \dots, N$

---

graduelle Verkleinerung des Schwellwertparameter  $\nu$  über den Verlauf der äußeren Iteration erzielt werden. Ist genauer  $\nu_{final}$  derjenige Schwellwert, für den das Problem (4.6) letztlich gelöst werden soll, so sind die Anzahl  $n_{outer}$  der äußeren Iterationen und der Anpassungsfaktor  $\nu_{factor}$  so zu wählen, dass in der letzten äußeren Iteration gilt:

$$\nu = \nu_{factor}^{n_{outer}} \left\| [\text{vec}(T_1) | \dots | \text{vec}(T_N)] - \left( \sum_{i=1}^N \frac{\text{vec}(T_i)}{N} \right) \cdot \mathbf{1}^\top \right\|_* = \nu_{final}. \quad (4.15)$$

Zusammengefasst wird das Vorgehen in Algorithmus 2. Insbesondere sei angemerkt, dass die Entwicklungspunkte  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^N$  direkt in die Matrix  $A$  und auch in die Funktion  $F$  eingehen, was die neuerliche Schätzung von  $\|A\|_2$  und die neuerliche Lösung des Sattelpunktproblems in jeder Iteration bedingt.

### 4.3.2 Schätzung der Spektralnorm

Wie bereits mehrfach erwähnt, wird in Algorithmus 2 die Spektralnorm  $\|A\|_2$  zur Schrittlweitenbestimmung benötigt. Da  $A$  jedoch die Gradienten  $(\nabla \hat{T}_i(\tilde{u}^i))^\top$  enthält, die ihrerseits von den empirischen Bilddaten  $T_1, \dots, T_N$  abhängen, besteht keinerlei Möglichkeit, den Wert  $\|A\|_2$  analytisch zu bestimmen. Stattdessen wird hierzu ein einfaches numerisches Verfahren verwendet, das als *Potenzmethode* (engl. *power method*) bekannt ist. Dessen folgende Darstellung basiert auf [GVL96, Kap. 7.3.1] und [HJ12, Prob. 1.4.P7].

Die klassische Potenzmethode dient zunächst einmal dazu, den betragsmäßig größten Eigenwert einer quadratischen Matrix  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  zu ermitteln – vorausgesetzt  $B$  ist diagonalisierbar und besitzt genau einen Eigenwert von diesem Betrag. Ist  $v$  derjenige Eigenvektor von  $B$ , der zum betragsmäßig größten Eigenwert  $\lambda_{max}$  gehört, so konvergiert die Folge

$$z^{k+1} = B \left( \frac{z^k}{\|z^k\|} \right) \quad (4.16)$$

für alle Startpunkte  $z^0$  mit  $\langle z^0, v \rangle \neq 0$  gegen  $v$ . Wegen  $z^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v$  und  $Bv = \lambda_{max}v$  gilt dabei

$$\|z^{k+1}\| = \left\| B \left( \frac{z^k}{\|z^k\|} \right) \right\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \left\| B \left( \frac{v}{\|v\|} \right) \right\| = \left\| \lambda_{max} \frac{v}{\|v\|} \right\| = |\lambda_{max}|. \quad (4.17)$$

Um nun die Spektralnorm einer nichtquadratischen Matrix  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m \geq n$  zu bestimmen, betrachtet man die Matrix  $C^\top C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Ist nämlich  $C = U\Sigma V^\top$  eine Singulärwertzerlegung von  $C$  mit  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , so ist

$$C^\top C = V\Sigma^\top U^\top U\Sigma V^\top = V \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2) V^{-1} \quad (4.18)$$

aufgrund der Orthonormalität von  $U$  und  $V$  eine Diagonalisierung von  $C^\top C$  mit betragsmäßig größtem Eigenwert  $\lambda_{max}(C^\top C) = \sigma_1^2$ . Gilt zusätzlich  $\sigma_1 > \sigma_2$ , dann konvergiert der Ausdruck  $\|z^{k+1}\|$  aus (4.17) nach der obigen Diskussion für  $B = C^\top C$  gegen den Wert  $\sigma_1^2$ , dessen Quadratwurzel laut Unterabschnitt 3.1.1 genau der gesuchten Spektralnorm  $\|C\|_2$  entspricht.

#### 4.4 Multilevelstrategie

Dieser Abschnitt beschäftigt sich zum Abschluss des Kapitels mit einer Multilevelstrategie für das zuvor diskutierte Lösungsverfahren für (4.6). Multilevelstrategien sind eine gängige Technik in der Bildregistrierung – siehe beispielsweise [Mod09, Kap. 9.4] – und ihre grobe Idee besteht darin, ein diskretes Registrierungsproblem zunächst auf (mehrfach) verringerter Auflösung zu lösen und die ermittelten Transformationen schrittweise auf die nächsthöheren Auflösungsstufen zu propagieren. Dort dienen diese dann als Startwerte für die erneute Optimierung.

Derartige Schemata haben den Vorteil, dass auf den höheren Auflösungsstufen in der Regel nur noch Feinanpassungen des Startwertes und damit wenige Iterationen des Optimierungsverfahrens nötig sind. Weiterhin haben sich Multilevelstrategien als hilfreich bei der Vermeidung lokaler Minima erwiesen – zur Illustration der Problematik sei an Abbildung 1 erinnert, in der jede Situation, in der mindestens ein Finger in  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{T} \circ (\text{id} + u)$  überlappt, ein lokales Minimum darstellt.

---

#### Algorithmus 3: Multilevelstrategie

---

**Initialisierung** Wähle  $\lambda > 0$  und  $n_{outer}^j \in \mathbb{N}$ ,  $\nu_{factor}^j \in (0, 1)$  für  $j = 1, \dots, n_{lev}$

**Setze**  $\bar{T} \leftarrow (\sum_{i=1}^N \frac{\text{vec}(T_i^1)}{N}) \cdot \mathbf{1}^\top \in \mathbb{R}^{(m_1^1 m_2^1) \times N}$ ,  $\nu \leftarrow \|[\text{vec}(T_1^1) | \dots | \text{vec}(T_N^1)] - \bar{T}\|_*$

**Setze**  $\tilde{u}^1, \dots, \tilde{u}^N \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{2m_1^1 m_2^1}$

**Setze**  $x_0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{3Nm_1^1 m_2^1}$ ,  $w_0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{6Nm_1^1 m_2^1}$

**Für**  $j = 1, \dots, n_{lev}$

**Für**  $k = 1, \dots, n_{outer}^j$

**Aktualisiere**  $\nu \leftarrow \nu_{factor}^j \nu$

**Schätze**  $\|A\|_2$ , wähle  $\eta, \tau > 0$  mit  $\eta\tau \|A\|_2^2 < 1$

**Löse** mit Alg. 1 das Sattelpunktproblem (siehe Abs. 4.3 für  $F$  und  $G$ )

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^{3Nm_1^j m_2^j}} \sup_{w \in \mathbb{R}^{6Nm_1^j m_2^j}} \{G(x) + \langle Ax, w \rangle - F^*(w)\}$$

für  $T_1^j, \dots, T_n^j \in \mathbb{R}^{m_1^j \times m_2^j}$  nach  $x^*$  und  $w^*$ . Startpunkte seien  $x_0$  und  $w_0$ , Schrittweiten seien  $\eta$  und  $\tau$ .

Für das Ergebnis gilt  $x^* = ((u_1^*)^\top, \dots, (u_N^*)^\top, (l_1^*)^\top, \dots, (l_N^*)^\top)^\top$ .

**Aktualisiere**  $x_0 \leftarrow x^*$ ,  $w_0 \leftarrow w^*$

**Aktualisiere**  $\tilde{u}^i \leftarrow u_i^*$  für  $i = 1, \dots, N$

**Prolongation**  $u_i^* \rightarrow U_i \in \mathbb{R}^{2m_1^{j+1} m_2^{j+1}}$ ,  $l_i^* \rightarrow L_i \in \mathbb{R}^{m_1^{j+1} m_2^{j+1}}$  für  $i = 1, \dots, N$

**Setze**  $x_0 \leftarrow (U_1^\top, \dots, U_N^\top, L_1^\top, \dots, L_N^\top)^\top \in \mathbb{R}^{3Nm_1^{j+1} m_2^{j+1}}$ ,  
 $w_0 \leftarrow 0 \in \mathbb{R}^{6Nm_1^{j+1} m_2^{j+1}}$

**Setze**  $\tilde{u}^i \leftarrow U_i \in \mathbb{R}^{2m_1^{j+1} m_2^{j+1}}$  für  $i = 1, \dots, N$

**Aktualisiere**  $\nu \leftarrow 2\nu$

---

Im Falle des hiesigen Registrierungsmodells ergeben sich durch den Entwicklungspunkt der linearen Approximation und durch die dualen Variablen zwei zusätzliche Faktoren, die beim Entwurf einer Multilevelstrategie zu beachten sind. Eher als ein heuristischer, denn als ein theoretisch begründeter Ansatz diene in dieser Arbeit nun eine Modifikation des Schemas aus Algorithmus 2, dargestellt in Algorithmus 3.

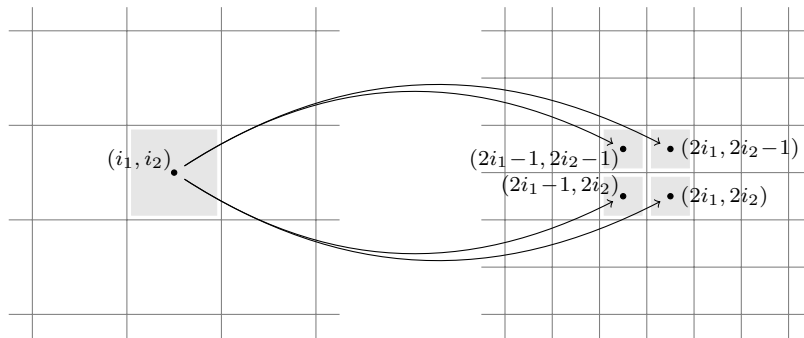
Für  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n_{lev}$ ,  $m_1^j = m_1/2^{(n_{lev}-j)}$  und  $m_2^j = m_2/2^{(n_{lev}-j)}$  bezeichnet  $T_i^j \in \mathbb{R}^{m_1^j \times m_2^j}$  darin das  $j$ -fache Downsampling des diskreten Eingabebildes  $T_i$ . Der Einfachheit halber werde von dem Falle ausgegangen, in dem sowohl  $m_1$  als auch  $m_2$  durch  $2^{(n_{lev}-1)}$  teilbar sind. Das Downsampling werde durch eine einfache Mittelung über disjunkte Pixelblöcke der Größe  $2 \times 2$  realisiert.

Die in Algorithmus 3 dargestellte Strategie besteht also darin, die Prolongation der primalen Variablen, die die gesuchten Verschiebungsfelder und low-rank-Anteile beschreiben, zur Definition eines primalen Startpunktes  $x_0$  und zur Definition geeigneter Entwicklungspunkte  $\tilde{u}^i$  auf der nächsthöheren Auflösungsstufe zu nutzen. Aufgrund der ungeklärten Interpretation der dualen Variablen wird der Startpunkt  $w_0$  beim Übergang zwischen zwei Auslösungen schlichtweg mit 0 überschrieben.

#### 4.4.1 Prolongation

Die Prolongation selbst erfolgt invers zur  $(2 \times 2)$ -Blockmittelung des Downsamplings: Der Wert einer Variable an der Koordinate  $(i_1, i_2) \in \{1, \dots, m_1^j\} \times \{1, \dots, m_2^j\}$  wird im höher aufgelösten Koordinatensystem  $\{1, \dots, m_1^{j+1}\} \times \{1, \dots, m_2^{j+1}\}$  für alle Variablen übernommen, die zu den Koordinaten  $(2i_1 - 1, 2i_2 - 1)$ ,  $(2i_1, 2i_2 - 1)$ ,  $(2i_1 - 1, 2i_2)$  und  $(2i_1, 2i_2)$  gehören, – siehe hierzu auch Abbildung 13.

Um trotz veränderter Auflösung und prolongierter Variablen eine konsistente Diskretisierung zu gewährleisten, werden parallel zur oben beschriebenen Prolongation der Variablen die Gitterweiten  $h_1$  und  $h_2$  angepasst. Damit für  $\Omega = (\omega^1, \omega^2) \times (\omega^3, \omega^4)$  sowohl  $\omega^2 - \omega^1 = m_1^j h_1^j$  als auch  $\omega^4 - \omega^3 = m_2^j h_2^j$  für alle  $j = 1, \dots, n_{lev}$  gelten, folgen



**Abbildung 13:** Illustration der Prolongation. Der Wert einer Variable an der Stelle  $(i_1, i_2)$  des grob aufgelösten Gitters  $\{1, \dots, m_1\} \times \{1, \dots, m_2\}$  (links) wird auf dem feiner aufgelösten Gitter  $\{1, \dots, 2m_1\} \times \{1, \dots, 2m_2\}$  (rechts) für die Variablen an den Koordinaten  $(2i_1 - 1, 2i_2 - 1)$ ,  $(2i_1, 2i_2 - 1)$ ,  $(2i_1 - 1, 2i_2)$  und  $(2i_1, 2i_2)$  übernommen.

aus  $m_1^{j+1} = 2m_1^j$  und  $m_2^{j+1} = 2m_2^j$  die Zusammenhänge  $h_1^{j+1} = h_1^j/2$  und  $h_2^{j+1} = h_2^j/2$  für die Gitterweiten.

#### 4.4.2 Anpassung des Schwellwertes

Im Zuge des Übergangs zur nächsthöheren Auflösungsstufe in Algorithmus 3 bedarf es zudem einer konsistenten Normierung des Schwellwertes  $\nu$ . Im Folgenden soll kurz die Wahl des Faktors 2 in der letzten Zeile des Algorithmus motiviert werden:

Angenommen eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m > n$  besitze die ökonomische Singulärwertzerlegung  $M = U\Sigma V^\top$  – es gelten also  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sowie  $\|M\|_* = \sum_{i=1}^n \sigma_i$ , dann lässt sich unmittelbar folgern:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M \\ M \\ M \\ M \end{bmatrix}}_{=: \hat{M}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U \\ U \\ U \\ U \end{bmatrix}}_{=: \hat{U}} \Sigma V^\top. \quad (4.19)$$

Dabei ist  $\hat{U}$  zwar noch orthogonal mit  $(\hat{U}^\top \hat{U})_{i,j} = 0$  für  $i \neq j$ , aber nicht mehr orthogonal, denn als Resultat der Normierung der Spalten von  $U$  gilt nun  $(\hat{U}^\top \hat{U})_{i,i} = 4$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Eine Normierung von  $\hat{U}$  ergibt daher  $\hat{M} = (\hat{U}/2)(2\Sigma)V^\top$  als (ökonomische) Singulärwertzerlegung von  $\hat{M}$ . Demzufolge gilt auch  $\|\hat{M}\|_* = 2\|M\|_*$ .

Im Falle von Algorithmus 3 verhält sich die Matrix  $[l_1^* | \dots | l_n^*]$  bis auf eine Zeilenpermutation ebenso zu der Matrix  $[L_1 | \dots | L_N]$  wie sich  $M$  in (4.19) zu  $\hat{M}$  verhält. Da Zeilenpermutationen wie in Unterabschnitt 3.2.3 dargestellt keinen Einfluss auf die Singulärwerte einer Matrix haben, gilt damit

$$\|[L_1 | \dots | L_N]\|_* = 2\|[l_1^* | \dots | l_n^*]\|_*, \quad (4.20)$$

was den Faktor von 2 erklärt.

#### 4.4.3 Parameterwahl

Die in Algorithmus 3 dargestellte Multilevelstrategie bietet mit den Parametern  $n_{outer}^j$  und  $\nu_{factor}^j$  für  $j = 1, \dots, n_{lev}$  augenscheinlich eine hohe Anzahl an Freiheitsgraden. Um wie im äußeren Iterationsschema aus Algorithmus 2 einen vorgegebenen Schwellwert  $\nu_{final}$  bezüglich des Registrierungsproblems (4.6) für die Bilder  $T_1, \dots, T_N$  einzuhalten, ergeben sich daher verschiedene denkbare Strategien. In Anlehnung an (4.15) und unter Beachtung des im vorigen Unterabschnitt 4.4.2 hergeleiteten Normierungsfaktors sind die Parameter  $n_{outer}^j$  und  $\nu_{factor}^j$  also so zu wählen, dass in der letzten äußeren Iteration (auf voller Auflösung) gilt:

$$\begin{aligned} \nu &= \left( 2^{(n_{lev}-1)} \prod_{j=1}^{n_{lev}} (\nu_{factor}^j)^{n_{outer}^j} \right) \left\| [\text{vec}(T_1^1) | \dots | \text{vec}(T_N^1)] - \left( \sum_{i=1}^N \frac{\text{vec}(T_i^1)}{N} \right) \cdot \mathbf{1}^\top \right\|_* \\ &= \nu_{final}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Da sich im Laufe dieser Arbeit keine Strategie zur Parameterwahl als eindeutig überlegen erwiesen hat, seien an dieser Stelle stattdessen beispielhaft zwei Strategien genannt, die immerhin die Notwendigkeit eines kompletten äußeren Iterationsschemas im Sinne von Algorithmus 2 auf der vollen Auflösung  $m_1 \times m_2$  eliminieren.

Die erste und naheliegendste der beiden besteht darin, das Registrierungsproblem zunächst komplett auf der niedrigsten Auflösung zu lösen, das heißt also  $\nu_{factor}^1 < 1$  und  $n_{outer}^1$  so zu wählen, dass

$$(\nu_{factor}^1)^{n_{outer}^1} = \frac{\nu_{final}}{2^{(n_{lev}-1)}}$$

gilt. Anschließend wird für jede weitere Auflösungsstufe nur je eine äußere Iteration bei (relativ gesehen) unverändertem Schwellwert ausgeführt. Demzufolge gilt also  $n_{outer}^j = 1$  und  $\nu_{factor}^j = 1$  für alle  $j \geq 2$ , womit (4.21) zum Ende von Algorithmus 3 erfüllt ist.

Die zweite Strategie wählt dagegen  $\nu_{factor}^1 = \nu_{factor}^2 = \dots = \nu_{factor}^{n_{lev}} < 1$  für alle Auflösungsstufen und verkleinert den Schwellwert  $\nu$  damit auch auf den höheren Auflösungen. Damit (4.21) eingehalten wird, sind die Anzahlen  $n_{outer}^1, \dots, n_{outer}^{n_{lev}}$  äußerer Iterationen so zu wählen, dass letztlich

$$\prod_{j=1}^{n_{lev}} (\nu_{factor}^j)^{n_{outer}^j} = (\nu_{factor}^1)^{\sum_{j=1}^{n_{lev}} n_{outer}^j} = \frac{\nu_{final}}{2^{(n_{lev}-1)}}$$

gilt. Um teure Berechnungen auf den hohen Auflösungen einzusparen, empfiehlt es sich dabei, den Großteil der benötigten äußeren Iterationen der niedrigsten Auflösung  $n_{outer}^1$  zuzuweisen und  $n_{outer}^j$  für  $j \geq 2$  kleinzuhalten.





---

## Kapitel 5: Ergebnisse

Das folgende Kapitel behandelt zwei Beispiele gruppenweiser Bildregistrierungen mittels des in Kapitel 3 beschriebenen Modells und der in Kapitel 4 diskutierten Implementierung.

Das erste Beispiel behandelt rein synthetische Bilddaten und überprüft in erster Linie, inwieweit das Modell in der Lage ist, ein plausibles und dabei möglichst niedrigdimensionales Registrierungsergebnis für eine geeignete Bildsequenz zu ermitteln. Weiterhin dient das Beispiel zur Illustration der Regularisierung mittels Totaler Variation.

Das zweite Beispiel dagegen behandelt reale medizinische Bilddaten aus der kardialen Magnetresonanztomographie und zeigt, wie das Modell für praktische Zwecke zur Bewegungskorrektur in Cine-Sequenzen eingesetzt werden kann. Ebenso illustriert dieser Datensatz die Zerlegung des Registrierungsergebnisses in low-rank- und sparsity-Anteile  $L$  und  $E$ .

Die im Rahmen dieser Arbeit entstandene Implementierung erfolgte in MATLAB und ist frei zugänglich einsehbar unter

<https://github.com/roland1993/MA>.

Die angegebenen Laufzeiten aller Experimente beziehen sich auf eine Hardware mit den folgenden Spezifikationen:

- Betriebssystem: Linux 64 Bit,
- CPU: Intel Core i7-4770 (4 Kerne  $\times$  3.40 GHz),
- Arbeitsspeicher: 8 GB,
- MATLAB-Version R2018b.

### 5.1 Synthetische Bilddaten

Der synthetische Datensatz besteht aus insgesamt zehn Bildern  $T_1, \dots, T_{10} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$  der Auflösung  $m_1 = m_2 = 200$ . Vor einheitlich schwarzem Hintergrund zeigt dieser zwei starre Objekte in Form eines weißen Rahmens und eines weißen Rechtecks sowie ein bewegtes Objekt in Form einer Ellipse. Letztere beschreibt über den Verlauf der zehn Bilder eine halbkreisförmige Bewegung, wobei im Inneren der Ellipse jeweils eines von zwei Mustern zu sehen ist: Alle Bilder mit einem ungeradem Index zeigen ein Muster aus zwei vertikalen Streifen, während die übrigen Bilder zwei horizontale Streifen zeigen. Repräsentativ sind in der obersten Zeile von Abbildung 14 die Einzelbilder  $T_1$ ,  $T_4$ ,  $T_7$  und  $T_{10}$  abgebildet.

Intuitiv bestünde ein optimales Registrierungsergebnis für diese Daten darin, dass alle Ellipsen derart verschoben werden, dass sie in jedem Bild dieselbe Position innerhalb des Bildbereiches einnehmen. Am besten wird dies durch eine stückweise konstante Verschiebung beschrieben, was die Verwendung eines TV-Regularisierers rechtfertigt. Zudem sollte das Registrierungsergebnis, im Folgenden etwas nachlässig ausgedrückt

als  $T_i \circ (\text{id} + u^i)$  für  $i = 1, \dots, 10$ , aufgrund der synthetischen Natur der Eingabedaten fehlerfrei durch die zugehörigen low-rank-Komponenten  $l_i$  beschrieben werden können. Aufgrund der zwei verschiedenen Streifenmuster ist dabei ein Rang von zwei für die Matrix  $L = [l_1 | \dots | l_{10}]$  zu erwarten.

### Auswertung der Registrierung

Gelöst wurde das Registrierungsproblem mit der Multilevelstrategie aus Algorithmus 3, wobei die unterste der drei verwendeten Auflösungsstufen einer Auflösung von  $50 \times 50$  Bildpunkten entsprach. Die freien Parameter wurden in Anlehnung an Strategie 2 aus Unterabschnitt 4.4.3 und nach manueller Optimierung wie folgt gewählt:

- $\lambda = 0.2$  (Gewichtung zwischen Bilddistanz und Regularisierer),
- $n_{outer}^1 = 16$ ,  $n_{outer}^2 = n_{outer}^3 = 2$  (äußere Iterationen pro Auflösungsstufe),
- $\nu_{factor}^1 = \nu_{factor}^2 = \nu_{factor}^3 = 0.9$  (Verkleinerungsfaktor des Schwellwertes  $\nu$ ).

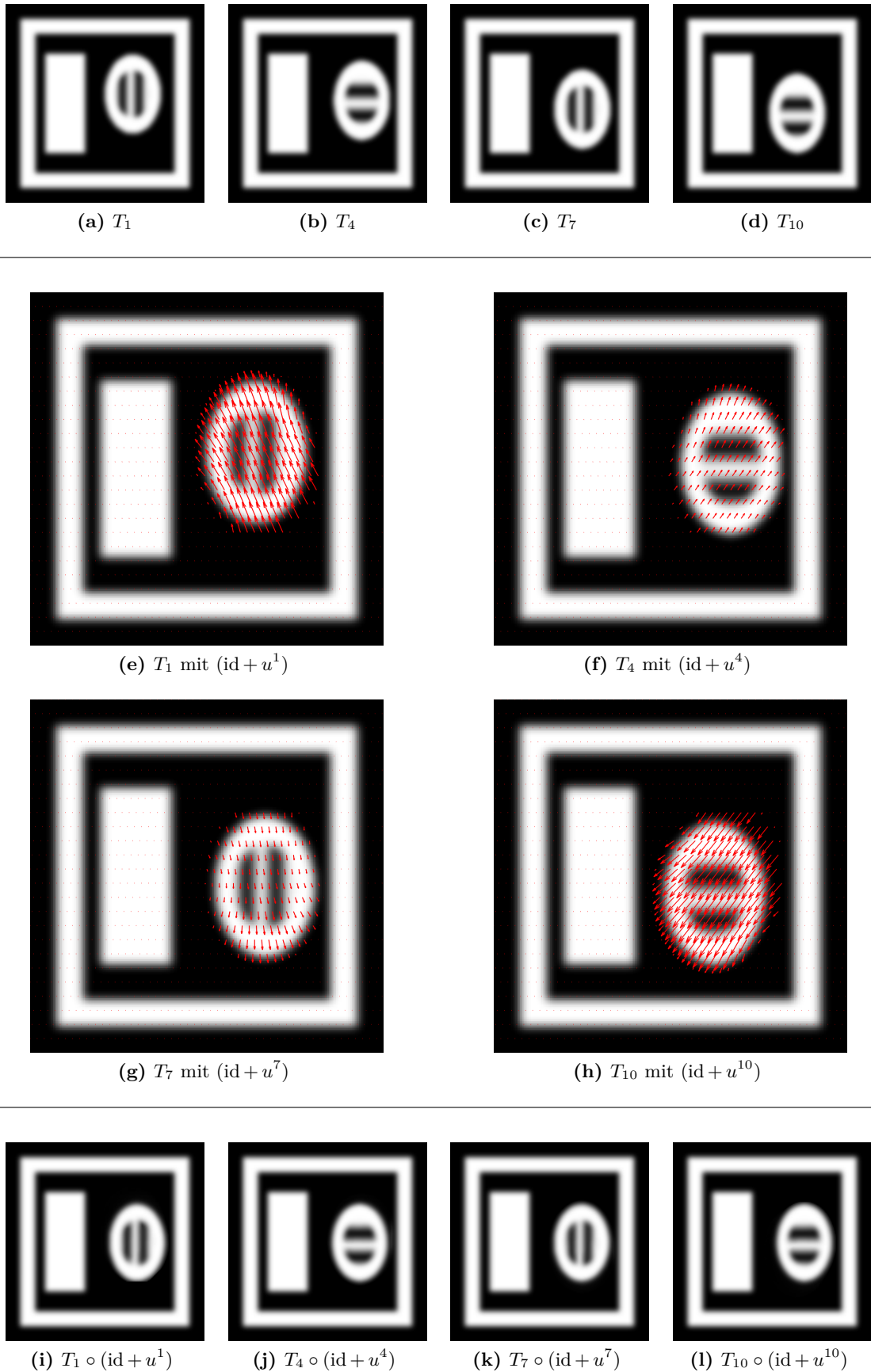
Weiterhin wurde eine Toleranz von  $\gamma = 10^{-3}$  für das Abbruchkriterium (2.39) sowie eine maximale Anzahl von 2000 inneren Iterationsschritten (pro äußerer Iteration) verwendet. Primale und duale Schrittweiten  $\eta$  und  $\tau$  wurde nach Schätzung der Spektralnorm  $\|A\|_2$  gewählt als  $\eta = \tau = \|A\|_2^{-1}$ . Daraus resultierte auf dem oben angegebenen System eine Rechenzeit von etwa 27 Minuten.

Das Ergebnis für die ausgewählten Einzelbilder mit den Indizes 1, 4, 7 und 10 ist in den unteren zwei Abschnitten von Abbildung 14 zu sehen: (14e), (14f), (14g) und (14h) zeigen nochmals die Eingabebilder, nun aber inklusive der ermittelten Verschiebungen  $u^i$  in Pfeildarstellung. Die hieraus resultierenden transformierten Bilder  $T_i \circ (\text{id} + u^i)$  sind in (14i), (14j), (14k) und (14l) abgebildet.

Wie man gut erkennt, wurde sowohl die Forderung nach einer einheitlichen Position der Ellipsen in den registrierten Aufnahmen als auch die Forderung nach stückweise konstanten Verschiebungsfeldern erfolgreich eingehalten. Insbesondere sei darauf hingewiesen, dass die Registrierung dabei die Streifenmuster intakt belassen hat, dass horizontale und vertikale Streifen also nicht noch zusätzlich aneinander angeglichen wurden.

Weiteren Aufschluss über die lineare Abhängigkeitsstruktur des berechneten low-rank-Anteils  $L$  gibt Abbildung 15. In (15a) sind zunächst die einzelnen Singulärwerte der Matrix  $\tilde{L} = L - \bar{L}$  sowie ihre Summe (der Wert  $\|\tilde{L}\|_*$ ) am Ende jeder äußeren Iteration aufgetragen. Gut zu erkennen ist, dass in der letzten Iteration nahezu  $\|\tilde{L}\|_* = \sigma_1$  gilt. Dies lässt sich derart interpretieren, dass sich die Matrix  $\tilde{L}$  annähernd vollständig aus ihrem ersten Singulärvektor rekonstruieren lässt. Als Singulärvektoren werden dabei die Spalten von  $U$  in einer Singulärwertzerlegung  $\tilde{L} = U \text{diag}(\sigma(\tilde{L})) V^T$  bezeichnet. Die ersten beiden Singulärvektoren von  $\tilde{L}$  sind in (15c) und (15d) als Bilder dargestellt.

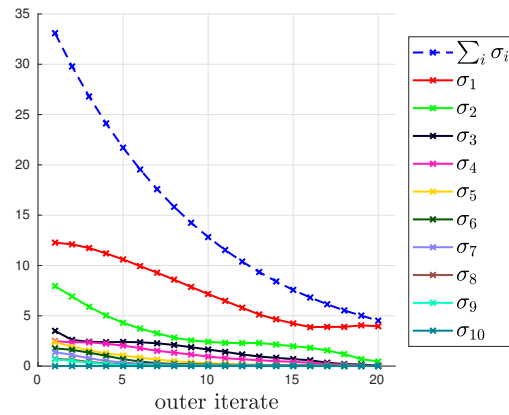
Zusammen mit dem Vektor  $\bar{l}$ , der durch das Mittelwertbild (15b) von  $L$  gegeben ist, bildet der erste Singulärvektor von  $\tilde{L}$  nun eine Basis, in der sich die Spalten von  $L$  weitestgehend fehlerfrei rekonstruieren lassen. Je nachdem, ob horizontale oder vertikale Streifen rekonstruiert werden sollen, wird der Singulärvektor aus (15c) zu  $\bar{l}$  hinzuaddiert



**Abbildung 14:** Registrierung des synthetischen Datensatzes für die ausgewählten Einzelbilder  $T_1$ ,  $T_4$ ,  $T_7$  und  $T_{10}$ . Die Darstellung ist dreigeteilt: Im oberen Drittel sind die Eingabebilder abgebildet. Im mittleren Drittel wurden diese um die ermittelten Verschiebungsfelder  $u^i$  in Pfeildarstellung ergänzt. Im unteren Drittel folgen die Auswertungen der Verschiebungsfelder auf den jeweiligen Eingabebildern, also die eigentlichen Registrierungsergebnisse. Zu erkennen ist, dass erfolgreich stückweise konstante Transformationen ermittelt wurden, die die verschiedenen Positionen der Ellipse in den Einzelbildern vereinheitlichen.

oder von  $\bar{l}$  abgezogen. Offenbar hat diese Basis auch den erwarteten Rang von zwei.

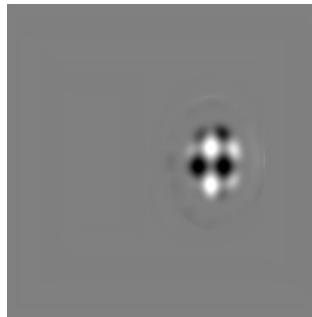
Im zweiten Singulärvektor (15d) sind dagegen nur Überreste von Bewegungsartefakten und keine strukturellen Bildinformationen mehr zu erkennen, die für die Beschreibung von  $L$  tatsächlich relevant wären. Aufgrund des vergleichsweise verschwindend kleinen Singulärwertes ist der Einfluss dieses Singulärvektors sowie der aller weiteren als vernachlässigbar anzusehen.



(a) Entwicklung der Singulärwerte von  $L - \bar{L}$  über Verlauf der äußeren Iterationen



(b) Mittelwert  $\bar{l} = \sum_{i=1}^N \frac{l_i}{N}$

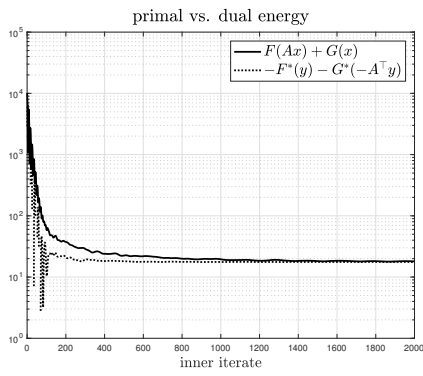


(c) 1. Singulärvektor von  $L - \bar{L}$

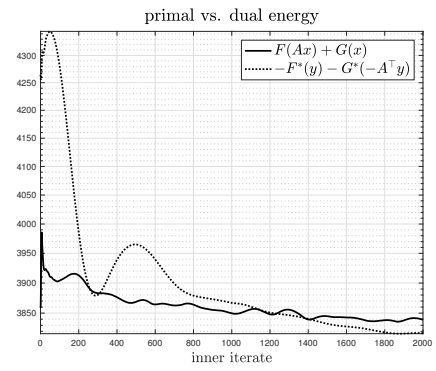


(d) 2. Singulärvektor von  $L - \bar{L}$

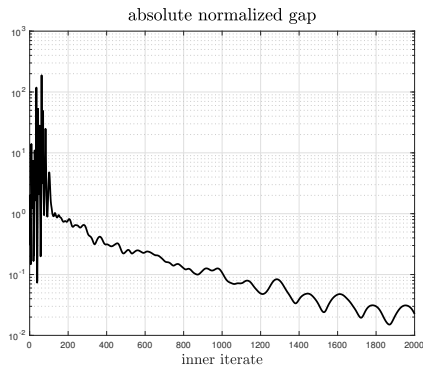
**Abbildung 15:** Singulärwertstruktur des low-rank-Anteils  $L$ . Oben: Verlauf der Singulärwerte von  $L - \bar{L}$  über alle äußeren Iterationen der Multilevelstrategie. Für eine einheitliche Skalierung trotz veränderter Auflösungen wurden die Singulärwerte für die Iterierten 17 und 18 um den Faktor 0.5 und für die Iterierten 19 und 20 um den Faktor 0.25 korrigiert (siehe Unterabschnitt 4.4.2). Unten: In (15b) ist das Mittelwertbild  $\bar{l}$  aus den Spalten von  $L$  abgebildet. (15c) und (15d) zeigen die ersten beiden Singulärvektoren von  $L - \bar{L}$  aus der finalen Iteration. Wie an der zugehörigen Singulärwertstruktur in (15a) zu erkennen ist, bildet  $\bar{l}$  zusammen mit dem ersten Singulärvektor aus (15c) eine Basis, in der sich die Spalten von  $L$  nahezu fehlerfrei beschreiben lassen.



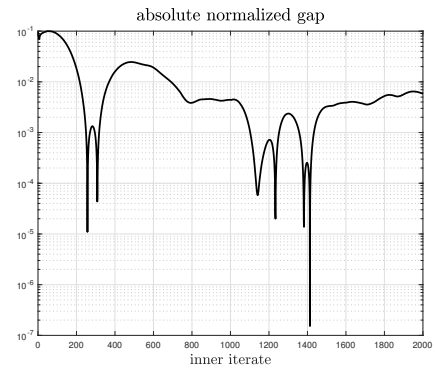
(a)



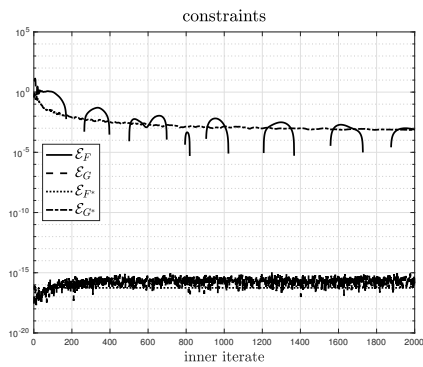
(b)



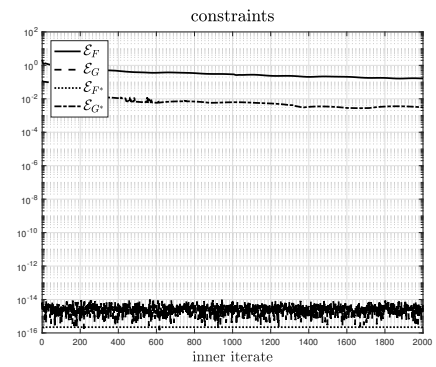
(c)



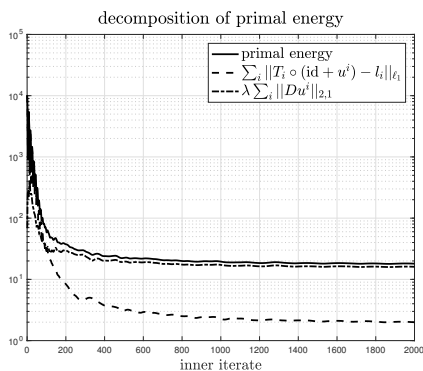
(d)



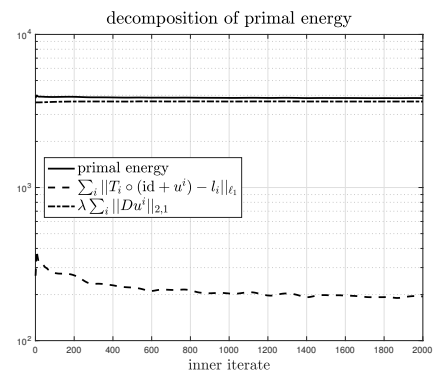
(e)



(f)



(g)



(h)

**Abbildung 16:** Innerer Iterationsverlauf für die erste (links) und für die letzte (rechts) äußere Iteration der verwendeten Multilevelstrategie. In (16a) und (16b) dargestellt sind jeweils ein gemeinsamer Kurvenverlauf von primaler und dualer Energie. In (16c) und (16d) folgen die zugehörigen Diagramme der absoluten normalisierten Dualitätslücke (2.37). (16e) und (16f) zeigen die Fehlermaße der Nebenbedingungen. (16g) und (16h) schlüsseln zusätzlich die Zusammensetzung der primalen Energie auf.

## Auswertung der Optimierungsmethode

Neben dem eigentlichen Registrierungsergebnis soll im Folgenden auch das verwendete Optimierungsverfahren hinsichtlich seiner Konvergenz analysiert werden. Hierzu sei auf Abbildung 16 verwiesen, in der für zwei ausgewählte äußere Iteration, nämlich die erste auf unterster und die letzte auf höchster Auflösung, verschiedene Größen über den Verlauf der inneren Iteration dargestellt sind. Im Einzelnen sind dies die primale und die duale Energie sowie die absolute normalisierte Dualitätslücke aus (2.37). Weiterhin werden die Fehlermaße der verschiedenen Nebenbedingungen sowie eine Aufschlüsselung der primalen Energie in Datenanteil und Regularisierer gezeigt.

Bezüglich letzterer sei zunächst angemerkt, dass die Zielfunktion in beiden betrachteten Iterationen im Wesentlichen dem Regularisierungsterm entspricht und dass die Differenzen zwischen registrierten Aufnahmen  $T_i \circ (\text{id} + u^i)$  und zugehörigen low-rank-Komponenten  $l_i$  durchweg vernachlässigbar sind. Aus diesem Grund wurde für die synthetischen Daten auch auf eine Darstellung der Differenzen  $T_i \circ (\text{id} + u^i) - l_i$  verzichtet.

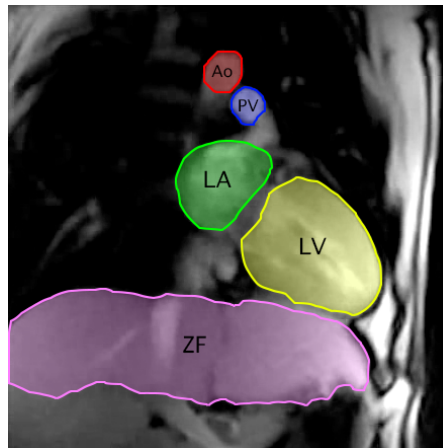
Hinsichtlich der Konvergenz ist festzustellen, dass sich primale und duale Energie in beiden betrachteten Iterationen deutlich einander annähern, was auch gut in den Kurven der Dualitätslücken zu erkennen ist. In (16b) besteht dabei die Besonderheit, dass die nicht eingehaltenen Nebenbedingungen aus (16f) wie in Abschnitt 2.4 angemerkt zu einer Verletzung der Dualitätsungleichung geführt haben: Die duale Energie verläuft teilweise oberhalb der primalen Energie.

Als hauptsächlichen Unterschied zwischen den beiden betrachteten Iterationen zeigt Abbildung 16, dass die Konvergenz in der ersteren deutlich schneller verläuft. Sowohl die Kurve der Dualitätslücke (16c) als auch die der nennenswert verletzten Nebenbedingungen  $\mathcal{E}_F$  und  $\mathcal{E}_{G^*}$  in (16e) weisen einen stärkeren Abfall auf als ihre Gegenstücke in (16d) und (16f). Dies dürfte in erster Linie auf die größere Anzahl von Variablen in der letzten Iteration zurückzuführen sein – im Vergleich zur niedrigsten Auflösung ist diese um den Faktor  $2^4 = 16$  erhöht.

Trotz alledem ist es als Erfolg der heuristisch motivierten Multilevelstrategie zu werten, dass eine finale Genauigkeit unterhalb von  $10^{-2}$  für die normalisierte Dualitätslücke in einem System mit  $3Nm_1m_2 = 1.2 \times 10^6$  primalen und  $6Nm_1m_2 = 3.6 \times 10^6$  dualen Variablen erreicht werden konnte. Als eine mögliche Verbesserung der verwendeten Methodik, die ohne eine Erhöhung des inneren Iterationslimits und damit einer nennenswerten Verlängerung der Laufzeit auskommt, ist noch eine Parameteroptimierung für die Schrittweiten  $\eta$  und  $\tau$  denkbar, die hier der Einfachheit halber als  $\eta = \tau = \|A\|_2^{-1}$  gewählt wurden.

## 5.2 Reale Bilddaten: Kardiale MRT

Der zweite Testdatensatz besteht aus realen medizinischen Bilddaten in Form einer kardialen MRT-Sequenz, die über den Verlauf von  $N = 236$  Einzelbildern  $T_i \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$  mit einer Auflösung von  $m_1 = m_2 = 220$  und einer Bildrate von 30 Hz insgesamt sieben Herzschläge im Zweikammerblick zeigt. In diesem sind das linke Atrium (dt. Vorhof), der linke Ventrikel (dt. Kammer), die Aorta (dt. Hauptschlagader) und die Pulmonalvene



**Abbildung 17:** Grobe Segmentierung des Zweikammerblicks im verwendeten Datensatz. Kennzeichnet sind die Aorta (Ao), die Pulmonalvene (PV), das linke Atrium (LA), der linke Ventrikel (LV) sowie das Zwerchfell (ZF).

(dt. Lungenvene) dargestellt. Voneinander abgegrenzt werden linkes Atrium und linker Ventrikel durch die Mitralklappe. Unterhalb des Herzes ist weiterhin das Diaphragma (dt. Zwerchfell) zu erkennen, das durch seine periodische Verschiebung ursächlich für Ein- und Ausatmung ist.

Zur besseren Orientierung ist in Abbildung 17 eine grobe Segmentierung eines ausgewählten Standbildes gegeben – weitere Hintergründe zum Zweikammerblick können beispielsweise in [MFW<sup>+</sup>03] nachgelesen werden. Die Bilddaten wurden mit freundlicher Genehmigung zur Verfügung gestellt von Allen D. Elster, MRIquestions.com.

Für die Registrierung ausgewählt wurden 12 Bilder mit den in Tabelle 1 aufgeführten Indizes, die sich in drei Gruppen entsprechend den verschiedenen Phasen des Herzzyklus einteilen. Pro Phase wurde je ein Bild aus den ersten vier Herzschlägen der Sequenz betrachtet. Etwas genauer handelt es sich dabei um die folgenden Phasen [SL05, S. 178f.]:

1. Kontraktion der linken Kammer mit Ausströmen des Blutes in die Aorta (Systole),
2. Entspannung der linken Kammer, Verschiebung der Mitralklappe zur Herzspitze und Einströmen des Blutes aus der Pulmonalvene in den linken Vorhof (Diastole),
3. Öffnung der Mitralklappe mit Strömung des Blutes aus dem linken Vorhof in die linke Kammer (Diastole).

### Auswertung der Registrierung

Registriert wurden die zwölf Bilder analog zum vorangegangenen Beispiel in drei Auflösungsstufen mit einer untersten Auflösung von  $55 \times 55$  Bildpunkten. Wie zuvor galt dabei  $\gamma = 10^{-3}$  für die Toleranz des Abbruchkriteriums,  $\eta = \tau = \|A\|_2^{-1}$  für die Schrittweiten sowie eine maximale Anzahl von 2000 inneren Iterationen.

	<b>Schlag 1</b>	Schlag 2	Schlag 3	<b>Schlag 4</b>
Systole (Kontraktion)	<b>3</b>	32	60	<b>90</b>
Diastole (Entspannung)	<b>10</b>	39	66	<b>96</b>
Diastole (Füllung)	<b>17</b>	45	73	<b>104</b>

**Tabelle 1:** Zur Registrierung ausgewählte Standbilder. Die Reihenfolge der Spalten korrespondiert zum zeitlichen Verlauf der Bildsequenz, die Zeilen zu den Phasen des Herzzyklus. Fette Indizes kennzeichnen die in den Abbildungen 18, 19 und 20 abgedruckten Bilder.

Die manuelle Optimierung der verbleibenden Parameter ergab die Werte

- $\lambda = 0.125$ ,
- $n_{outer}^1 = 16, n_{outer}^2 = n_{outer}^3 = 2$ ,
- $\nu_{factor}^1 = \nu_{factor}^2 = \nu_{factor}^3 = 0.95$ ,

aus denen eine Gesamtrechenzeit von 53 Minuten für das Beispiel resultierte.

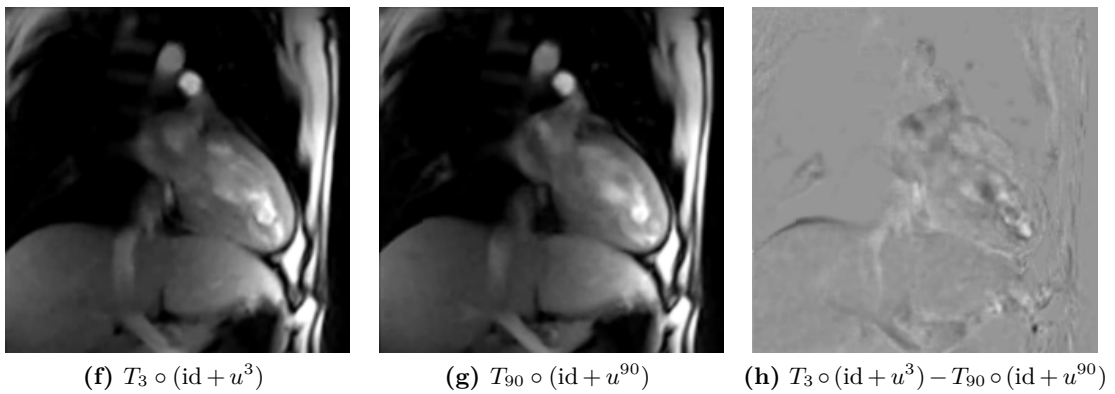
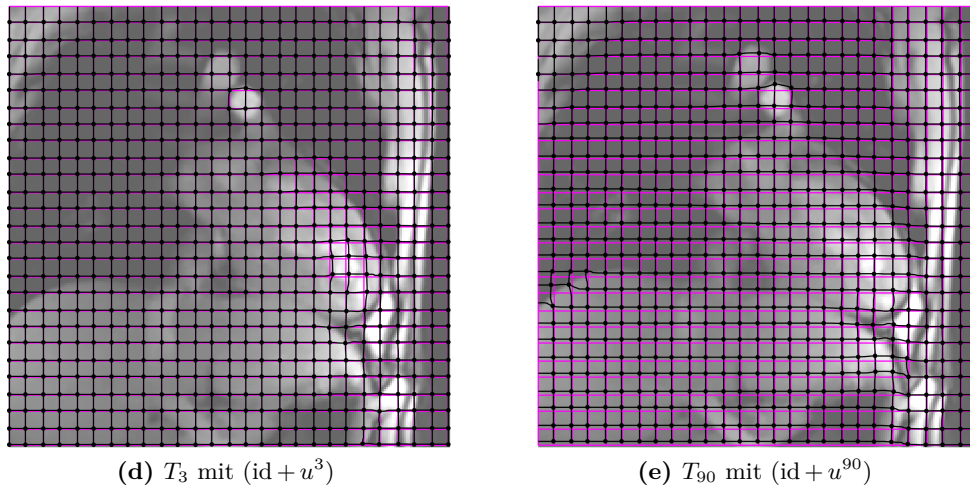
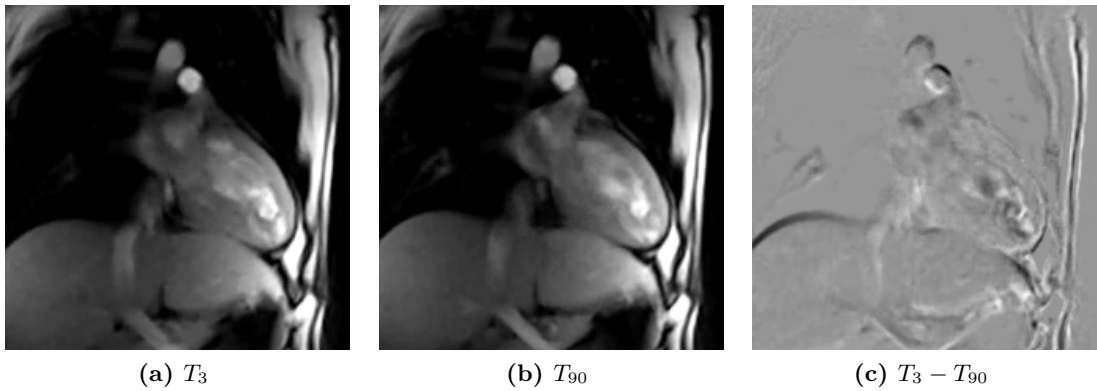
In den Abbildungen 18, 19 und 20 sind die Registrierungsergebnisse für die zwei zeitlich am weitesten auseinander gelegenen Standbilder jeder Phase (bezüglich der zwölf verwendeten Bilder) abgedruckt. Jede der drei Abbildungen gliedert sich in einen oberen Teil mit zwei Eingabebildern sowie ihrer Differenz, in einen Mittelteil, in dem die berechneten Transformationsgitter mit einem Einheitsgitter verglichen werden sowie in einen unteren Teil, in dem die transformierten Aufnahmen inklusive ihrer Differenz dargestellt sind.

Im Vergleich zwischen Ein- und Ausgabe zeigt sich für alle Differenzbilder, dass die Registrierung tatsächlich eine erfolgreiche Bewegungskorrektur bewirkt hat: Während in den initialen Differenzbildern durchweg deutliche „Bewegungsschatten“ im Bereich von Brustkorb, Aorta, Lungenvene, Zwerchfell und Herzrand zu erkennen sind, sind diese in den registrierten Differenzen weitestgehend verschwunden. Einzig auf der in Richtung Rücken gewandten Seite des Zwerchfells und an der Herzspitze verbleiben noch kleinere Bewegungsschatten, die im Vergleich zu den Eingaben aber deutlich reduziert sind.

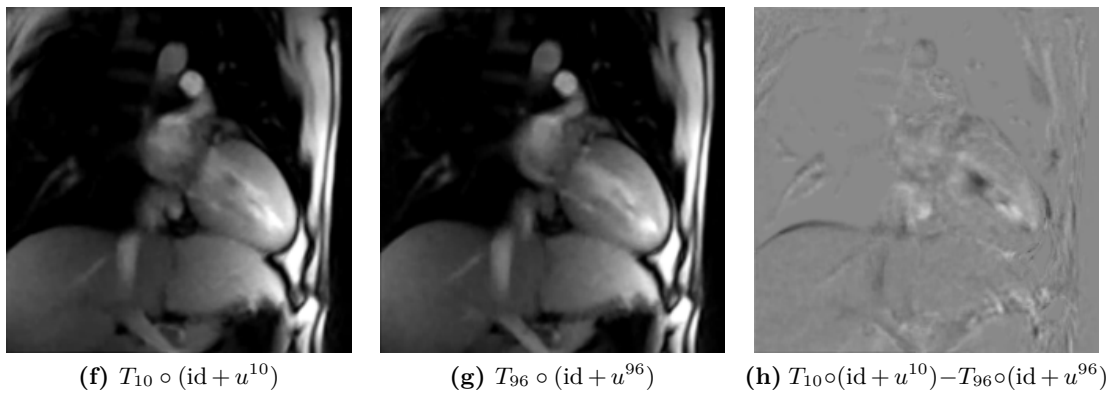
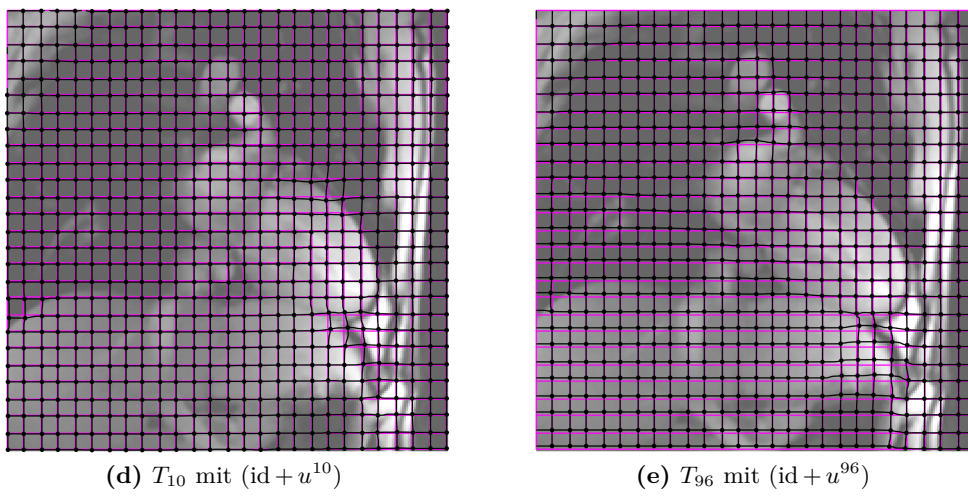
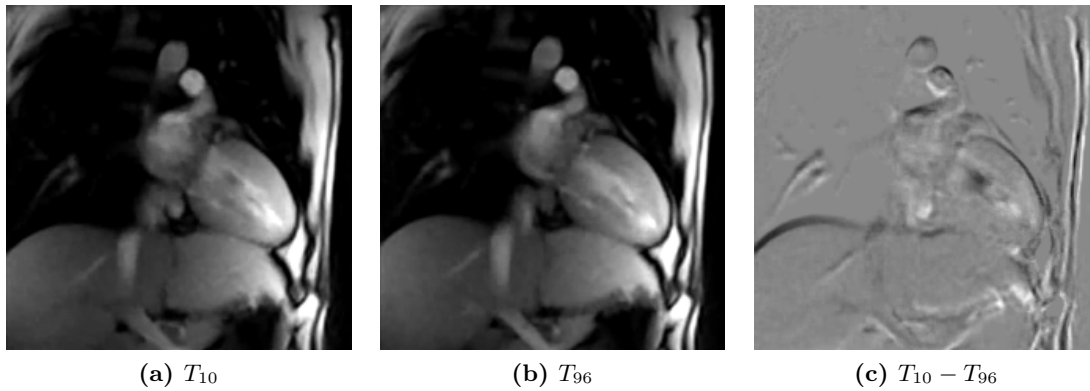
Bezüglich der Regularisierung zeigt sich, dass die Totale Variation in der Tat die Gleitbewegung im Übergang zwischen Zwerchfell und Brustkorb registrieren konnte. Dies ist besonders deutlich zu erkennen in den Abbildungen (18e), (19e) und (20d), in denen an dieser Stelle Unstetigkeiten in den Bewegungsfeldern auftreten: Über dem Zwerchfell heben sich die schwarzen Gitterlinien entweder nach oben oder nach unten von den magentafarbenen Linien des Einheitsgitters ab, während sie im angrenzenden Brustkorbbereich nahezu deckungsgleich mit diesen sind.

Für die Auswertung der Zerlegung der registrierten Aufnahmen  $T_i \circ (\text{id} + u^i)$  in die parallel ermittelten low-rank-Anteile  $l_i$  und sparsity-Anteile  $e_i = T_i \circ (\text{id} + u^i) - l_i$  sei auf die Abbildungen 21 und 22 verwiesen. In ersterer findet sich eine zu Abbildung 15 analoge Darstellung der Singulärwerte und Singulärvektoren von  $L - \bar{L}$  sowie des Mittelwertbildes  $\bar{l}$  aus den Spalten von  $L$ . In Bezug auf diese Singulärwertzerlegung sind die folgenden Aspekte erwähnenswert:

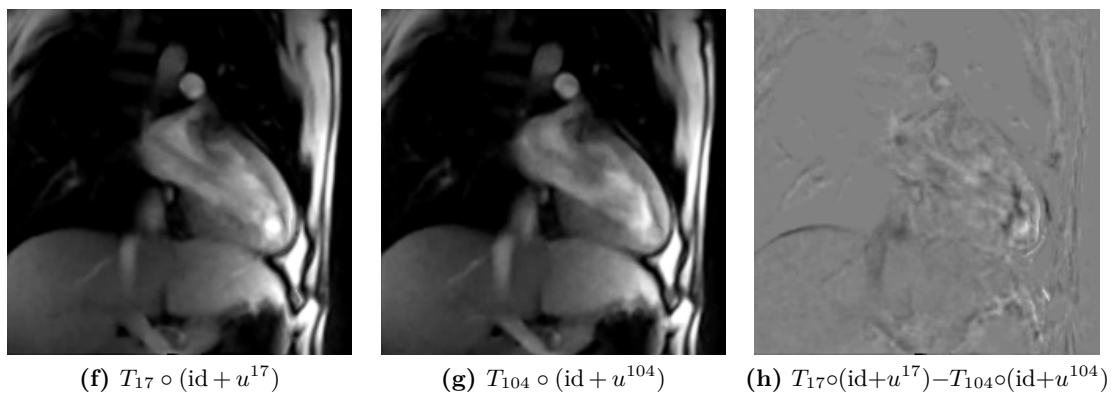
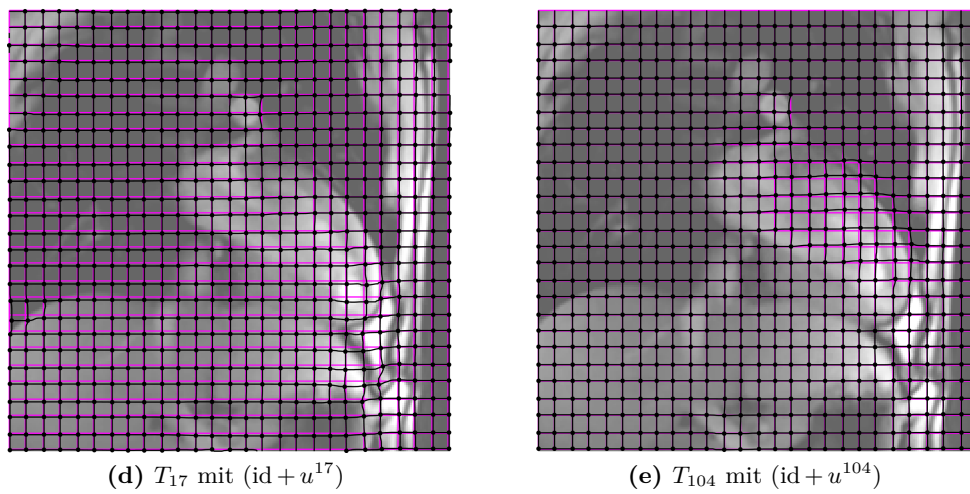
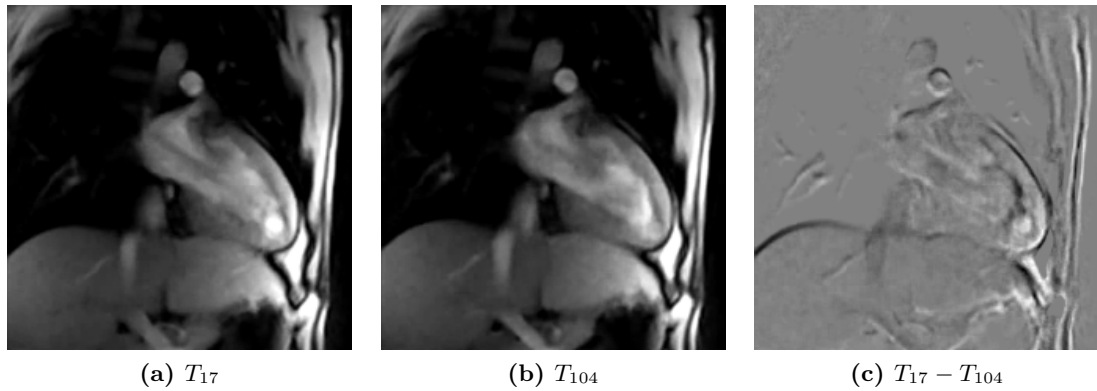




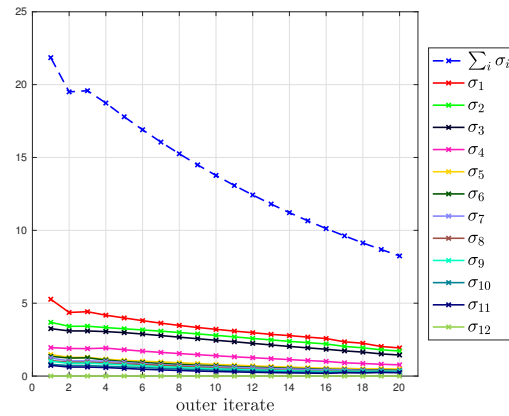
**Abbildung 18:** Ausgewählte Standbilder aus der Systole. Oben:  $T_3$  und  $T_{90}$  vor der Registrierung inklusive Differenzbild. Mitte: Berechnete Gitter  $(id + u^3)$  und  $(id + u^{90})$  (schwarz) im Vergleich zur Identität (magenta). Unten: Transformierte Bilder  $T_3 \circ (id + u^3)$  und  $T_{90} \circ (id + u^{90})$  inklusive Differenz nach der Registrierung.



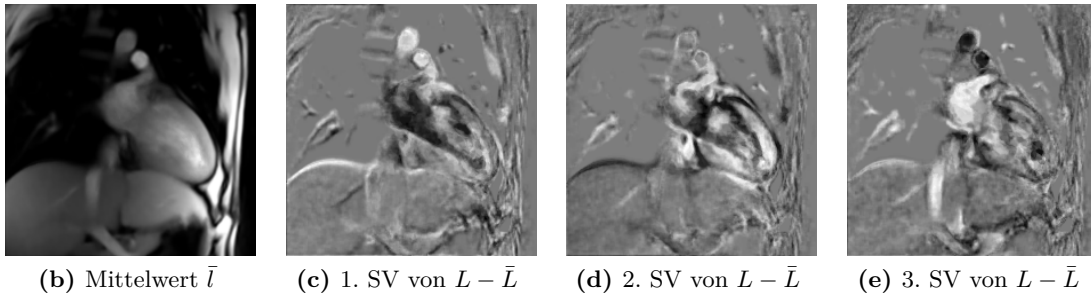
**Abbildung 19:** Ausgewählte Standbilder aus der Diastole (Entspannung). Oben:  $T_{10}$  und  $T_{96}$  vor der Registrierung inklusive Differenzbild. Mitte: Berechnete Gitter  $(id + u^{10})$  und  $(id + u^{96})$  (schwarz) im Vergleich zur Identität (magenta). Unten: Transformierte Bilder  $T_{10} \circ (id + u^{10})$  und  $T_{96} \circ (id + u^{96})$  inklusive Differenz nach der Registrierung.



**Abbildung 20:** Ausgewählte Standbilder aus der Diastole (Füllung). Oben:  $T_{17}$  und  $T_{104}$  vor der Registrierung inklusive Differenzbild. Mitte: Berechnete Gitter  $(\text{id} + u^{17})$  und  $(\text{id} + u^{104})$  (schwarz) im Vergleich zur Identität (magenta). Unten: Transformierte Bilder  $T_{17} \circ (\text{id} + u^{17})$  und  $T_{104} \circ (\text{id} + u^{104})$  inklusive Differenz nach der Registrierung.



(a) Entwicklung der Singulärwerte von  $L - \bar{L}$  über Verlauf der äußeren Iterationen



(b) Mittelwert  $\bar{L}$

(c) 1. SV von  $L - \bar{L}$

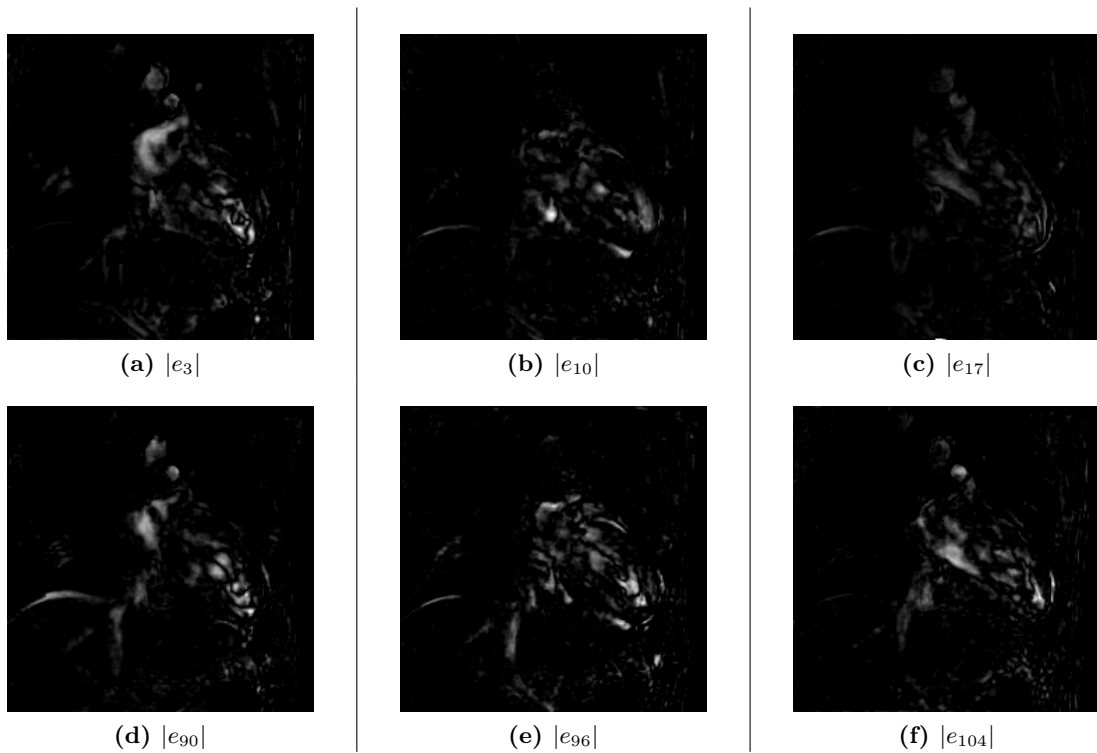
(d) 2. SV von  $L - \bar{L}$

(e) 3. SV von  $L - \bar{L}$

**Abbildung 21:** Singulärwertstruktur des low-rank-Anteils  $L$  in der zu Abbildung 15 analogen Darstellung. Oben: Verlauf der Singulärwerte von  $L - \bar{L}$  über alle äußeren Iterationen der Multilevelstrategie in normierter Skalierung. Unten: Mittelwertbild (21b) der Spalten des finalen low-rank-Anteils  $L$  inklusive der ersten drei Singulärvektoren (21c), (21d) und (21e) von  $L - \bar{L}$ . Offensichtlich besteht in (21a) eine Tendenz zur Annäherung der Singulärwerte über den Verlauf der äußeren Iteration. Die drei dominierenden Singulärvektoren zeigen zwar eine vage Korrespondenz zu den in den Abbildungen 18, 19 und 20 betrachteten Herzschlagphasen, weisen jedoch auch erkennbare Bewegungsartefakte im Bereich des Zwerchfells auf.

In (21a) zu erkennen, dass sich anhand der Singulärwerte keine klare Trennung der Singulärvektoren in relevante und irrelevante Basisvektoren ergibt wie es im synthetischen Beispiel in Abbildung 15 der Fall war. Zwar heben sich die größten drei von ihnen durchweg von den übrigen ab, trotzdem besteht aber eindeutig die Tendenz der Angleichung der Singulärwerte über den Verlauf der äußeren Iteration.

Die zu den erwähnten drei größten Singulärwerten gehörigen Singulärvektoren sind in (21c), (21d) und (21e) dargestellt. Diese zeigen immerhin eine grobe Korrespondenz zu den drei betrachteten Herzschlagphasen aus Tabelle 1: In (21d) tritt beispielsweise deutlich die verschobene Mitralklappe aus der diastolischen Entspannungsphase hervor (vergleiche hierzu Abbildung 19). In (21c) und (21e) wird zudem eine Aufhellung beziehungsweise eine Abdunklung der Aorta und der Pulmonalvene sichtbar, die mit der



**Abbildung 22:** Darstellung der absoluten sparsity-Komponenten  $|e_i| = |T_i \circ (\text{id} + u^i) - l_i|$  für die Beispielbilder aus den Abbildungen 18, 19 und 20. Links:  $|e_3|$  und  $|e_{90}|$  aus der Systole. Mitte:  $|e_{10}|$  und  $|e_{96}|$  aus der Entspannungsphase der Diastole. Rechts:  $|e_{17}|$  und  $|e_{104}|$  aus der Füllungsphase der Diastole.

Systole beziehungsweise der diastolischen Füllungsphase einhergeht.

Weiterhin sind jedoch auch in allen drei abgebildeten Singulärvektoren dieselben Bewegungsschatten des Zwerchfells zu erkennen, die sich bereits in den Differenzbildern (18h), (19h) und (20h) gezeigt haben – offensichtlich wurden diese von der Registrierungsprozedur fälschlicherweise als strukturelles Element der Bildsequenz und nicht als Bewegungsartefakt ausgemacht.

In Bezug auf den Blutfluss, der die hauptsächliche Dynamik in den registrierten Ausgabebilder  $T_i \circ (\text{id} + u^i)$  darstellt, zeigt sich, dass dieser in erster Linie durch die sparsity-Komponenten  $e_i$  beschrieben wird. Hierzu sei auf Abbildung 22 verwiesen, in der deren Beträge für dieselben Einzelbilder wie in den Abbildungen 18, 19 und 20 abgedruckt sind. Diese zeigen (je nach Phase) den Fluss des Blutes durch Vorhof, Kammer, Aorta und Lungenvene.

Die naheliegendste Erklärung dafür, dass diese Bildinformation nicht durch die Singulärvektoren von  $L - \bar{L}$  rekonstruiert wurde, besteht darin, dass Blut in der Regel turbulent durch die Hohlräume des Herzens strömt. Dies resultiert in einer hohen Irregularität der Bildintensitäten in diesen Bereichen, sodass die Einzelbilder  $T_i \circ (\text{id} + u^i)$  mitnichten in einem niedrigdimensionalen Unterraum beschrieben werden können.

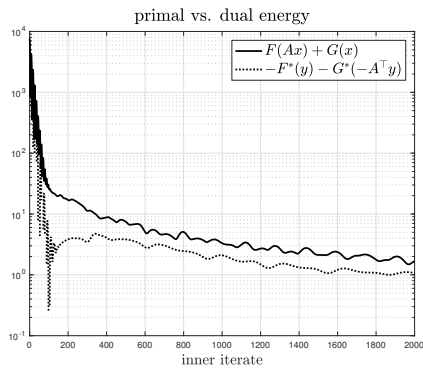
### Auswertung der Optimierungsmethode

Wie schon für das synthetische Beispiel soll an dieser Stelle zusätzlich der Verlauf des Optimierungsverfahrens für das reale Datenbeispiel ausgewertet werden. Zu diesem Zweck sind in Abbildung 23 dieselben Größen dargestellt wie in Abbildung 16. Im Wesentlichen zeigt sich zunächst ein ähnliches Bild wie für das vorangegangene Beispiel: Primale und duale Energien nähern sich über den Verlauf der inneren Iteration fortlaufend an und die Dualitätslücken verkleinern sich ebenso wie die Fehlermaße der Nebenbedingungen. Wiederum sind  $\mathcal{E}_F$  und  $\mathcal{E}_{G^*}$  diejenigen Fehler, die signifikante Werte jenseits der Maschinengenauigkeit annehmen.

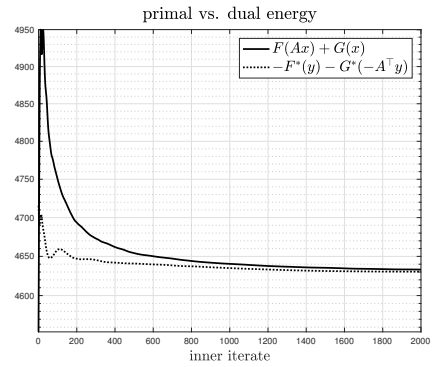
Im Detail jedoch bestehen zwei nennenswerte Unterschiede zwischen den Abbildungen 16 und 23: Einerseits oszillieren primale und duale Energie in der letzten äußeren Iteration (rechts in Abbildung 23) deutlich weniger und weisen trotz gleichermaßen verletzter Nebenbedingungen keine Kreuzungen der beiden Kurven auf. Dieser Umstand resultiert auch in einem deutlich glatteren Kurvenverlauf der Dualitätslücke in (23d), die zum Ende der Iteration unterhalb von  $10^{-3}$  liegt. Erstaunlich ist dieses Ergebnis deshalb, weil sowohl die realen MRT-Bilddaten als auch die zugehörigen Transformationen eine viel höhere Irregularität aufweisen als die synthetischen Bilddaten, die naturgemäß nicht von Bildrauschen oder ähnlichen Artefakten gestört sind.

Andererseits ist zu erkennen, dass die primale Energie in (23h) zum Großteil durch den Datenterm  $\sum_i \|T_i \circ (\text{id} + u^i) - l_i\|_{\ell_1}$  beeinflusst wird, der im synthetischen Datenbeispiel vernachlässigbar klein war. Diese Differenzen entsprechen wohlgerne den in Abbildung 22 (teilweise) dargestellten sparsity-Komponenten  $e_i$ .

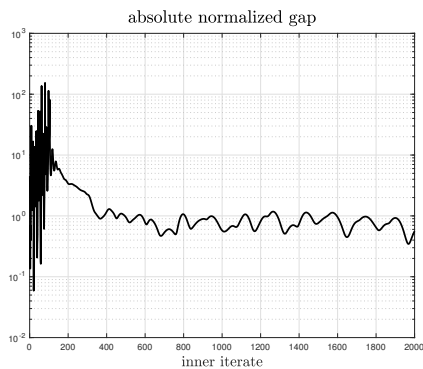
Abschließend lässt sich vermerken, dass die Kurven in Abbildung 23 den erwarteten Konvergenzverlauf aufweisen und dass die gewählte Optimierungsmethode in Verbindung mit der Multilevelstrategie aus Algorithmus 3 augenscheinlich in der Lage ist, das in Kapitel 4 beschriebene Registrierungsproblem auch für reale Bilddaten zufriedenstellend zu lösen.



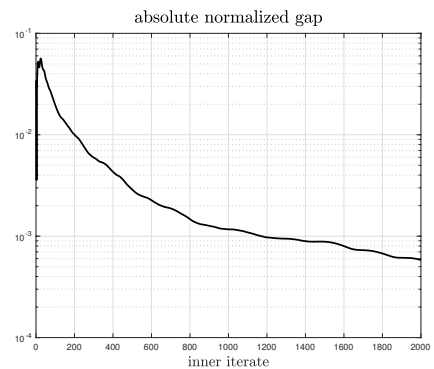
(a)



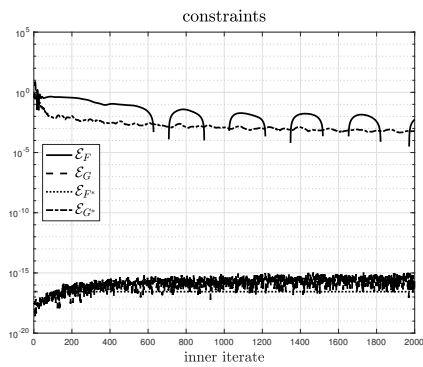
(b)



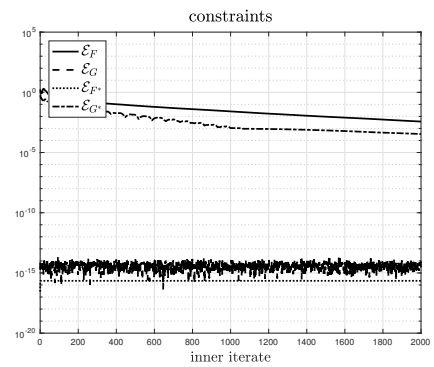
(c)



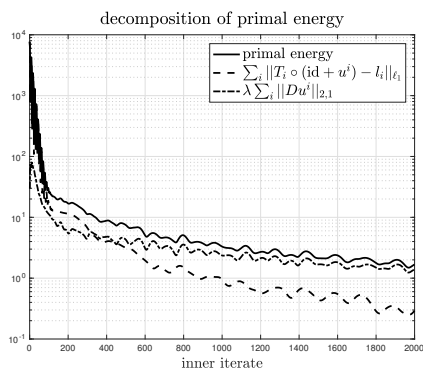
(d)



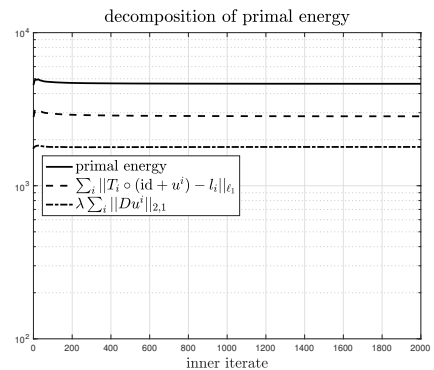
(e)



(f)



(g)



(h)

**Abbildung 23:** Iterationsverlauf für die erste (links) und für die letzte (rechts) äußere Iteration in der aus Abbildung 16 bekannten Darstellung. (23a) und (23b) zeigen primale und duale Energien in gemeinsamen Diagrammen, (23c) und (23d) die zugehörigen Dualitätslücken sowie (23e) und (23f) die Fehlermaße der verschiedenen Nebenbedingungen. Die Zusammensetzung der primalen Energie aus Datenterm und Regularisierer ist in (23g) und (23h) dargestellt.





---

## Kapitel 6: Fazit & Ausblick

Dieses Kapitel zieht ein kurzes Resümee der vorliegenden Arbeit und gibt einen Ausblick auf mögliche Fortentwicklungen des vorgestellten Registrierungsmodells und der zur Optimierung verwendeten Methoden.

### Fazit

In dieser Arbeit wurde in Anlehnung an [HP14] ein gruppenweises Distanzmaß für die Bildregistrierung formuliert, das auf Methoden der robusten Hauptkomponentenanalyse basiert. In Verbindung mit einem nichtglattem Registrierungsterm, der Totalen Variation, wurde darüber hinaus ein vollständiges Registrierungsmodell (3.36) für monomodale Bildsequenzen aufgestellt und getestet. Als Besonderheit dieses Modells wird neben dem eigentlichen Registrierungsergebnis als Teil des Verfahrens eine Zerlegung des selbigen in einen low-rank-Anteil, der sich in einem niedrigdimensionalen linearen Unterraum beschreiben lässt, sowie einen dünn besetzten Rest berechnet.

Zur Lösung des resultierenden Optimierungsproblems wurden erfolgreich konvexe Optimierungsmethoden erster Ordnung eingesetzt, also solche Methoden, die nur mit Informationen über die lokale Veränderung der Zielfunktion (in Form des Subdifferentials aus Definition 2.10) arbeiten. Diese wurden gepaart mit einer heuristischen Multilevelstrategie, die wie üblich zur Beschleunigung der Optimierung dient und deren praktischer Nutzen anhand der Beispiele aus Kapitel 5 nachgewiesen werden konnte.

Für den rein synthetischen Datensatz aus Abschnitt 5.1 entsprachen die registrierten Aufnahmen, die Verschiebungsfelder sowie die berechneten low-rank-Anteile ohne Einschränkung den Erwartungen.

Im realen Datenbeispiel einer kardialen MRT-Sequenz war das Modell weiterhin erfolgreich in der Lage, eine Bewegungskorrektur der atmungsbedingt verschobenen Organe zu ermitteln, in der auch Unstetigkeiten der Bewegungsfelder an Organgrenzen Berücksichtigung fanden. Einzig die für diesen Datensatz berechnete Zerlegung der registrierten Aufnahmen war insofern nicht zufriedenstellend, als dass die dominierenden Singulärvektoren des low-rank-Anteils nur etwaige Korrespondenzen zu den einzelnen Herschlagphasen aufwiesen und dass diese darüber hinaus kleinere Bewegungsartefakte enthielten. Hierzu sei nochmals an die Abbildung 21 erinnert, in der genau dies zu erkennen ist.

### Ausblick

Eine denkbare Lösung für die zuletzt genannte Problematik wären die folgende: Sollten die Ergebnisse auf die relativ kleine Anzahl von zwölf verwendeten Eingabebildern zurückzuführen sein, könnte ein neuerliches Experiment mit mehr Bildern (pro Herzschlagphase) eine bessere Einbettung mit aussagekräftigeren Singulärvektoren zur Folge haben. Zum Vergleich wurden auch für das einfache Problem einer alleinigen RPCA in Unterabschnitt 3.1.3 ganze 200 Standbilder verwendet.

Ein weiteres interessantes Experiment bestünde darin, die Regularisierung mittels Totaler Variation durch andere Terme zu ersetzen, die glatte (anstelle von stückweise konstanten) Transformationen als Lösungen bevorzugen – hierzu würde sich beispielsweise das linearisierte elastische Potential (1.5) anbieten. Da die Unstetigkeiten in den Bewegungsfeldern der MRT-Sequenz aus Abschnitt 5.2 auf die relativ kleine Grenzfläche zwischen Brustkorb und Zwerchfell begrenzt sind, könnte eine derartige Regularisierung sogar eine global gesehen bessere Bewegungskorrektur bewirken.

Letztlich besteht auch noch weitreichendes Potential zur Verfeinerung der Optimierungsmethode: Zunächst einmal könnte eine nähere Untersuchung der Terme  $F_1^*$ ,  $F_2^*$  und  $F_3^*$  aus Abschnitt 4.3 zu einer Interpretation der dualen Variablen  $w^1$ ,  $w^2$  und  $w^3$  führen, die Aufschluss darüber gibt, wie diese beim Übergang zwischen zwei Auflösungsstufen in der Multilevelstrategie zu prolongieren sind. Die Hoffnung hierbei ist diejenige, dass ein geeigneter Startwert für die dualen Variablen die besonders teuren Berechnungen auf den hohen Auflösungsstufen verkürzen kann.

Hierzu sei jedoch angemerkt, dass sich über den Verlauf der äußeren Iteration auf *einer* Auflösungsstufe in den bisherigen Experimenten gezeigt hat, dass die jeweils benötigte Anzahl innerer Iterationen trotz geeigneter Startwerte für primale und duale Variablen (in Form der Ausgaben der vorherigen äußeren Iteration) nicht wirklich verkürzt werden konnte. Da der Übergang zwischen zwei äußeren Iterationen in allen durchgeführten Experimenten aber auch gleichzeitig mit einer Modifikation der Zielfunktion in Bezug auf den Schwellwert  $\nu$  und die Entwicklungspunkte  $\tilde{u}^i$  einherging, ist unklar, inwieweit hier Verbesserungspotential besteht.

Um letzteren Faktor weitestgehend zu eliminieren, würde es sich beispielsweise anbieten, die bisher verwendete Parameterstrategie 2 aus Unterabschnitt 4.4.3, die den Schwellwert  $\nu$  auch auf den höheren Auflösungsstufen noch (relativ gesehen) absenkt, durch die Strategie 1 zu ersetzen, die dies nicht tut.

Vielversprechender und naheliegender wäre darüber hinaus noch eine Verbesserung des eigentlichen Optimierungsalgorithmus. Ein entsprechender Ansatz mittels diagonaler Präkonditionierung, der unter anderem auch in [HP14] zur Anwendung kommt, wurde bereits in [PC11] veröffentlicht. Insbesondere bestimmt diese Modifikation des Optimierungsverfahrens die Schrittweiten  $\eta$  und  $\tau$  auf eine vordefinierte Art und Weise, sodass keine Parameteroptimierung für deren Verhältnis mehr nötig ist.

Schlussendlich sei angemerkt, dass die im Rahmen dieser Arbeit entstandene Implementierung ohne GPU-Unterstützung arbeitet und dass in dieser Hinsicht ebenfalls Potential zur Beschleunigung des Verfahrens besteht.





---

# Kapitel A: Anhang

## A.1 Teilbeweis von Satz 3.3

In Satz 3.3 offen blieb der Beweis der Teilaussage

$$(\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{S,q}))^{-1}(A) = U \text{diag} \left( \left( \text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q}) \right)^{-1} (\sigma(A)) \right) V^\top. \quad (\text{A.1})$$

für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit der Singulärwertzerlegung  $A = U \text{diag}(\sigma(A)) V^\top$ . In [Lew95] wird eine analoge Aussage für das Subdifferential gezeigt, also

$$\partial(\|\cdot\|_{S,q})(A) = U \text{diag} \left( \partial(\|\cdot\|_{\ell_q})(\sigma(A)) \right) V^\top. \quad (\text{A.2})$$

Diese stellt nun den Ausgangspunkt für den folgenden Beweis von (A.1) dar.

**Beweis:** Es sei zunächst  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Singulärwertzerlegung  $\tilde{U} \text{diag}(\sigma(\tilde{A})) \tilde{V}^\top$  gegeben.

Die Singulärwertabbildung  $\sigma : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{\min\{m,n\}}$  aus Abschnitt 3.1 ist dann für alle Matrizen  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , die ebenfalls von  $\tilde{U}$  und  $\tilde{V}^\top$  diagonalisiert werden, von der Form

$$\sigma(B) = \text{diag}^{-1}(\tilde{U}^\top B \tilde{V}),$$

wobei  $\text{diag}^{-1}$  die zu  $\text{diag}$  inverse Operation ist, die eine Diagonalmatrix auf den Vektor ihrer Diagonalelemente abbildet.

Nun gilt aufgrund von (A.2) für  $\tau > 0$ :

$$\begin{aligned} \partial(\|\cdot\|_{S,q})(\tilde{A}) &= \tilde{U} \text{diag}(\partial(\|\cdot\|_{\ell_q})(\sigma(\tilde{A}))) \tilde{V}^\top \\ \Leftrightarrow \tau \partial(\|\cdot\|_{S,q})(\tilde{A}) &= \tilde{U} \text{diag}(\tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q})(\sigma(\tilde{A}))) \tilde{V}^\top \\ \Leftrightarrow \tilde{A} + \tau \partial(\|\cdot\|_{S,q})(\tilde{A}) &= \tilde{U} \text{diag}(\sigma(\tilde{A}) + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q})(\sigma(\tilde{A}))) \tilde{V}^\top \\ \Leftrightarrow (\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{S,q}))(\tilde{A}) &= \tilde{U} \text{diag}((\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q}))(\sigma(\tilde{A}))) \tilde{V}^\top. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ist nun  $A \in (\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{S,q}))(\tilde{A})$ , dann wird  $A$  wegen (A.3) ebenfalls von  $\tilde{U}$  und  $\tilde{V}^\top$  diagonalisiert und es folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^\top A \tilde{V} &\in \text{diag}((\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q}))(\sigma(\tilde{A}))) \\ \Rightarrow \text{diag}^{-1}(\tilde{U}^\top A \tilde{V}) = \sigma(A) &\in (\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q})(\sigma(\tilde{A}))) \\ \Rightarrow (\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q}))^{-1}(\sigma(A)) &= \sigma(\tilde{A}) = \text{diag}^{-1}(\tilde{U}^\top \tilde{A} \tilde{V}) \\ \Rightarrow \tilde{U} \text{diag}((\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{\ell_q}))^{-1}(\sigma(A))) \tilde{V}^\top &= \tilde{A}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Die Gleichheit in (A.4) ist aufgrund der Eindeutigkeit der Proximalabbildung gewährleistet, siehe Satz 2.12. Offensichtlich gilt gleichermaßen  $\tilde{A} = (\text{id} + \tau \partial(\|\cdot\|_{S,q}))^{-1}(A)$ , woraus zusammen mit (A.4) die Behauptung folgt. ■

## A.2 Projektion auf $\mathcal{B}_\infty$

Zur Auswertung von (3.12) und (3.13) wird die Projektion eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  auf die  $\ell_\infty$ -Einheitskugel benötigt. Diese lässt sich ausdrücken als

$$y = \Pi_{\mathcal{B}_\infty}(x) \Leftrightarrow y_i = \frac{x_i}{\max\{1, |x_i|\}} \text{ für alle } i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.5})$$

**Beweis:** Es sei  $y = \Pi_{\mathcal{B}_\infty}(x)$ . Dann ist das Problem

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{argmin}_{\|z\|_{\ell_\infty} \leq 1} \|x - z\| \\ &= \operatorname{argmin}_{\|z\|_{\ell_\infty} \leq 1} \|x - z\|^2 = \left( \operatorname{argmin}_{|z_i| \leq 1} (x_i - z_i)^2 \right)_{i=1, \dots, n} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

in den Komponenten von  $y$  entkoppelt.

Im Falle  $|x_i| \leq 1$  minimiert  $z_i = x_i$  offensichtlich das  $i$ -te Teilproblem. Für  $|x_i| > 1$  dagegen liegt der Minimierer  $x_i$  nicht im zulässigen Bereich. Da die Zielfunktion allerdings eine nach oben geöffnete Parabel ist, entspricht der Minimierer auf dem zulässigen Bereich dem  $x_i$  am nächsten gelegenen Punkt  $z_i$ . Im hiesigen Fall ist dies  $z_i = -1$  für  $x_i < -1$  und  $z_i = 1$  für  $x_i > 1$ . Zusammen ergibt sich daraus (A.5). ■

### A.3 Spektralnorm der Zentrierungsmatrix $K$

In Unterabschnitt 3.2.2 wurde zur Schrittweitenbestimmung die Spektralnorm der Zentrierungsmatrix  $K$  aus (3.16) benötigt. Für diese soll nun  $\|K\|_2 = 1$  gezeigt werden.

**Beweis:** Zunächst einmal lässt sich  $K$  mittels des Kroneckerprodukts darstellen als

$$K = \left( I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top \right) \otimes I_{m_1 m_2}.$$

In dieser Darstellung soll nun die Idempotenz von  $K$  gezeigt werden – es ist also zu zeigen, dass  $K^2 = K$  gilt. Unter Verwendung der Rechenregel  $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} K^2 &= \left( \left( I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top \right) \otimes I_{m_1 m_2} \right) \left( \left( I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top \right) \otimes I_{m_1 m_2} \right) \\ &= \left( \left( I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top \right) \left( I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top \right) \right) \otimes (I_{m_1 m_2} I_{m_1 m_2}) \\ &= \left( I_N - \frac{2}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top + \frac{1}{N^2} \mathbf{1} \cdot \underbrace{\mathbf{1}^\top \cdot \mathbf{1}}_{=N} \cdot \mathbf{1}^\top \right) \otimes I_{m_1 m_2} \\ &= \left( I_N - \frac{1}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^\top \right) \otimes I_{m_1 m_2} = K. \end{aligned}$$

Für alle idempotenten Matrizen gilt, dass ihre Eigenwerte ausschließlich die Werte 0 oder 1 annehmen [HJ12, Prob. 1.1.P5] und weil offensichtlich  $K \neq 0$  ist, folgt  $\lambda_{max}(K) = 1$ . Aus derselben Eigenschaft folgt zudem, dass  $K$  positiv semidefinit ist. Da  $K$  ebenfalls symmetrisch ist, lässt sie sich orthonormal diagonalisieren in  $K = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{Nm_1 m_2}) U^\top$  mit orthonormaler Eigenbasis  $U$  und  $\lambda_i \geq 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, Nm_1 m_2\}$ . Ordnet man die Eigenwerte  $\lambda_i$  (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) absteigend an, so ist diese Darstellung äquivalent zu einer Singulärwertzerlegung von  $K$ , woraus  $\|K\|_2 = \sigma_{max} = \lambda_{max} = 1$  folgt. ■

#### A.4 Algorithmus zur Projektion auf $\mathcal{B}_1$

Analog zur Projektion  $\Pi_{\mathcal{B}_\infty}$  in Anhang A.2 wird für die Auswertung der Proximalabbildung der Spektralnorm  $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{S,\infty}$  die Projektion eines Vektors  $x \in \mathbb{R}^n$  auf die  $\ell_1$ -Einheitskugel benötigt. Gesucht ist also

$$y = \Pi_{\mathcal{B}_1}(x) = \operatorname{argmin}_{\|z\|_{\ell_1} \leq 1} \|x - z\|. \quad (\text{A.7})$$

Für dieses Problem existiert zwar keine geschlossene Lösung wie etwa (A.5) für die Projektion auf  $\mathcal{B}_\infty$ , in [DSSSC08] wurde aber dennoch ein exakter Algorithmus zur Lösung dieses Problems mit linearer Zeitkomplexität  $\mathcal{O}(n)$  in der Dimension  $n$  von  $x$  entwickelt. Dieser dient für die Zwecke dieser Arbeit zur Lösung aller Probleme der Form (A.7) und soll im Folgenden wiedergegeben werden.

Zunächst einmal werde für (A.7) davon ausgegangen, dass  $\|x\|_{\ell_1} > 1$  gelte, denn andernfalls ist die gesuchte Lösung trivialerweise durch  $y = x$  gegeben. Ausgehend von der Beobachtung, dass für die Lösung  $y$  stets  $\operatorname{sgn}(y_i) = \operatorname{sgn}(x_i)$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt [DSSSC08, Lem. 3], lässt sich (A.7) in folgender Art und Weise vereinfachen:

Für beliebiges  $x \in \mathbb{R}^n$  betrachte man  $\tilde{x} = (|x_i|)_{i=1,\dots,n}$  und löse das Problem

$$\tilde{y} = \operatorname{argmin}_{z \in \mathbb{R}^n} \|\tilde{x} - z\| \quad \text{u. d. Nb.} \quad \|z\|_{\ell_1} \leq 1 \wedge z_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.8})$$

Die Lösung von (A.7) ist dann gegeben durch  $y = (\operatorname{sgn}(x_i) \tilde{y}_i)_{i=1,\dots,n}$ . Das Problem (A.8) der Projektion von  $\tilde{x} \in [0, \infty)^n$  auf das Einheits-simplex

$$\mathcal{S}_n := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|z\|_{\ell_1} \leq 1 \wedge z_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, n\}$$

behandelt dabei der eigentliche Algorithmus 4. Für Hintergründe sei auf die ursprüngliche Veröffentlichung [DSSSC08] verwiesen.

---

#### Algorithmus 4: Projektion auf das Einheits-simplex $\mathcal{S}_n$ [DSSSC08]

---

**Eingabe** Vektor  $x \in [0, \infty)^n$  mit  $\|x\|_{\ell_1} > 1$

**Ausgabe** Projektion  $y$  von  $x$  auf das Einheits-simplex  $\mathcal{S}_n$

---

**Initialisierung** Setze  $U \leftarrow \{1, \dots, n\}$ ,  $s \leftarrow 0$  und  $\rho \leftarrow 0$ .

**Solange**  $U \neq \emptyset$

**Wähle**  $k \in U$  zufällig

**Setze**  $G \leftarrow \{j \in U \mid x_j \geq x_k\}$  und  $L \leftarrow \{j \in U \mid x_j < x_k\}$

**Setze**  $\Delta\rho \leftarrow |G|$  und  $\Delta s \leftarrow \sum_{j \in G} x_j$

**Falls**  $(s + \Delta s) - (\rho + \Delta\rho)x_k < 1$

**Setze**  $s \leftarrow s + \Delta s$ ,  $\rho \leftarrow \rho + \Delta\rho$  und  $U \leftarrow L$

**Sonst**

**Setze**  $U \leftarrow G \setminus \{k\}$

**Setze**  $\theta \leftarrow (s - 1)/\rho$  und  $y_i \leftarrow \max\{x_i - \theta, 0\}$  für  $i = 1, \dots, n$

---







## Literatur

- [AFP00] AMBROSIO, Luigi ; FUSCO, Nicola ; PALLARA, Diego: *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford University Press, 2000
- [BL11] BREDIES, Kristian ; LORENZ, Dirk: *Mathematische Bildverarbeitung: Einführung in Grundlagen und moderne Theorie*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011
- [BV04] BOYD, Stephen ; VANDENBERGHE, Lieven: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004
- [BWM18] BREHMER, Kai ; WACKER, Benjamin ; MODERSITZKI, Jan: A Novel Similarity Measure for Image Sequences. In: *Biomedical Image Registration*, Springer International Publishing, 2018, S. 47–56
- [CLMW11] CANDÈS, Emmanuel J. ; LI, Xiaodong ; MA, Yi ; WRIGHT, John: Robust Principal Component Analysis? In: *Journal of the ACM* 58 (2011), Nr. 3, S. 1–37
- [CP11] CHAMBOLLE, Antonin ; POCK, Thomas: A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 40 (2011), S. 120–145
- [DSSSC08] DUCHI, John ; SHALEV-SHWARTZ, Shai ; SINGER, Yoram ; CHANDRA, Tushar: Efficient Projections Onto the L1-ball for Learning in High Dimensions. In: *Proceedings of the 25th International Conference on Machine Learning*, 2008, S. 272–279
- [FHB01] FAZEL, Maryam ; HINDI, Haitham ; BOYD, Stephen P.: A rank minimization heuristic with application to minimum order system approximation. In: *Proceedings of the American Control Conference* Bd. 6, 2001, S. 4734–4739
- [GBZ12] GUYON, Charles ; BOUWMANS, Thierry ; ZAHZAH, El-hadi: Robust Principal Component Analysis for Background Subtraction: Systematic Evaluation and Comparative Analysis. In: *Principal Component Analysis*. IntechOpen, 2012, Kapitel 12
- [GHP<sup>+</sup>18] GUYADER, Jean-Marie ; HUIZINGA, Wyke ; POOT, Dirk H. J. ; KRANENBURG, Matthijs van ; UITTERDIJK, André ; NIESSEN, Wiro J. ; KLEIN, Stefan: Groupwise image registration based on a total correlation dissimilarity measure for quantitative MRI and dynamic imaging data. In: *Scientific Reports* 8 (2018), Nr. 1
- [GVL96] GOLUB, Gene H. ; VAN LOAN, Charles F.: *Matrix Computations*. 3rd. Baltimore, MD, USA : Johns Hopkins University Press, 1996

- [Had02] HADAMARD, Jacques: Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. In: *Princeton University Bulletin* 13 (1902), Nr. 4, S. 49–52
- [Han09] HANDELS, Heinz: *Medizinische Bildverarbeitung: Bildanalyse, Mustererkennung und Visualisierung für die computergestützte ärztliche Diagnostik und Therapie*. Vieweg+Teubner Verlag, 2009 (Leitfäden der Informatik)
- [HDP<sup>+</sup>14] HAMY, Valentin ; DIKAIOS, Nikolaos ; PUNWANI, Shonit ; MELBOURNE, Andrew ; LATIFOLTOJAR, Arash ; MAKANYANGA, Jesica ; CHOUHAN, Manil ; HELBREN, Emma ; MENYS, Alex ; TAYLOR, Stuart ; ATKINSON, David: Respiratory motion correction in dynamic MRI using robust data decomposition registration - Application to DCE-MRI. In: *Medical Image Analysis* 18 (2014), Nr. 2, S. 301–313
- [HJ12] HORN, Roger A. ; JOHNSON, Charles R.: *Matrix Analysis*. 2nd. New York, NY, USA : Cambridge University Press, 2012
- [HP14] HEBER, Stefan ; POCK, Thomas: Shape from Light Field Meets Robust PCA. In: *Computer Vision – ECCV 2014*, Springer International Publishing, 2014, S. 751–767
- [HPG<sup>+</sup>16] HUIZINGA, Wyke ; POOT, Dirk H. J. ; GUYADER, Jean-Marie ; KLAASSEN, Remy ; COOLEN, Bram F. ; KRANENBURG, Matthijs van ; GEUNS, Robert J. ; UITTERDIJK, André ; POLFLIET, Mathias ; VANDEMEULEBROUCKE, Jef ; LEEMANS, Alexander ; NIESSEN, Wiro J. ; KLEIN, Stefan: PCA-based group-wise image registration for quantitative MRI. In: *Medical Image Analysis* 29 (2016), S. 65–78
- [JSK11] JOJIC, Vladimir ; SARIA, Suchi ; KOLLER, Daphne: Convex envelopes of complexity controlling penalties: the case against premature envelopment. In: *Proceedings of the Fourteenth International Conference on Artificial Intelligence and Statistics* Bd. 15, 2011 (Proceedings of Machine Learning Research), S. 399–406
- [Lel13] LELLMANN, Jan: *Convex Optimization with Applications to Image Processing*. Lecture Notes from [https://www.lellmann.net/work/\\_media/teaching/coip-mt13-web.pdf](https://www.lellmann.net/work/_media/teaching/coip-mt13-web.pdf), University of Cambridge, 2013
- [Lew95] LEWIS, Adrian S.: The Convex Analysis of Unitarily Invariant Matrix Functions. In: *Journal of Convex Analysis* 2 (1995), S. 173–183
- [LHGT04] LI, Liyuan ; HUANG, Weimin ; GU, Irene ; TIAN, Qi: Statistical Modeling of Complex Backgrounds for Foreground Object Detection. In: *IEEE transactions on image processing: a publication of the IEEE Signal Processing Society* 13 (2004), S. 1459–1472

- [LNK<sup>+</sup>14] LIU, Xiaoxiao ; NIETHAMMER, Marc ; KWITT, Roland ; MCCORMICK, Matthew ; AYLWARD, Stephen: Low-Rank to the Rescue – Atlas-Based Analyses in the Presence of Pathologies. In: *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention – MICCAI 2014*, Springer International Publishing, 2014, S. 97–104
- [LSKC13] LELLMANN, Jan ; STREKALOVSKIY, Evgeny ; KOETTER, Sabrina ; CREMERS, Daniel: Total Variation Regularization for Functions with Values in a Manifold. In: *2013 IEEE International Conference on Computer Vision*, 2013, S. 2944–2951
- [MFW<sup>+</sup>03] MAIER, Robert ; FÜRNAU, Georg ; WONISCH, Manfred ; FRUHWALD, Friedrich M. ; KLEIN, Werner ; WATZINGER, Norbert: Kardiale Magnetresonanztomographie – Anatomie und Planung Kardiale Magnetresonanztomographie – Anatomie und Planung. In: *Journal für Kardiologie – Austrian Journal for Cardiology* 10 (2003), S. 3–7
- [MKS<sup>+</sup>11] METZ, Coert T. ; KLEIN, Stefan ; SCHAAP, Michiel ; WALSUM, Theo van ; NIESSEN, Wiro J.: Nonrigid registration of dynamic medical imaging data using nD+t B-splines and a groupwise optimization approach. In: *Medical Image Analysis* 15 (2011), Nr. 2, S. 238–249
- [Mod03] MODERSITZKI, Jan: *Numerical Methods for Image Registration*. Oxford University Press, 2003
- [Mod09] MODERSITZKI, Jan: *FAIR: Flexible Algorithms for Image Registration*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009
- [PB14] PARIKH, Neal ; BOYD, Stephen: Proximal Algorithms. In: *Foundations and Trends in Optimization* 1 (2014), S. 127–239
- [PBB<sup>+</sup>06] PAPENBERG, Nils ; BRUHN, Andrés ; BROX, Thomas ; DIDAS, Stephan ; WEICKERT, Joachim: Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping. In: *International Journal of Computer Vision* 67 (2006), Nr. 2, S. 141–158
- [PC11] POCK, Thomas ; CHAMBOLLE, Antonin: Diagonal preconditioning for first order primal-dual algorithms in convex optimization. In: *2011 International Conference on Computer Vision*, 2011, S. 1762–1769
- [PGW<sup>+</sup>10] PENG, Yigang ; GANESH, Arvind ; WRIGHT, John ; XU, Wenli ; MA, Yi: RASL: Robust alignment by sparse and low-rank decomposition for linearly correlated images. In: *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2010, S. 763–770

- [PKH<sup>+</sup>18] POLFLIET, Mathias ; KLEIN, Stefan ; HUIZINGA, Wyke ; PAULIDES, Margarethus M. ; NIESSEN, Wiro J. ; VANDEMEULEBROUCKE, Jef: Intrasubject multimodal groupwise registration with the conditional template entropy. In: *Medical Image Analysis* 46 (2018), S. 15–25
- [PUZ<sup>+</sup>07] POCK, Thomas ; URSCHLER, Martin ; ZACH, Christopher ; BEICHEL, Reinhard ; BISCHOF, Horst: A Duality Based Algorithm for TV-L1-Optical-Flow Image Registration. In: *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 2007*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, S. 511–518
- [Roc70] ROCKAFELLAR, Ralph T.: *Convex Analysis*. Princeton, N. J. : Princeton University Press, 1970 (Princeton Mathematical Series)
- [RW98] ROCKAFELLAR, Ralph T. ; WETS, Roger J-B: *Variational Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998
- [SL05] SILBERNAGL, Stefan ; LANG, Florian: *Taschenatlas der Pathophysiologie*. 2. Auflage. Thieme, 2005
- [VGS<sup>+</sup>17] VISHNEVSKIY, Valeriy ; GASS, Tobias ; SZEKELY, Szekely ; TANNER, Christine ; GOKSEL, Orcun: Isotropic Total Variation Regularization of Displacements in Parametric Image Registration. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 36 (2017), Nr. 2, S. 385–395
- [ZPB07] ZACH, Christopher ; POCK, Thomas ; BISCHOF, Horst: A Duality Based Approach for Realtime TV-L1 Optical Flow. In: *Pattern Recognition*, Springer Berlin Heidelberg, 2007, S. 214–223