



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
IMAGE COMPUTING

Masterarbeit im Studiengang Computational Life Science

Bildregistrierung mit linearer und nicht-linearer Elastizität

Melanie Pohl

Thema ausgegeben von
Prof. Dr. rer. nat. Bernd Fischer
Institute of Mathematics and Image Computing

Arbeit betreut von
Dr. rer. nat. Stefan Heldmann
Fraunhofer MEVIS Project Group Image Registration

Abgabe: 21.12.2011



IM FOCUS DAS LEBEN

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Zusammenfassung

Unter Bildregistrierung wird die Aufgabe verstanden, verschiedene Bilder mit vergleichbarem Inhalt so aufeinander abzubilden, dass korrespondierende Strukturen zur Überlagerung kommen. Die Literatur behandelt viele verschiedene Ansätze zur Registrierung von Bildern – abhängig davon, welche Deformationsart gewählt wird und welche Eigenschaften eine Deformation haben soll. Zum Beispiel können unerwünschte Deformationseigenschaften über einen sogenannten Regularisierer bestraft werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Bildregistrierung mit nicht linearen Deformationen unter Verwendung von insgesamt fünf verschiedenen Regularisierern untersucht: dem diffusiven Regularisierer, der die Glattheit der Deformation betrachtet, dem linear und dem quadratisch elastischen Regularisierer, deren Fokus auf Längenänderungen der Registrierung liegen und schließlich dem Volumen- und dem Flächenregularisierer, die Volumen- bzw. Flächenänderungen der Registrierung betrachten. Alle Regularisierer werden zunächst mathematisch modelliert und ihre Eigenschaften anhand von Testreihen gegenübergestellt. Der quadratisch elastische sowie der Volumen- und der Flächenregularisierer sind verglichen mit dem diffusiven Regularisierer wesentlich komplexer und aufwändiger in ihrer Berechnung.

Zunächst wird die Bildregistrierung mit Regularisierung allgemein in einem kontinuierlichen Modell eingeführt. Für die Umsetzung am Computer wird jedoch ein diskretes Modell benötigt. Deswegen wird in einem weiteren Schritt auf die Diskretisierung von Bildern und der für die Registrierung notwendigen Komponenten eingegangen. In verschiedenen Tests wird die Registrierung mit den vorgestellten Regularisierern analysiert. Diese Tests erfolgen sowohl für 2D als auch für 3D Bilder.

Im Rahmen dieser Arbeit wird gezeigt, dass es mit einer Diskretisierung basierend auf stückweise affinen Basisfunktionen möglich ist, die Regularisierer auch numerisch exakt zu berechnen. Des Weiteren wird ersichtlich werden, dass die elastischen Regularisierer eine globalere Registrierung ermöglichen als der diffusive Regularisierer. Allerdings erhöht besonders der quadratisch elastische Ansatz die Rechenzeit. Mit Volumen- und Flächenregularisierung gelingt es, Faltungen der Registrierung zu unterbinden und Volumen- bzw. Flächenänderungen einzuschränken. Auch dies erhöht jedoch die Rechenzeit. Insgesamt wird herausgestellt, dass die Wahl des „passenden“ Regularisierers stark von den zu registrierenden Bildern und der damit verbundenen notwendigen Deformation abhängig ist.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
2	Bildregistrierung mit Regularisierung	3
2.1	Grundbegriffe	3
2.2	Ähnlichkeit von Bildern aus mathematischer Sicht	4
2.3	Regularisierer	5
2.3.1	Diffusive Regularisierung	6
2.3.2	Linear elastische Regularisierung	6
2.3.3	Quadratisch elastische Regularisierung	9
2.3.4	Wahl der Lamé-Konstanten	10
2.3.5	Volumenregularisierung	11
2.3.6	Flächenregularisierung	12
2.3.7	Zusammenfassung	13
3	Diskretisierung	17
3.1	Diskretisierung des Distanzmaßes	17
3.2	Diskretisierung der Deformation und der Regularisierer	19
3.3	Diskretisierung der Deformation: 2D	20
3.3.1	Aufbau des Deformationsgitters	21
3.3.2	Deformation als Linearkombination lokaler Basisfunktionen	23
3.3.3	Effizientes Auswerten der Deformation	24
3.4	Diskretisierung der Deformation: 3D	28
3.4.1	Aufbau des Deformationsgitters	29
3.4.2	Effizientes Auswerten der Deformation	30
3.5	Ableitung der Deformation	33
3.6	Diskretisierung der Regularisierer und Überführung in Matrix-Vektor- Notation: 2D	33
3.7	Diskretisierung der Regularisierer: 3D	38
3.8	Ableitung der Zielfunktion	39
3.8.1	Ableitung des Distanzmaßes	39
3.8.2	Ableitung der Regularisierer: 2D	40
3.8.3	Ableitung der Regularisierer: 3D	42
3.9	Optimierung mit dem Gauß-Newton-Verfahren	45
3.10	Multi-Level-Verfahren	46
3.11	Interpolation von Bild-Daten	47
4	Experimente und Ergebnisse	51
4.1	Verhalten der Regularisierer bei Elementardeformationen	51
4.1.1	Testdeformationen	52
4.1.2	Ergebnisse	54

Inhaltsverzeichnis

4.2	Registrierung	59
4.2.1	Testbilder	59
4.2.2	Ergebnisse	60
4.3	Diskussion	71
5	Ausblick	77
6	Notation	79
	Literaturverzeichnis	80

Abbildungsverzeichnis

2.1	Schlecht gestelltes Registrierungsproblem	5
2.2	Änderung der Abstandsverhältnisse bei der Deformation	7
2.3	Spannungs- und Kraftverhältnisse an starren und plastischen Materialien	9
2.4	Quader und Pyramide gleichen Volumens	12
2.5	Flächenberechnung mittels Kofaktor	13
3.1	Bildgitter	18
3.2	Deformationsgitter	19
3.3	Unterteilung einer Hauptzelle in zwei Dreiecke	21
3.4	Bilddiskretisierung in Dreiecke	22
3.5	Koordinatenaufbau des Deformationsgitters	23
3.6	1D: Erlangung der Funktion der Deformation ϕ durch Linearkombination lokaler Basisfunktionen	23
3.7	2D: Auswertung der Deformation ϕ durch Linearkombination lokaler Basisfunktionen	24
3.8	Bild- und Deformationsgitter des Bildgebietes	25
3.9	Bestimmung der Position eines Punktes durch Linearkombination	26
3.10	Bestimmung der Dreieckszugehörigkeit mittels Vorzeichen der Spannvektoren	27
3.11	Darstellung der 15 Knoten jedes Voxels	29
3.12	Zerlegung einer Hauptzelle in 24 Tetraeder	29
3.13	Bestimmung der Tetraederzugehörigkeit der Bildpunkte innerhalb der jeweiligen Pyramiden	31
3.14	Differenzenquotient auf einem Dreieck	34
3.15	Darstellung eines Registrierungsbeispiels unter Nutzung von Multi-Level	47
4.1	Deformation: Rotation	52
4.2	Deformation: volumenerhaltende Skalierung	52
4.3	Deformation: Skalierung mit Divergenz Null	53
4.4	Deformation: Nicht-lineare Deformation	53
4.5	Deformation: Scherung	54
4.6	Verhalten der Regularisierer bei Rotation des regulären Ausgangsgitters	55
4.7	Regularisierung bei Skalierungen	56
4.8	Regularisierung bei Scherung	57
4.10	Regularisierung von Skalierung und Volumenregularisierung	58
4.12	Registrierungsbeispiel: Kreis auf C (2D), Kugel auf Schale (3D)	60
4.13	Registrierungsbeispiel: Lunge	61
4.14	Registrierungsbeispiel: Rotierte Quadrate 2D	62
4.15	Registrierungsergebnisse: Kreis zu C, diffusiv	64

Abbildungsverzeichnis

4.16	Registrierungsergebnisse: Kreis zu C, diffusiv, volumenregularisierend	64
4.17	Registrierungsbeispiel: Kreis zu C, linear elastisch, volumenregularisierend	64
4.18	Registrierungsbeispiel: Kreis zu C, quadratisch elastisch	65
4.19	Registrierungsbeispiel: Lunge	66
4.20	Registrierungsbeispiel: Lunge, Determinate der Deformation	67
4.21	Registrierungsbeispiel: Kugel auf Schale, diffusiv und linear elastisch	70
4.22	Registrierungsbeispiel: Kugel auf Schale, quadratisch elastisch	71
4.23	Registrierungsbeispiel: Kugel auf Schale, Querschnitt der Endtemplates	72
4.24	Registrierungsbeispiel: Lunge, diffusiv und linear elastisch	73
4.25	Registrierungsbeispiel: Lunge, quadratisch elastisch	74
4.26	Registrierungsbeispiel: Lunge 3D, Querschnitt der Endtemplates	75
5.1	Beispiel Untersegmentierung	77

Tabellenverzeichnis

2.1	Übersicht der Regularisierer	15
4.1	Testreihen der Regularisierer im 2D und 3D.	51
4.2	Zusammenfassung der Elementardeformationen	55
4.3	Registrierungsergebnisse: Rotationsbeispiel	61
4.4	Registrierungsergebnisse: Kreis zu C, elastisch	63
4.5	Registrierungsergebnisse: Lunge	67
4.6	Registrierungsergebnisse: Kugel auf Schale	68
4.7	Registrierungsergebnisse: Lunge 3D	72

1 Motivation

„Ich hatte von meiner Arbeit niemand etwas gesagt; meiner Frau teilte ich nur mit, daß ich etwas mache, von dem die Leute, wenn sie es erfahren, sagen würden: Der Röntgen ist wohl verrückt geworden.“ – W. C. Röntgen in Briefe an L. Zehnder

Mittlerweile ist die Röntgendiagnostik nur noch eines von vielen bildgebenden Verfahren in der Medizin. Das *Durchleuchten* eines Körpers zur Diagnose pathologischer Befunde wie zum Beispiel Frakturen von Knochen und Gelenken oder Veränderungen von Geweben gehört heutzutage ebenso zur medizinischen Routineuntersuchung wie beispielsweise Blutanalysen. Durch bildgebende Verfahren wie Röntgen, Computertomographie (CT) oder Magnetresonanztomographie (MRT) ist es möglich, in das Innere eines menschlichen Organismus zu schauen und mögliche Pathologien festzustellen. Darüber hinaus ist es zur besseren Diagnostik sinnvoll, Informationen aus Bildern zu kombinieren, welche durch verschiedene Verfahren erzeugt worden sind. Allerdings birgt die vergleichende Betrachtung verschiedener Bilder Probleme und hieraus resultiert die Grundlage für die Entwicklung der Bildregistrierung. Angenommen, verschiedene Bilder sollen verglichen werden: Wie soll dieser Vergleich getätigt werden? Korrespondierende Strukturen in den Bildern sollen zur Überlagerung kommen. Der Patient kann bei der Erzeugung der Bilder anders gelegen haben, kann bei großen zeitlichen Abständen zu- oder abgenommen haben oder aber gewachsen sein. Auch Veränderungen, welche beispielsweise aus Atmung und Herzschlag resultieren, kommen vor. In Bezug auf gewebliche Veränderungen hat sich ein Tumor vielleicht vergrößert oder es sind Organe auf Grund von Operationen verändert worden. Um diese Probleme zu lösen, wird im Folgenden die sogenannte Bildregistrierung untersucht, wobei unter Bildregistrierung die geometrische Anpassung eines Objektes in einem Bild an ein Objekt in einem anderen Bild verstanden wird, sodass zusammengehörige Strukturen sich überlagern und die Bilder in geeignetem Sinn *ähnlich* sind. Zur Herstellung dieser Ähnlichkeit werden verschiedene Anforderungen an diese Anpassung gestellt. Diese können über den sogenannten Regularisierer erreicht werden.

In dieser Arbeit sollen verschiedene Modelle der Regularisierung für die Registrierung miteinander verglichen werden. Dabei werden sowohl einfache als auch komplexere Regularisierer untersucht und in verschiedenen Anwendungsbeispielen gegenübergestellt. Es soll deutlich gemacht werden, ob und wie die einzelnen Regularisierer die von der Registrierung vorgegebene Deformation beeinflussen. Ein erstes einfaches Modell eines Regularisierers liefert der diffusive Ansatz, welcher die Glattheit der Anpassung reguliert. Der diffusive Regularisierer ist einer der am häufigsten in der Literatur verwendete. Ein etwas komplexeres Modell liefert der elastische Regularisierer. Dieser ist physikalisch motiviert und betrachtet Längenänderungen bei der gewünschten Anpassung. Abhängig von der Anpassungsart werden dazu verschiedene elastische

1 Motivation

Ansätze untersucht. Zwar sind diese komplexer in ihrer Berechnung und Modellierung aufwändiger, allerdings wird im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt werden, dass sie bei großen Deformationen durchaus vorteilhaft sind. Zusätzlich wird noch eine weitere – für die medizinische Bildregistrierung oftmals sehr relevante – Eigenschaft betrachtet: Die Regularisierung von Volumen und Flächen in Verbindung mit der Anpassung der Bilder aneinander. Denn nur unter der Regularisierung von Volumen und Flächen kann gewährleistet werden, dass eine durchgeführte Anpassung der Bilder aneinander auch in der Realität beispielsweise aus anatomischer Sicht durchführbar ist, da in vivo zum Beispiel sowohl Organe als auch Knochen nur eine begrenzte Deformationsmöglichkeit haben.

In den nachfolgenden Kapiteln werden die Begriffe *Bildregistrierung*, *Anpassung*, *Regularisierung* und *Elastizität* erläutert. Dafür wird als erstes die Bildregistrierung aus mathematischer Sicht betrachtet. Anschließend werden die zu untersuchenden Regularisierer eingeführt. Zur numerischen Modellierung werden anschließend die Bausteine der Registrierung diskretisiert und an Bilddaten getestet. Dieses diskrete Modell basiert auf stückweise affinen Basisfunktionen. Es wird gezeigt, dass es bei dieser Wahl der Diskretisierung möglich ist, die Regularisierer numerisch exakt zu bestimmen. In einem letzten Schritt werden die vorgestellten Verfahren auf konstruierten Elementar-deformationen und realen Bilddaten getestet und untereinander verglichen.

2 Bildregistrierung mit Regularisierung

Bei der Bildregistrierung geht es darum, Bilder zu vergleichen. Es soll dabei ein Bild geometrisch an ein anderes angepasst werden, sodass korrespondierende Strukturen zur Überlagerung kommen und die Bilder in geeignetem Sinn ähnlich sind. Diese geometrische Anpassung wird als *Deformation* bezeichnet. *Ähnlichkeit* bedeutet hier, dass eine *Distanz* (D) zwischen den Bildern minimiert wird. Die dafür notwendige Deformation soll jedoch keine unerwünschten Eigenschaften beinhalten; sie soll also *plausibel* sein. Welche Eigenschaften genau unerwünscht sind, wird an späterer Stelle erläutert.

Eine Einführung in die Bildregistrierung ist beispielsweise in [1–3] gegeben. Nachfolgende Erläuterungen richten sich nach dieser Literatur. In diesem Kapitel werden zunächst einige Grundbegriffe und Bausteine der Bildregistrierung eingeführt. Die dafür notwendigen Notationen sind in Abschnitt 6 noch einmal aufgelistet.

2.1 Grundbegriffe

Unter einem d -dimensionalen *Bild* wird im Folgenden eine Funktion verstanden, die einem Ort $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ einen Grauwert aus den reellen Zahlen zuordnet. Der dabei betrachtete Bildausschnitt ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^d und wird im Folgenden als Bildraum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnet. Im weiteren Verlauf werden jeweils zwei Bilder betrachtet. Dasjenige, welches bei der Anpassung unverändert bleibt, wird als Referenzbild (R), dasjenige, welches an das Referenzbild angepasst wird, als Templatebild (T) bezeichnet. Das heißt es werden nun zwei Bilder

$$R : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R} \text{ und} \\ T : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R},$$

betrachtet. Für die Registrierung ist eine Deformation

$$\phi : \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$$

gesucht, die einem Ort $x \in \Omega$ einen Ort $\phi(x)$ im Templatebild zuordnet. Auf diese Weise wird die geometrische Anpassung des Templatebildes an das Referenzbildes realisiert, sodass nach der Registrierung

$$R(x) \approx T(\phi(x))$$

gilt. Um die Deformation mit der Ausgangsposition in Verbindung zu bringen, wird eine weitere Größe u – die *Verrückung* – eingeführt. Diese Funktion

$$u : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \text{ mit } u = \phi - \text{id}$$

2 Bildregistrierung mit Regularisierung

gibt die Differenz der Deformation und der Ausgangslage an, wobei

$$\text{id} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d, x \mapsto \text{id}(x) = x$$

die Identität bezeichnet.

Im folgenden Abschnitt wird nun geklärt, wie Ähnlichkeit von Bildern aus mathematischer Sicht formuliert werden kann. Die Herstellung der Ähnlichkeit, das heißt die Registrierung, erfolgt über eine Minimierung der Distanz und der unerwünschten Deformationseigenschaften. Es ist somit ein Optimierungsproblem mit Zielfunktion

$$J(R, T \circ \phi) = D(R, T \circ \phi) + \alpha S(\phi)$$

zu lösen, sodass $J(R, T \circ \phi) \stackrel{!}{\rightarrow} \min$, wobei $T \circ \phi$ das deformierte Templatebild beschreibt. Der erste Summand $D(R, T \circ \phi)$ beschreibt ein Distanzmaß und ist ein Maß für die Ähnlichkeit der Bilder; der zweite Summand $\alpha S(\phi)$ wird als gewichteter Regularisierer oder Glätter (engl. Smoother) bezeichnet und ist ein Maß für unerwünschte Deformationseigenschaften. Beide Bausteine werden später genauer erklärt.

2.2 Ähnlichkeit von Bildern aus mathematischer Sicht

Unter Ähnlichkeit zwischen Referenz- und Templatebild wird der Wert eines Funktionals – des Distanzmaßes – verstanden, welcher die Distanz zwischen den Bildern misst. Im Zuge dieser Arbeit wird als Distanzmaß die Summe der quadrierten Differenzen (kurz: SSD)

$$D(R, T) = \text{SSD}(R, T) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T(x) - R(x))^2 dx$$

der Grauwerte genutzt. Entsprechend dieses Maßes ist die Ähnlichkeit zwischen den Bildern groß, wenn der Wert des Distanzfunktionals klein ist und umgekehrt. Dieses Distanzmaß ist jedoch nur bei der monomodalen Registrierung sinnvoll, was bedeutet, dass die Bilder mit dem selben bildgebenden Verfahren erzeugt worden sein müssen. Unterschiedliche bildgebende Verfahren haben oftmals unterschiedliche Intensitäten für gleiche Objekte oder aber bilden nur bestimmte Strukturen – beispielsweise nur Knochen oder nur Weichgewebe – ab. Für solche – sogenannte multimodale Bildpaare – können komplexere Distanzmaße wie beispielsweise Mutual Information [4] genutzt werden. Bei der Distanzberechnung mittels Mutual Information werden Entropie und Grauwertdichtefunktion der Bilder genutzt, um die Distanz zu ermitteln. Ein anderer Ansatz wäre die Methode der Normalisierten Gradienten (NGF) [5], die Bildern eine hohe Ähnlichkeit zuordnet, wenn Kanten an gleichen Orten auftreten. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf der Regularisierung und Deformation. Die vorgestellten Methoden funktionieren für ein beliebiges Distanzmaß, allerdings werden sie hier nur mit dem SSD-Maß untersucht.

Gesucht ist nun eine Deformation ϕ , welche – angewandt auf das Templatebild – dieses dem Referenzbild möglichst ähnlich werden lässt. Es wird also genauer gesagt

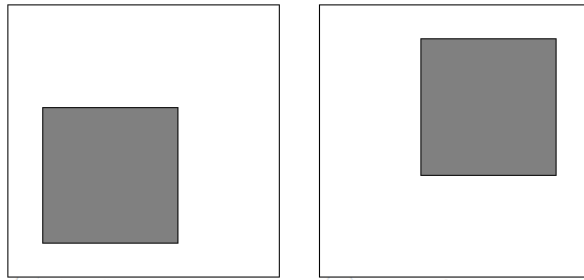


Abbildung 2.1: Beispiel für ein Registrierungsproblem [2] mit mehreren Lösungsmöglichkeiten: Es ist nicht eindeutig, welche Transformation auf das rechte Quadrat angewandt werden soll, um dieses dem linken ähnlich zu machen. Rotation, Translation und jede beliebige Verzerrung sind denkbar.

nicht nur die Distanz zwischen Template- und Referenzbild also $D(R, T)$, sondern die Distanz zwischen *deformiertem* Template- ($T \circ \phi := T(\phi)$) und Referenzbild also

$$D(R, T \circ \phi) = \text{SSD}(R, T \circ \phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T(\phi(x)) - R(x))^2 dx \quad (2.1)$$

betrachtet. Diese Distanz zwischen den beiden Bildern soll minimiert und das Registrierungsproblem auf *sinnvolle* Weise gelöst werden. Da nachfolgend nichtlineare Registrierung behandelt wird, ist demzufolge auch eine nichtlineare Deformation gesucht. Das Registrierungsproblem hat jedoch möglicherweise unendlich viele Lösungen. Es muss durch die Minimierung der Distanzfunktion nicht gewährleistet sein, dass eine gefundene Deformation ϕ stetig oder gar differenzierbar ist, genauso wenig wie vorausgesetzt werden kann, dass die gefundene Funktion ϕ injektiv ist. Dies sind jedoch die Anforderungen, die an eine sinnvolle Transformation (beispielsweise auf Grund anatomischer Plausibilität) gestellt werden. Um auch diese zu erfüllen, wird ein weiterer Term – ein sogenannter Regularisierer S – hinzugenommen, der Abweichungen von diesen Anforderungen bestraft.

2.3 Regularisierer

Im Allgemeinen ist die Lösung eines Registrierungsproblems nicht eindeutig. Abbildung 2.1 zeigt beispielhaft ein Registrierungsproblem, bei dem nicht klar hervorgeht, welche Transformation auf das rechte Quadrat angewandt werden soll, um es dem linken ähnlich zu machen. Es ist denkbar das rechte Quadrat entweder um den Bildmittelpunkt zu rotieren, es zu verschieben oder aber sogar beliebig zu deformieren, lediglich unter der Einschränkung, dass gleiche Farbwerte aufeinander abgebildet werden. Der Regularisierer beeinflusst die Lösung des Registrierungsproblems. Durch die Einführung dieses Strafterms $S(\phi)$ können unerwünschte Eigenschaften der Deformation vermindert werden. Über die Gewichtung mit einem zusätzlichen Parameter α bietet sich die Möglichkeit, Regularisierer und Distanzmaß in unterschiedlichem Verhältnis zu betrachten und zwischen Ähnlichkeit und Regularität abzuwägen. Nachfolgend werden verschiedene Regularisierer betrachtet, welche jeweils verschiedene

2 Bildregistrierung mit Regularisierung

unerwünschte Eigenschaften der Deformationen bestrafen. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt auf dem Vergleich der fünf im Folgenden vorgestellten Regularisierer – diffusiv, linear elastisch, quadratisch elastisch, Volumen und Flächen. Es sollen Eigenschaften, Verhalten und Vorteile der Regularisierer aufgezeigt werden.

2.3.1 Diffusive Regularisierung

Das Ziel der diffusiven Regularisierung besteht darin, eine glatte Deformation bzw. Verrückung zu erhalten. Ein dahingehender Ansatz bestraft die Ableitungen der Verrückung [1, 3]. Der diffusive Regularisierer und damit die Größe der „Nicht“-Glattheit ist mittels

$$\begin{aligned} S^{\text{diff}}(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla u\|_F^2 \, dx = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} \|\nabla u_j\|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\partial_1 u_1\|^2 + \|\partial_2 u_1\|^2 + \dots + \|\partial_d u_1\|^2 + \dots + \|\partial_1 u_d\|^2 + \dots + \|\partial_d u_d\|^2 \, dx \end{aligned}$$

definiert. $\|\cdot\|_F$ bezeichnet dabei die Frobeniusnorm und ∇u die Jacobimatrix von u . Der Regularisierer hängt hier von u ab. Da jedoch die Verrückung mit $u = \phi - \text{id}$ berechnet werden kann, ist das Argument auch schnell auf ϕ zu überführen.

Durch die Verwendung der Ableitung in Form der Jacobimatrix ergibt sich bei diesem Regularisierer eine Invarianz gegenüber Translationen, welche durch Addition einer Konstanten erreicht werden.

2.3.2 Linear elastische Regularisierung

Als weiterer Ansatz zur Regularisierung wird das Modell der Elastizität nach [6–8] gewählt. Dieser Ansatz ist physikalisch motiviert und betrachtet Längenänderungen. Unter Elastizität wird das Verhalten eines Körpers verstanden, bei Krafteinwirkung seine Form zu verändern und bei anschließender Kraftaufhebung in seinen Ausgangszustand zurückzukehren. Dieses Modell beschreibt somit entstehende Spannungsverhältnisse bei der Verformung eines Körpers. Angenommen, die aus der Registrierung resultierende Deformation würde auf das im Templatebild dargestellte Objekt in der realen Welt angewandt, würden sich auch in diesem bei Verformung Kräfte entwickeln. Generell können für einen Körper oder ein Objekt zwei Zustände beschrieben werden: Eine Referenzkonfiguration, die ein Objekt in spannungsfreiem und von äußeren Kräften unbeeinflusstem Zustand annehmen würde, und ein zweiter Zustand, der über die Deformation des Objektes gegeben ist.

Zur Erstellung eines solchen Modells wird nun ein Dehnungstensor E eingeführt, welcher ein Maß für die lokale Verrückung darstellt, und das elastische Potential W (engl. Work) als Maß für die zur Deformation nötige zu verrichtende Arbeit. Beide Größen werden über

$$W = \mu \, \text{tr}(E^2) + \frac{\lambda}{2} \, \text{tr}(E)^2 \quad (2.2)$$

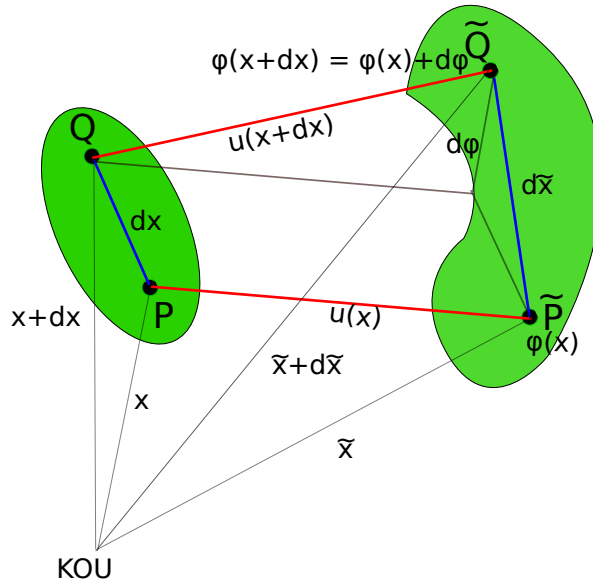


Abbildung 2.2: Änderung der Abstandsverhältnisse zwischen zwei Punkten nach der Deformation [7]. Links: Ausgangsposition, rechts: deformiertes Gebiet; KOU := Koordinatenursprung

in Verbindung gebracht [7]. Die Parameter μ und λ sind die sogenannten Lamé-Konstanten, deren Funktion in Abschnitt 2.3.4 näher beschrieben wird.

Wenn Deformationen bzw. Dehnungen betrachtet werden, bringt dies nicht nur den Aspekt mit sich, dass sich Orte ändern, sondern auch deren relative Abstände zueinander. Diese Änderung der Abstände zwischen zwei deformierten Orten $\phi(x)$ und $\phi(x + dx)$ innerhalb eines Bildes wird in Abbildung 2.2 genauer betrachtet: Dargestellt ist auf der linken Seite ein Gebiet mit zwei Punkten P und Q . Nach der Deformation ist sowohl die Form des Gebietes als auch der Abstand zwischen P und Q verändert worden (rechts). Die Deformation, die ein Punkt x erfahren hat, wird durch $\phi(x) = \tilde{x}$ repräsentiert. Der Abstand zwischen zwei Punkten P und Q ist

$$\|Q - P\| = \|(x + dx) - x\|.$$

Der korrespondierende Abstand im transformierten Bild ist entsprechend

$$\|\phi(x + dx) - \phi(x)\|. \tag{2.3}$$

Mit der Taylorentwicklung ersten Grades folgt

$$\begin{aligned} \phi(x + dx) &= \phi(x) + \nabla\phi(x) dx + \mathcal{O}(\|dx\|^2) \\ \Leftrightarrow \phi(x + dx) - \phi(x) &= \nabla\phi(x) dx + \mathcal{O}(\|dx\|^2) \\ \Rightarrow \|\phi(x + dx) - \phi(x)\|^2 &\approx \|\nabla\phi(x) \cdot dx\|^2 \\ &= dx^T \underbrace{\nabla\phi^T \nabla\phi}_{=:C} dx, \end{aligned}$$

2 Bildregistrierung mit Regularisierung

das heißt, die Längenänderung ist näherungsweise durch $dx^\top \nabla \phi^\top \nabla \phi dx$ beschrieben.

Der Faktor C heißt *Cauchy-Greenscher-Verzerrungstensor* und ist ein Maß für die Längenänderung. Mit

$$\begin{aligned} C &= \nabla \phi^\top \nabla \phi = (I + \nabla u)^\top \cdot (I + \nabla u) \\ &= \nabla u + \nabla u^\top + \nabla u^\top \cdot \nabla u + I \\ \Leftrightarrow C - I &= \nabla \phi^\top \cdot \nabla \phi - I = \nabla u + \nabla u^\top + \nabla u^\top \cdot \nabla u \end{aligned} \quad (2.4)$$

kann die Abweichung von der Identität ($C - I$) über die Jacobimatrix der Verrückung u beschrieben werden. Gilt nach der Deformation $C \approx I$, hat bei der Deformation kaum eine Änderung der Längenverhältnisse eines Objektes stattgefunden. Bei Deformationen, die nur kleine Änderungen aufweisen, also für die $\|\nabla u\|$ klein ist, überwiegen die ersten beiden Summanden der rechten Gleichungsseite, während der quadratische Summand sich dann eine Ordnung kleiner verhält. Für solche kleinen Deformationsänderungen ist für die Regularisierung eine Approximation über $E^{\text{le}}(u) = \nabla u + \nabla u^\top$ mit

$$E_{ij}^{\text{le}}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5)$$

also ausreichend. Für die mechanische Arbeit gilt dann

$$W(E^{\text{le}}(u)) = \mu \left\| \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^\top) \right\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \text{div}(u)^2,$$

woraus sich der linear elastische Regularisierer

$$\begin{aligned} S^{\text{le}}(u) &= \int_{\Omega} W(E^{\text{le}}(u)) \, dx \\ &= \int_{\Omega} \mu \left\| \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^\top) \right\|_F^2 + \frac{\lambda}{2} \text{div}(u)^2 \, dx \end{aligned}$$

ergibt. Wie auch schon bei der diffusiven Regularisierung ist dieser Regularisierer invariant gegenüber Translationen.

Dieser Regularisierer modelliert die lineare Elastizität als einfachste Form des Hookeschen Gesetzes $F = k \cdot \Delta L$. Nach diesem Verhalten verhalten sich starre Materialien in ihrer Längenänderung (ΔL) zunächst proportional zur einwirkenden Kraft (F) [8]. Das Proportionalitätsverhältnis k ist dabei lediglich vom Material abhängig. Bei noch größerer Krafteinwirkung durchlaufen jedoch beispielsweise Metalle auch noch einen plastischen Bereich, bevor es schließlich zum Bruch kommt. Dieser Aspekt soll allerdings außer Acht gelassen werden, da er bei harten und spröden Materialien – wie Knochen – verhältnismäßig klein ist. Für solche Materialien ist der Ansatz der Regularisierung mit linearer Elastizität also gerechtfertigt. Allerdings sollen nicht nur Materialien mit linearen Elastizitätseigenschaften registriert werden, sondern auch solche, die sich plastisch verhalten, wie Gummi oder Muskeln, Weichgewebe sowie Organe (vgl. Abbildung 2.3). Ein weiterer Grund, einen anderen Ansatz zu motivieren, ist der Zusammenhang zur Größe der Deformationsänderung nach Gleichung (2.4).

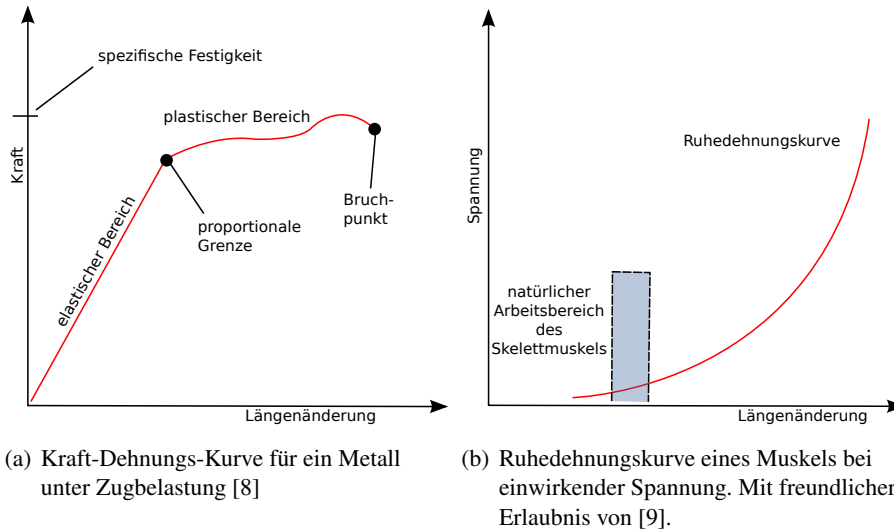


Abbildung 2.3: Spannungs- und Kraftverhältnisse an starren und plastischen Materialien; Spannung = Kraft/Fläche. Die Ruhedehnung (rechts) beschreibt die durch Belastung hervorgerufene Längenveränderung eines nicht kontrahierten Skelettmuskels.

Bei großen Deformationsänderungen überwiegt der quadratische Term und kann nicht mehr vernachlässigt werden. Deswegen wird im nächsten Abschnitt noch eine Erweiterung eingeführt, die zu dem bisher behandelten Term noch den quadratischen Teil hinzufügt.

2.3.3 Quadratisch elastische Regularisierung

Bei plastischen Materialien oder bei großen Deformationsänderungen reicht das Modell der linearen Elastizität nicht mehr aus. Das bisher bekannte lineare Modell der Elastizität wird nun also noch um die zunächst vernachlässigte quadratische Komponente erweitert und bildet so das Modell der quadratischen Elastizität mit Dehnungstensor

$$E_{ij}^{qe} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad (2.6)$$

also

$$E^{qe} = \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u,$$

wobei der erste Teil die schon bekannte lineare Näherung an die Verzerrung beschreibt. Das Potential kann damit durch

$$W(E^{qe}(u)) = \mu \operatorname{tr}(E^{qe})^2 + \frac{\lambda}{2} (2 \operatorname{div}(u) + \|\nabla u\|_F^2)^2$$

ausgedrückt werden.

2 Bildregistrierung mit Regularisierung

Für die Regularisierung wird nun der quadratisch elastische Regularisierer

$$S^{\text{qe}}(u) = \int_{\Omega} W(E^{\text{qe}}(u)) \, dx = \int_{\Omega} \mu \operatorname{tr}(E^{\text{qe}^2}) + \frac{\lambda}{2} (2 \operatorname{div}(u) + \|\nabla u\|_F^2)^2 \, dx$$

betrachtet.

Dieser Regularisierer ist rotations- und translationsinvariant, das heißt invariant bezüglich rigiden Deformationen, was die folgende Betrachtung zeigt: Sei A die Matrix zur Realisierung einer rigiden Deformation. Dann gilt

$$\phi(x) = A x + b$$

und A ist orthogonal. Es gilt jedoch auch

$$\begin{aligned} \nabla \phi(x) &= A \\ u(x) &= \phi(x) - \operatorname{id} = A x + b - x \\ \nabla u(x) &= A - I \end{aligned}$$

mit I als Einheitsmatrix. Der Dehnungstensor des quadratisch elastischen Regularisierers kann damit zu

$$E^{\text{qe}} = (A - I) + (A - I)^{\top} + (A - I)^{\top}(A - I)$$

umformuliert werden. Wird diese Gleichung aufgelöst, ergibt sich aus

$$\begin{aligned} E^{\text{qe}} &= A + A^{\top} - 2I + AA^{\top} - AI^{\top} - A^{\top}I + I \\ &= A + A^{\top} - I + AA^{\top} - A - A^{\top} \\ &\stackrel{A \text{ orth.}}{=} 0 \end{aligned}$$

die Invarianz des Regularisierers gegenüber rigiden Transformationen.

2.3.4 Wahl der Lamé-Konstanten

Nun müssen noch die Werte für μ und λ passend gewählt werden. Diese sogenannten Lamé-Konstanten setzen sich jeweils aus dem *Elastizitätsmodul* \mathcal{E} und der *Querkontraktions-* oder *Poissonzahl* ν zusammen. Das Elastizitätsmodul ist ein Maß für das Verhältnis von Spannung und Dehnung, die ein Material bei Deformation erfährt [8]. Die Dehnung beschreibt die Verformung eines Objektes bezüglich seines Ausgangszustands, woraus Spannungen resultieren, die auf dessen Material wirken. Bei einer elastischen Deformation besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Die Querkontraktion dient dazu, den Zusammenhang zwischen Dickenänderung und relativer Längenänderung eines Körpers herzustellen, wenn Kräfte auf diesen einwirken. Die Lamé-Konstanten lassen sich aus diesen beiden Größen nun durch

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu \mathcal{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu &= \frac{\mathcal{E}}{2(1 + \nu)} \end{aligned}$$

berechnen.

Da langfristig die Registrierung auf medizinische Daten angewandt werden soll, werden beispielsweise die Lamé-Konstanten für Muskeln und Knochen benötigt. Diese können mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{Knochen} &= 15 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} & \mu_{Knochen} &= 80 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \\ \mathcal{E}_{Muskel} &= 1.5 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} & \nu_{Muskel} \approx \nu_{Gummi} &= 0.5 \frac{N}{m^2} \end{aligned}$$

nach [8, 10, 11] angegeben werden. Da der Regularisierer über einen zusätzlichen Parameter α gewichtet wird, ist jedoch nur das Verhältnis der beiden Konstanten zueinander wichtig. Dieses kann ebenfalls mit den genannten Formeln und anschließender Normierung erhalten werden.

2.3.5 Volumenregularisierung

Die elastischen Regularisierer sind über die Betrachtung von Längenänderungen motiviert worden. Zur Vervollständigung dieser Betrachtung ist auch eine Regularisierung von Volumen bzw. Flächen notwendig, die nun vorgestellt wird. Eine Eigenschaft der Deformation, die unterdrückt werden soll, ist eine große Änderung von Volumen. Mit Hilfe des Transformationssatzes [12]

$$\int_{\phi(\Omega)} dx = \int_{\Omega} |\det(\nabla\phi)| dx$$

unter der Bedingung, dass ϕ diffeomorph ist, bestimmt sich das Maß für die Volumenänderung über die Funktionaldeterminante

$$\det(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

im zweidimensionalen Fall bzw.

$$\det(\nabla\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

im dreidimensionalen Fall [12, 13]. Aus dem Satz über Implizite Funktionen [14] folgt, dass für glatte und bijektive Deformationen, also solche die keine Spiegelungen enthalten, die Invertierbarkeit von $\nabla\phi$ einerseits und $\det(\nabla\phi) > 0$ andererseits gelten muss. Es werden im Folgenden also nur Deformationen mit positiver Determinante zugelassen. Um dies zu realisieren und zusätzlich auch große Volumenänderungen gegenüber kleinen stärker gewichten zu können, wird eine Hilfsfunktion

$$\psi(z) = \begin{cases} \frac{(z-1)^2}{z} & , \text{ falls } z > 0 \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (2.7)$$

2 Bildregistrierung mit Regularisierung

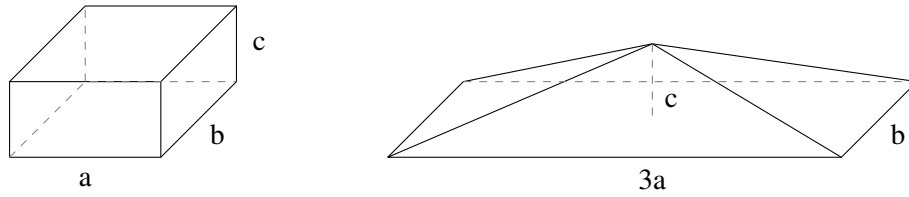


Abbildung 2.4: Quader und zu einer Pyramide deformierter Quader gleichen Volumens

gewählt, sodass $\psi(\det(\nabla\phi))$ einen hohen Wert liefert, wenn das Volumen vom Ausgangsvolumen stark abweicht, oder kleine Werte liefert, wenn nur kleine Volumenänderungen stattfinden. Des Weiteren gilt die Symmetrieeigenschaft $\psi(z) = \psi\left(\frac{1}{z}\right)$, mit der eine Volumenexpansion genauso bestraft wird wie eine Volumenkompression. Es wird der Volumen-Regularisierer

$$S^{\text{Vol}}(\phi) = \int_{\Omega} \psi(\det(\nabla\phi)) dx$$

nach [13] betrachtet. Es folgt, dass der Regularisierer gegen volumenerhaltende, z.B. rigide Deformationen invariant ist.

2.3.6 Flächenregularisierung

Die Regularisierung von Volumenänderungen allein reicht jedoch im Dreidimensionalen im Allgemeinen nicht aus. Es ist möglich, verschiedene Körper so zu deformieren, dass deren Volumen gleich bleibt, Flächen sich jedoch stark verändern. Um diesen Aspekt zu verdeutlichen, soll ein einfaches Beispiel betrachtet werden: Gegeben sei ein Quader mit Seitenlängen a , b und c und eine gerade Pyramide mit Seitenlängen der Grundfläche von $3a$ und b sowie der Höhe c (vgl. Abbildung 2.4).

Für beide Körper ergibt sich ein Volumen $V = a b c$. Unter dem Aspekt der Deformation kann die konstruierte Pyramide auch als stark deformierter Quader angesehen werden, bei dem die untere Seitenfläche vergrößert und die obere auf einen Punkt zusammengeschrumpft ist. Beim Vorgang der Registrierung sollen solche Arten von Deformationen verhindert werden.

Um dies zu realisieren wird eine weitere Größe – der *Kofaktor* [15] – eingeführt. Allgemein ist der Kofaktor einer quadratischen Matrix A definiert als

$$\begin{aligned} \text{cof}(A) &= (d_{ij})_{i,j=1}^n \\ d_{ij} &= (-1)^{i+j} \det(\bar{A}_{ij}), \end{aligned}$$

wobei \bar{A}_{ij} den Minor $(n-1)$ ter Ordnung der Matrix A beschreibt, also aus A durch Streichen von Zeile i und Spalte j hervorgeht. Im vorliegenden Fall des Kofaktors von $\nabla\phi$ im 3D gilt

$$\text{cof}(\nabla\phi) = [\partial_2\phi \times \partial_3\phi \quad \partial_1\phi \times \partial_3\phi \quad \partial_1\phi \times \partial_2\phi].$$

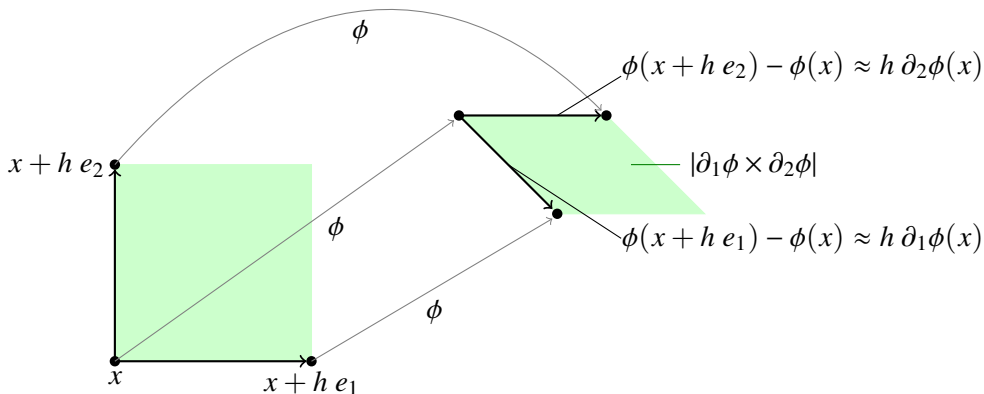
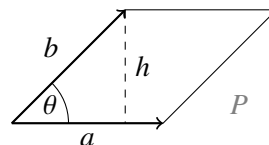


Abbildung 2.5: Flächenberechnung mittels Kofaktor: Angegeben ist die Deformation einer Fläche, welche durch die Punkte x , $x + h e_1$ und $x + h e_2$ aufgespannt wird. Die deformierte Fläche kann über das Kreuzprodukt der partiellen Ableitungen bestimmt werden.

Die Kreuzprodukte sind ein Maß für die aufgespannten Flächen. Diese Eigenschaft wird durch folgende Betrachtung verdeutlicht: Da $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin(\angle(a, b))$ gilt [16] und der Flächeninhalt (F) eines Parallelogramms, welches durch die Vektoren a und b aufgespannt wird, mittels

$$\begin{aligned}
 F &= \|a\| \|h\| \\
 \sin(\theta) &= \frac{\|h\|}{\|b\|} \\
 \Rightarrow F &= \|a\| \|b\| \sin(\theta) = \|a \times b\|
 \end{aligned}$$



berechnet werden kann, folgt – übertragen auf $\partial_i \phi$ – der Zusammenhang zwischen Kofaktor und Flächengrößen von Objekten. Abbildung 2.5 veranschaulicht diese Betrachtung.

Die Einführung des Kofaktors als Regularisierer ist für die vorliegenden Untersuchungen nur im Dreidimensionalen sinnvoll. Der Flächenregularisierer soll Flächenkollabierungen verhindern. Er wird über

$$S^{\text{Cof}}(\phi) = \int_{\Omega} (\|\text{cof}(\nabla \phi)\|^2 - 3)^2 dx$$

definiert. Dieser Regularisierer ist invariant gegenüber flächenerhaltenden, wie beispielsweise rigiden, Deformationen.

2.3.7 Zusammenfassung

Hier wird noch einmal ein Überblick über die zu untersuchenden Regularisierer gegeben: In Tabelle 2.1 sind jeweils die Definitionen der Regularisierer und jene Deformationsarten, welche nicht vom jeweiligen Regularisierer bestraft werden können,

2 Bildregistrierung mit Regularisierung

aufgelistet. Zum Vergleich der Regularisierer werden später in Kapitel 4 zunächst der *diffusive, linear elastische und quadratisch elastische* einzeln bei der Registrierung verwendet. Die Verwendung des diffusiven Regularisierers ist ein einfaches Modell gegenüber dem quadratisch elastischen Regularisierer, dessen Berechnung aufwändiger ist und dieser somit als Regularisierer höherer Komplexität angesehen wird. Anschließend wird jeweils einer dieser Regularisierer mit Volumen- (2D und 3D) und mit dem Flächenregularisierer (3D) gepaart, welche ebenfalls in ihrer Berechnung aufwändig sind. Die bisherige Zielfunktion $J(R, T) = D(R, T) + \alpha S(u)$ wird somit als

$$J(R, T) = D(R, T) + \underbrace{\alpha_m S^m(u) + \alpha_{\text{Vol}} S^{\text{Vol}}(\phi) + \alpha_{\text{Cof}} S^{\text{Cof}}(\phi)}_{\alpha S(\phi)}$$

verstanden, wobei $S^m(u)$ jeweils der diffusive, linear elastisch oder quadratisch elastische Regularisierer ist.

In den nachfolgenden zwei Kapiteln werden die dargelegten Komponenten der Bildregistrierung diskretisiert, um die Zielfunktion mit numerischen Verfahren minimieren zu können. Anschließend werden ihre Eigenschaften an Elementardeformationen und realen Testbildern überprüft.

Regularisierer	Berechnung	Kern
diffusiv	$S^{\text{diff}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \ \nabla u\ ^2 dx$	Translation
elastische Ansätze	$S^{\text{le/qe}} = \int_{\Omega} \mu \operatorname{tr}(E^2) + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(E)^2 dx$	
linear elastisch	$E_{ij}^{\text{le}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{x_j} + \frac{\partial u_j}{x_i} \right)$ $E^{\text{le}} = \nabla u + \nabla u^T$	Translation
quadratisch elastisch	$E_{ij}^{\text{qe}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{x_j} + \frac{\partial u_j}{x_i} \right) + \sum_k \frac{\partial u_i}{x_k} \cdot \frac{\partial u_j}{x_k}$ $E^{\text{qe}} = \nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u$	rigide Deformationen
Volumen	$S^{\text{Vol}} = \int_{\Omega} \psi(\det(\nabla \phi)) dx$	rigide Deformationen
Flächen	$S^{\text{Cof}} = \int_{\Omega} (\ \operatorname{cof}(\nabla \phi)\ ^2 - 3)^2 dx$	rigide Deformationen

Tabelle 2.1: Übersicht der Regularisierer, ihrer Berechnung und ihres Kerns.

3 Diskretisierung

Im vorangehenden Kapitel sind die Grundlagen der Registrierung dargelegt worden. Es bleibt zu klären, wie diese nun am Computer umgesetzt werden sollen. Zur Registrierung soll das Optimierungsproblem

$$J(R, T) = D(R, T) + \alpha S(\phi) \stackrel{!}{\rightarrow} \min$$

gelöst werden. Dieses kann nicht in geschlossener Form analytisch gelöst werden und wird daher auf dem Computer numerisch gelöst. Im Verlauf dieses Kapitels wird eine Diskretisierungsmöglichkeit vorgestellt, welche eine einfache Struktur aufweist und die exakte Berechnung der vorgestellten Regularisierungsbausteine ermöglicht. Zur Diskretisierung wird der *first-discretize-then-optimize*-Ansatz [17, 18] verwendet. Das heißt, dass die vorgestellten kontinuierlichen Objekte zunächst diskretisiert werden und dann mit einem Gauß-Newton-Verfahren das diskrete Optimierungsproblem gelöst wird. Die dafür erforderlichen Ausdrücke und Verfahren werden hier hauptsächlich am zweidimensionalen Fall erläutert. Sie lassen sich aber analog ins Höherdimensionale übertragen.

3.1 Diskretisierung des Distanzmaßes

Für die Diskretisierung des Distanzmaßes ist die Diskretisierung des Integrals

$$D(R, T \circ \phi) = \text{SSD}(R, T \circ \phi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T(\phi(x)) - R(x))^2 dx$$

nötig. Dazu wird eine einfache Form der Quadratur genutzt: die Mittelpunkregel [19, 20]. Vereinfachend wird angenommen, dass das Bildgebiet stets achsenparallel und rechteckig ist. Dieses Bildgebiet

$$\Omega = (\omega_1, \omega_2) \times (\omega_3, \omega_4)$$

wird nun zur Berechnung des Distanzmaßes durch ein sogenanntes *Cell-Centered-Gitter* von $p \times q$ Gitterzellen im Zweidimensionalen (3D: Bildgebiet $\Omega = (\omega_1, \omega_2) \times (\omega_3, \omega_4) \times (\omega_5, \omega_6)$ mit $p \times q \times r$ Gitterzellen) diskretisiert. Die Längen b_i einer solchen Gitterzelle in Richtung x_i ergeben sich über

$$\begin{aligned} b_1 &= (\omega_2 - \omega_1) / p \\ b_2 &= (\omega_4 - \omega_3) / q \\ (b_3 &= (\omega_6 - \omega_5) / r). \end{aligned}$$

3 Diskretisierung

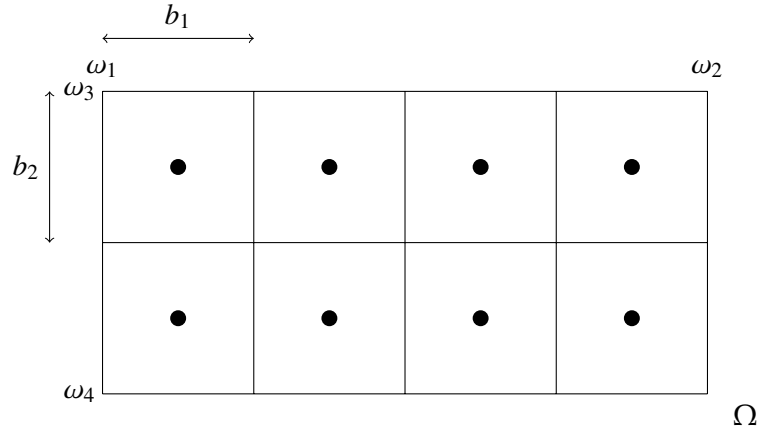


Abbildung 3.1: Aufteilung des Gebietes Ω in ein Cell-Centered-Bildgitter mit $p = 4$, $q = 2$ Gitterzellen und damit Teilgebiete Ω_{ij} . Die Zellmittelpunkte entsprechen den Cell-Centered-Gitterknoten.

Ein solches Gitter wird im Folgenden als *Bildgitter* bezeichnet. Es ergeben sich damit die Gitterpunkte

$$x_{ij} = \left(\omega_1 + \frac{b_1}{2} + (i-1)b_1, \omega_3 + \frac{b_2}{2} + (j-1)b_2 \right), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q$$

im Zweidimensionalen und

$$x_{ijk} = \left(\omega_1 + \frac{b_1}{2} + (i-1)b_1, \omega_3 + \frac{b_2}{2} + (j-1)b_2, \omega_5 + \frac{b_3}{2} + (k-1)b_3 \right), \\ i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r$$

im dreidimensionalen Fall. Ein Beispiel für ein zweidimensionales Bildgitter ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Aus Gleichung (2.1) ergibt sich damit unter Verwendung der Mittelpunkregel das diskretisierte Distanzmaß

$$\begin{aligned} D(R, T(\phi)) &= \text{SSD}(R, T(\phi)) = \int_{\Omega} (T(\phi(x)) - R(x))^2 dx \\ &= \sum_{i,j} \int_{\Omega_{ij}} (T(\phi(x)) - R(x))^2 dx \\ &\approx \frac{b_1 b_2}{2} \sum_{i,j} (T(\phi(x_{ij})) - R(x_{ij}))^2, \end{aligned}$$

wobei mit b_i die Länge der Gitterzellen in Richtung i und mit Ω_{ij} das ij -te Teilgebiet von Ω bezeichnet wird. Die Namensgebung für das Distanzmaß im kontinuierlichen und im diskreten Fall wird in dieser Arbeit synonym verwendet, das heißt im Folgenden bezeichnet

$$D(R, T(\phi)) = \sum_{i,j} (T(\phi(x_{ij})) - R(x_{ij}))^2$$

auch das diskrete Distanzmaß.

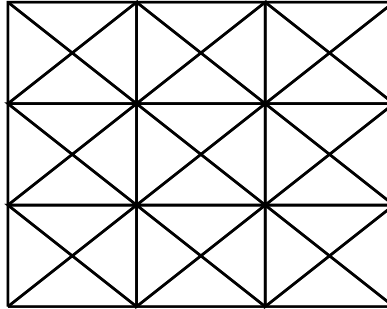


Abbildung 3.2: Darstellung des Deformationsgitters im 2D. Die Deformation ϕ wird auf Dreiecken realisiert, deren Funktionswerte an den Eckpunkten des Gitters parametrisiert sind. Jeder Eckpunkt eines Dreiecks ist ein Gitterpunkt des Deformationsgitters und jedes Dreieck bildet ein Teilgebiet Ω_j . Dadurch ist die Deformation auf jedem Dreieck stückweise affin und differenzierbar.

3.2 Diskretisierung der Deformation und der Regularisierer

Die nächsten für die Registrierung notwendigen Bausteine sind die Diskretisierung der Deformation und der Regularisierer. Die Motivation der hier gewählten Diskretisierung von beiden stehen in direktem Zusammenhang. Alle Regularisierer hängen von der Jacobimatrix $\nabla\phi$ bzw. ∇u ab. Es wird daher eine Diskretisierung genutzt, auf der die Deformation stückweise affin und global stetig ist, sodass $\nabla\phi$ stückweise konstant ist. Dies hat den Vorteil, dass die Regularisierer – unabhängig ihrer Komplexität – auf den einzelnen Elementen (also im 2D den Dreiecken) *exakt* bestimmt werden können. Der Grund dafür ist, dass die Ableitung der Deformation bzw. der Verrückung dann auf jedem Element konstant ist und somit an jedem beliebigen Ort innerhalb eines Elementes den gleichen Wert aufweist. Diese Diskretisierung wird in dieser Arbeit über Triangulation in Dreiecke im Zweidimensionalen bzw. Tetraeder im Dreidimensionalen realisiert, welche als einfache Formen von finiten Elementen angesehen werden können. Dazu wird das Bildgebiet Ω in disjunkte Dreiecke (2D) bzw. Tetraeder (3D) Ω_j zerlegt, sodass

$$\Omega = \bigcup_j \Omega_j$$

gilt. Ein Beispiel für ein solches Gitter im Zweidimensionalen ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Das Bildgebiet Ω wird über Dreiecke in Teilgebiete Ω_j zerlegt. Dementsprechend werden zwei Mengen

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \{j \mid \Omega_j \text{ ist Triangulationselement aus } \Omega\} \\ \mathcal{K} &= \{k \mid x_k \text{ ist Eckpunkt eines } \Omega_j, j \in \mathcal{J}\} \end{aligned}$$

definiert.

3 Diskretisierung

Mit der Deformation $\phi \in C^0(\Omega)$ auf dem gesamten Bildgebiet und stückweise affin, ist $\phi|_{\Omega_j}$ eine affine Abbildung. Mathematisch ausgedrückt gilt also

$$\begin{aligned}\phi|_{\Omega_j} &= A x + b \\ \nabla\phi|_{\Omega_j} &= A.\end{aligned}$$

Der Deformationswert eines Punktes ist ein Element

$$\phi \in \left\{ \phi = \sum_{k \in \mathcal{K}} y_k \cdot \Phi_k : y_k \in \mathbb{R}^d \right\}$$

einer Grundmenge aus der Linearkombination lokaler Basisfunktionen Φ . Diese Eigenschaft wird in Abschnitt 3.3.2 näher erläutert. Durch dieses Vorgehen ergeben sich an den Triangulations-Gitterpunkten Koeffizienten y , mit denen die Deformation ϕ an diesen Eckpunkten parametrisiert wird. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{k \in \mathcal{K}} y_k \Phi_k \quad \text{mit} \\ \phi(x_k) &= y_k, \quad k \in \mathcal{K}.\end{aligned}$$

Die Funktionswerte von ϕ können aufgrund der Affinität exakt an jedem Punkt des Bildgebietes Ω berechnet werden und $\nabla\phi$ ergibt sich innerhalb eines Dreiecks bzw. Tetraeders über einen Differenzenquotienten.

Allgemein lässt sich jeder, der hier betrachteten Regularisierer als

$$S(\phi) = \int_{\Omega} \kappa(\nabla\phi(x)) dx$$

darstellen, wobei $\kappa : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion abhängig vom Typ (diffusiv, linear elastisch, quadratisch elastisch, Volumen oder Flächen) ist. Gilt nun

$$\nabla\phi|_{\Omega_j} =: \nabla\phi_j = \text{const.},$$

folgt mit $|\Omega_j| := \int_{\Omega_j} dx$

$$S(\phi) = \sum_j |\Omega_j| \kappa(\nabla\phi_j).$$

Im weiteren Verlauf wird nun die Konstruktion der Triangulation und die Berechnung der Regularisierer näher erläutert.

3.3 Diskretisierung der Deformation: 2D

Für die Deformation des Bildes muss $T \circ \phi$ bestimmt werden. Dafür muss die Deformation, die über die Koeffizienten an den Deformationsgitterpunkten parametrisiert ist, an jedem Cell-Centered-Gitterpunkt des Bildgebietes Ω ausgewertet werden.

3.3 Diskretisierung der Deformation: 2D

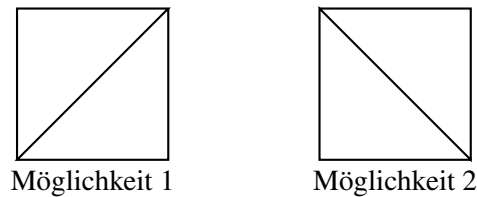


Abbildung 3.3: Unterteilung einer Hauptzelle in zwei Dreiecke. Bei der Registrierung könnten sich mit diesem Ansatz jedoch Vorzugsrichtungen ergeben.

Zur Erinnerung: Die Deformation ϕ stellt im Zweidimensionalen eine Abbildung vom $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dar. Durch die gewählte Triangulation ist die Deformation auf diesen finiten Elementen stückweise affin, differenzierbar und global stetig. Aus Abbildung 3.2 ist bereits die Grundidee dieser Gitterstruktur bekannt. Nun wird das genaue Vorgehen zur Erstellung dieses Deformationsgitters erläutert.

Die Bildung der Dreiecke erfolgt in einem ersten Schritt durch die Unterteilung des Bildgebietes in rechteckige Hauptzellen welche wiederum in vier Dreiecke unterteilt werden. Ein alternativer Ansatz der Triangulation wäre die Unterteilung einer Hauptzelle in nur zwei Dreiecke, wie es in Abbildung 3.3 dargestellt ist. Wie an der Abbildung jedoch ersichtlich ist, bietet dieser Ansatz wiederum zwei Möglichkeiten: Die Unterteilung einer Hauptzelle von links unten nach rechts oben bzw. von rechts unten nach links oben. Unter verschiedenen Aspekten, wie zum Beispiel der Bestrafung von Volumenänderungen der Gitterzellen (Kapitel 2.3.5), könnten dann Vorzugsrichtungen bei der Registrierung mit einer solchen Unterteilung entstehen. Dies soll jedoch vermieden werden, weswegen in dieser Arbeit der Ansatz der Triangulation in vier Dreiecke verfolgt wird. Die Erstellung dieses Gitters wird im nachfolgenden Abschnitt beschrieben.

3.3.1 Aufbau des Deformationsgitters

Um das Gebiet $\Omega = (\omega_1, \omega_2) \times (\omega_3, \omega_4)$ in das Deformationsgitter zu zerlegen, wird auch dieses zunächst in regelmäßige Zellen unterteilt. Es erfolgt eine Grobeinteilung in $m \times n$ Hauptzellen. Die Länge einer Gitterzelle in jede Richtung sei mit h_1 bzw. h_2 bezeichnet. Jede dieser Hauptzellen wird dann wiederum in vier gleichschenklige Dreiecke unterteilt. Dieses Vorgehen ist in Abbildung 3.4 dargestellt.

Zur besseren Orientierung werden die Hauptzellen über ihre Zeilen- und Spaltenzugehörigkeit indiziert, die vier Unterzellen durch die Einteilung von J_1 bis J_4 . Die Eckpunkte einer Hauptzelle seien immer mit A bis D , der Mittelpunkt mit E bezeichnet. Es treten nun zwei Arten von Gitterknoten auf, die im weiteren Vorgehen genutzt werden:

3 Diskretisierung

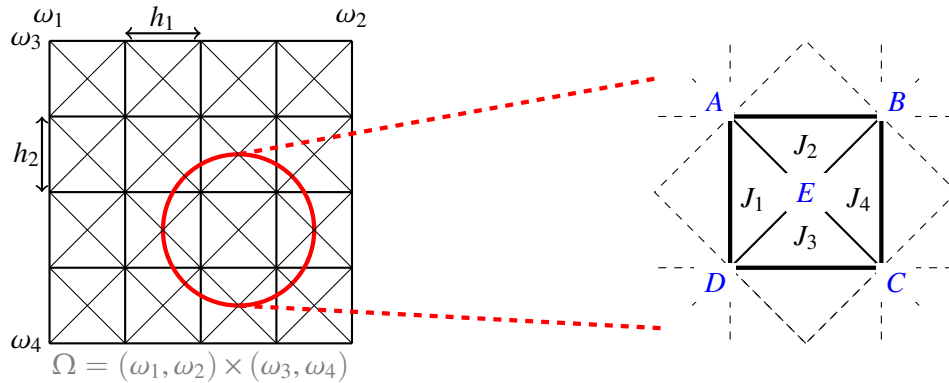


Abbildung 3.4: Unterteilung des Gebietes Ω in rechteckige Haupt- (hier: $m = n = 4$) und dreieckige Unterzellen (links). Jede Hauptzelle wird jeweils durch die Knoten A bis E und die Unterzellen J_1 bis J_4 beschrieben (rechts).

- Nodal-Gitterknoten:* Als Nodal-Gitterknoten werden die Eckpunkte (A – D) der Hauptzellen bezeichnet.
- Cell-Centered-Gitterknoten:* Die Cell-Centered-Gitterknoten liegen jeweils in der Mitte der Hauptzellen (E), also jeweils in gleicher Entfernung zu den umgebenden Nodal-Gitterpunkten.

Auf diese Weise werden $(m + 1) \cdot (n + 1)$ Nodal-Gitterknoten erzeugt, deren Koordinaten durch

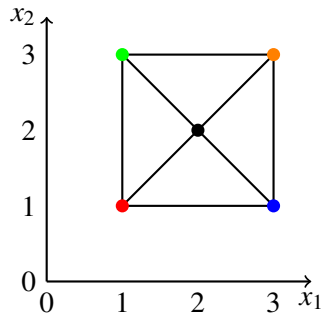
$$x_{ij}^n = (\omega_1 + (i - 1) \cdot h_1, \omega_3 + (j - 1) \cdot h_2)$$

gegeben sind. Zusätzlich gibt es $m \cdot n$ zwischen den Nodal-Knoten liegenden Cell-Centered-Gitterknoten mit Koordinaten

$$x_{ij}^{cc} = (\omega_1 + \frac{h_1}{2} + (i - 1) \cdot h_1, \omega_3 + \frac{h_2}{2} + (j - 1) \cdot h_2).$$

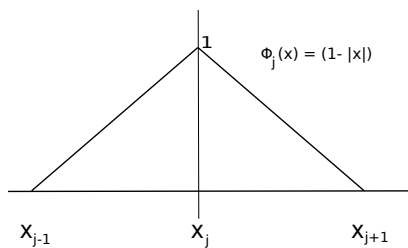
Wie schon erwähnt, wird bei der Deformation des Templatebildes nun $T \circ \phi$ an jedem Knoten des Gitters ausgewertet. Mit der Eigenschaft, dass ϕ auf jedem Element affin ist, kann auch die Deformation an jedem der Cell-Centered-Gitterknoten ausgewertet werden, wenn bekannt ist, wo deren Position im Deformationsgitter ist. Dieses Vorgehen wird in den nächsten beiden Abschnitten erläutert. Bezüglich des Gitteraufbaus soll zuvor noch ein anderer Aspekt betrachtet werden: Später sollen die notwendigen Berechnungen in eine Form der Matrix-Vektor-Multiplikation übertragen werden. Dafür sollen die Gitterpunkte in einem einheitlichen Muster angeordnet werden. Es wird daher ein Koordinatenaufbau der Form $X_t = (x_1^n, x_1^{cc}, x_2^n, x_2^{cc})^T$ gewählt. Hier beschreibt der Subindex die Koordinate des Gitterpunktes. Somit meint beispielsweise x_1^n den Vektor der ersten Komponenten aller Nodal-Gitterknoten. Damit gilt nun allgemein $X_t \in \mathbb{R}^{d \cdot \sigma}$, $\sigma = |\mathcal{K}|$. Ein einzelner Gitterpunkt x_t ist dann gegeben gegeben aus der i -ten und $(i + \sigma)$ -ten Komponente von X_t . Ein Beispiel für einen Koordinatenaufbau ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

3.3 Diskretisierung der Deformation: 2D

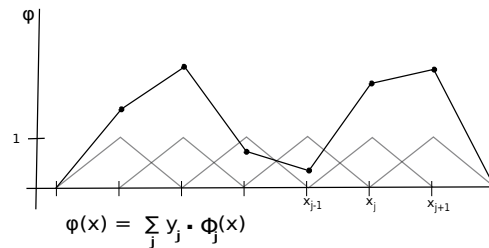


$$X_t = \left(\underbrace{1, 3, 3, 1}_{x_1^n}, \underbrace{2}_{x_1^{cc}}, \underbrace{3, 3, 1, 1}_{x_2^n}, \underbrace{2}_{x_2^{cc}} \right)^T$$

Abbildung 3.5: Koordinatenaufbau einer einzelnen Deformationsgitterzelle. Als erstes werden die ersten Koordinaten der Nodal-Gitterpunkte eingetragen, darunter die ersten Koordinaten der Cell-Centered-Gitterpunkte; darunter folgen in gleicher Reihenfolge die zweiten Komponenten der jeweiligen Gitterpunkte.



(a) Basisfunktion der eindimensionalen Deformation



(b) Linearkombination der Basisfunktionen zur Bildung der Gesamtdeformation

Abbildung 3.6: Erlangung der Funktion der Deformation ϕ durch Linearkombination lokaler Basisfunktionen im eindimensionalen Fall.

Nun, da der Aufbau der Gittertypen bekannt ist, wird noch auf die Auswertung der Deformation an allen Orten des Bildgebietes eingegangen. Dies ist notwendig zur Berechnung des Distanzmaßes. Zuerst wird dafür auf die Basiseigenschaft der Deformation untersucht.

3.3.2 Deformation als Linearkombination lokaler Basisfunktionen

Die Linearkombination von Basisfunktionen zur Auswertung der Deformation ϕ an einem beliebigen Punkt des Gebietes Ω wird aus Gründen der Anschauung nur am Beispiel des eindimensionalen und zweidimensionalen Falles erläutert. In Abbildung 3.6 ist die Basisfunktion der eindimensionalen Deformation ϕ dargestellt. Sie ist gegeben durch die Abbildungsvorschrift $\Phi(x) = 1 - |x|$ an jedem Gitterpunkt. Durch Linearkombination dieser und ihrer auf der x -Achse verschobenen Abbilder, kann die gesamte Deformation an jedem beliebigen Punkt des Gebietes Ω mittels

$$\phi = \sum_j y_j \Phi_j$$

ausgewertet werden. Im zweidimensionalen Fall wird die Betrachtung der Basisfunk-

3 Diskretisierung

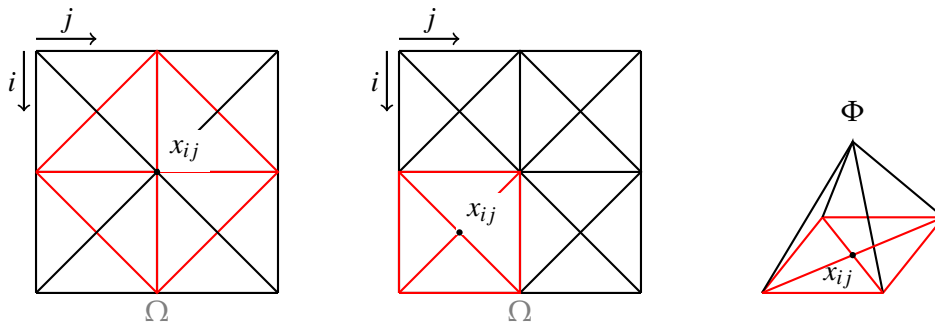


Abbildung 3.7: Auswertung der Deformation ϕ durch Linearkombination lokaler Basisfunktionen im zweidimensionalen Fall. Links: Träger der Basisfunktion von Cell-Centered-Gitterpunkten; mittig: Träger der Basisfunktion von Nodal-Gitterpunkten; rechts: Basisfunktion Φ .

tionen komplexer: Es ergeben sich zwei Basisfunktionen entsprechend der Nodal- und Cell-Centered-Gitterpunkte, die zur Überlagerung kommen. Abbildung 3.7 veranschaulicht diesen Aspekt; die Träger der Basen sind jeweils rot markiert. Die Basisfunktionen im zweidimensionalen Fall bestehen somit aus regelmäßigen Pyramiden deren Spitze sich über dem zugehörigen Deformationsgitterpunkt befindet. Das Gebiet Ω wird hier zur besseren Anschauung nur in 2×2 Hauptgitterzellen zerlegt.

Die vorgestellte Methode ist eine Möglichkeit der Auswertung der Deformation an jedem Ort des Bildgebietes. Es wird nun noch ein weiterer Ansatz betrachtet, der dann für das weitere Vorgehen genutzt wird, da er ohne eine direkte Betrachtung dieser Basisfunktionen auskommt.

3.3.3 Effizientes Auswerten der Deformation

Um eine bessere Übersicht zwischen den einzelnen Gittertypen zu geben, sollen nachfolgend die Gitterpunkte des Bildgitters mit x_p und die des Deformationsgitters mit x_r bezeichnet werden. Die Gitterknoten des Deformationsgitters und des Bildgitters sind lediglich eine andere Diskretisierung des Ausgangsgebietes Ω . Eine Darstellung beider Gitter ist in Abbildung 3.8 gegeben.

Für die Auswertung der Deformation an jedem Gitterpunkt werden nun folgende Aspekte verwendet:

1. Die Deformation ist über die Deformationsgitterpunkte parametrisiert
2. An jedem Ort innerhalb eines Elementes (hier: eines Dreiecks) kann der Deformationswert über Linearkombination der Deformationswerte an den Deformationsgitterpunkten bestimmt werden
3. Für 2. muss die Lage eines Cell-Centered-Gitterknotens innerhalb eines Elementes bekannt sein.

3.3 Diskretisierung der Deformation: 2D

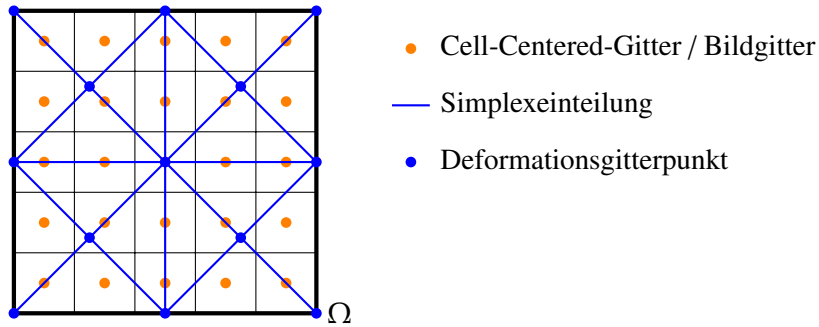


Abbildung 3.8: Unterteilung des Bildgebietes Ω in ein Cell-Centered-Bildgitter mit 5×5 Zellen (Gitterknotenmarkierung durch einen orangenen Punkt) und ein trianguliertes Deformationsgitter mit 2×2 Hauptzellen (blau).

Diese drei Schritte werden nun näher erläutert. Zunächst werden noch einige grundlegende Sachverhalte aufgezeigt: Die Elemente (im 2D also die Dreiecke) sind Simplexes. Ein Simplex bezeichnet ein d -dimensionales Polytop mit $d + 1$ Knoten. Im 2D entspricht dies gerade einem Dreieck, im 3D einem Tetraeder [21]. Jeder Punkt im Innern eines Polytops ist damit über eine Linearkombination der Eckpunkte auszudrücken. Für die vorliegenden Gitter bedeutet das, die Bildgitterpunkte über eine Konvexkombination der Dreieckspunkte auszudrücken, zu dem sie gehören.

Die Simplexes können als Teilebenen der Bildebene verstanden werden. Jede Ebene kann eindeutig durch einen Ortsvektor und zwei Spannvektoren bzw. drei Punkte beschrieben werden. Sei zunächst die allgemeine Ebenenform

$$E : x = a + \mu_1 b + \mu_2 c \quad (3.1)$$

betrachtet, in der a den Ortsvektor (oder Vektor zum Aufpunkt der Ebene) und b sowie c die beiden Spannvektoren bezeichnen. Letztere ergeben sich aus der Differenz zweier weiterer Punkte der Ebene und dem Aufpunkt. Mit Gleichung 3.1 kann jeder Bildgitterpunkt innerhalb eines Simplex als Linearkombination der Eckpunkte dargestellt werden. Dafür müssen die Bildgitterpunkte zunächst in „ihr“ zugehöriges Dreieck eingeordnet werden. Sei exemplarisch das in Abbildung 3.9 dargestellte Dreieck betrachtet: Für den Aufpunkt des Simplex, der durch $A - D - E$ aufgespannt wird, wird E gewählt. Als Spannvektoren kann der Differenzvektor zwischen A und E (EA) bzw. zwischen D und E (ED) gewählt werden. Nach Gleichung (3.1) ergibt sich für x die Linearkombination

$$x = E + \mu_1 (A - E) + \mu_2 (D - E) \quad (3.2)$$

oder anders ausgedrückt

$$\begin{pmatrix} E & (A - E) & (D - E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = x \quad \text{und} \quad 1 > \mu_1, \mu_2 > 0,$$

falls $x \in \text{Simplex}$. Gleichung (3.2) weiter aufgelöst führt auf

$$x = \mu_1 A + \mu_2 D + \underbrace{(1 - \mu_1 - \mu_2)}_{\mu_3} E \quad \text{mit} \quad 0 \leq \mu_i \leq 1; \quad \sum_i \mu_i = 1. \quad (3.3)$$

3 Diskretisierung

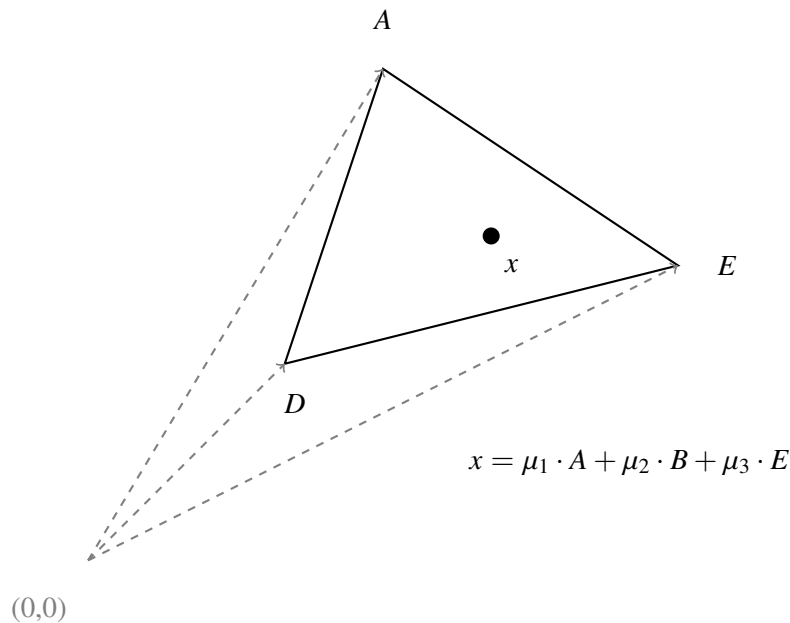


Abbildung 3.9: Die Position des Punktes x soll durch Linearkombination der umgebenden Eckpunkte bestimmt werden: $x \in A - D - E \Leftrightarrow \mu_i \in [0, 1]$ und $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$.

Dies nun ist die allgemeine Form eines Simplex: Dieser wird durch die Menge an Punkten x ausgedrückt, die Gleichung (3.3) erfüllen. Jeder Punkt im Innern eines Simplex wird somit aus einer Konvexkombination bestimmt. Diese Betrachtung gilt für jeden Punkt x innerhalb der einzelnen Simplexes, so auch für die Bildgitterpunkte x_p .

Zur Bestimmung der Parameter μ_i bedarf es nun (da die Koordinaten der Eckpunkte der Gitterdiskretisierung bekannt sind) nur noch der Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & D & E \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Sei noch einmal die Aufteilung der Hauptzellen in vier gleichschenklige Dreiecke betrachtet wie es in Abbildung 3.10 dargestellt ist. Wenn für den Ortsvektor jedes Ebnendreecks der Punkt E und die Spannvektoren aus der Differenz der Eckpunkte A und D zum Punkt E gewählt werden, können für die beiden noch nicht betrachteten Spannvektoren für EC gerade $-EA = -s_1$ und für EB der negative Vektor von ED also $-s_2$ dienen. Für die Dreiecke J_2 bis J_4 ist es also nicht nötig die zugehörigen Spannvektoren noch einmal zu berechnen. Es können weiterhin jene vom Dreieck J_1 mit umgekehrten Vorzeichen genutzt werden. Diese Vorgehensweise bringt noch einen weiteren Vorteil mit sich: Für die Darstellung eines Punktes als Linearkombination nach Gleichung 3.3 ergeben sich für μ_1, μ_2 und μ_3 positive Vorzeichen. Wird aber die beschriebene Vorgehensweise für alle vier Dreiecke einer Hauptzelle genutzt und das Vorzeichen der „umgekehrten“ Spannvektoren in die Parameter μ_1 und μ_2 einfließen gelassen, kann unterschieden werden, in welchem Dreieck einer Hauptzelle sich ein beliebiger Bildgitterpunkt befindet. Man erhält:

3.3 Diskretisierung der Deformation: 2D

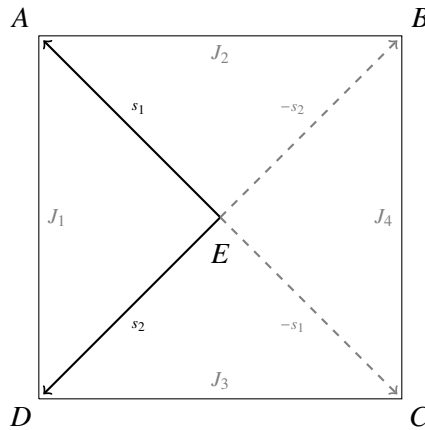


Abbildung 3.10: Bestimmung der Dreieckszugehörigkeit mittels Vorzeichen der Spannvektoren.

$$\begin{aligned}
 J_1, & \text{ falls } \mu_1, \mu_2 \geq 0 \\
 J_2, & \text{ falls } \mu_1 \geq 0, \mu_2 < 0 \\
 J_3, & \text{ falls } \mu_1 < 0, \mu_2 \geq 0 \\
 J_4, & \text{ falls } \mu_1, \mu_2 < 0.
 \end{aligned}$$

Das einzige, was zur Bestimmung der Lage der Bildgitterpunkte noch fehlt, ist ihre Einordnung in die Hauptzellen. Denn nur, wenn diese bekannt ist, können auch die richtigen Koordinaten für die zugehörigen Eckpunkte A bis E bestimmt werden. Als Hauptzellindex ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \text{Zeilenindex} \\ \text{Spaltenindex} \end{pmatrix} = \left\lfloor \begin{pmatrix} (x_{p1} - \omega_1)/h_1 \\ (x_{p2} - \omega_3)/h_2 \end{pmatrix} \right\rfloor + 1$$

für jeden Bildgitterpunkt. Die Schreibweise $\lfloor \cdot \rfloor$ bezeichnet die untere Gaußklammer. Die Dreieckszugehörigkeit schließlich kann dann wie beschrieben über die Vorzeichen der Koeffizienten μ_1 und μ_2 bestimmt werden.

Die Koeffizienten, die für die Linearkombination zur Darstellung eines Punktes innerhalb eines Simplex durch dessen Eckpunkte erhalten werden, können auch genutzt werden, um an diesem Ort die Deformation ϕ auszuwerten. Es gilt für einen Punkt x innerhalb eines Dreiecks $A - D - E$ mit

$$x = \mu_1 A + \mu_2 D + \mu_3 E$$

auch

$$\phi(x) = \mu_1 \phi(A) + \mu_2 \phi(D) + \mu_3 \phi(E).$$

Damit ist es nun möglich an jedem Bildgitterpunkt die Deformation auszuwerten, was notwendig ist, um das SSD-Maß an jedem Ort $T \circ \phi$ zu bestimmen.

3 Diskretisierung

Die Auswertung der Deformation an jedem Cell-Centered Gitterpunkt erfolgt damit über den folgenden Algorithmus:

```
forall  $x_p$  do  
    %%Bestimmen der Hauptzellindices für jeden Cell-Centered-Gitterpunkt  
     $x_{ph} = \frac{x_p - [\omega_1, \omega_3]}{h}$ ;  
    [zeile,spalte] =  $\lfloor x_{ph} \rfloor + 1$ ;  
  
     $x_p = x_p - [\text{zeile,spalte}] \cdot h - h/2$ ;  
  
    %%Festlegen der Spannvektoren  
     $s_1 = \left( -\frac{h_1}{2}, -\frac{h_2}{2} \right)^\top$  ;  
     $s_2 = \left( \frac{h_1}{2}, -\frac{h_2}{2} \right)^\top$  ;  
     $L = (s_1, s_2)$ ;  
  
    Löse:  $L \mu(1, 2) = x_p$ ;  
  
    Bestimme Dreieckszugehörigkeit und Eckpunkte ( $P_1, P_2, P_3$ ) über  
        Vorzeichen von  $\mu(1, 2)$ ;  
  
     $\mu(3) = 1 - |\mu(1)| - |\mu(2)|$ ;  $\mu = |\mu|$ ;  
  
end
```

Dann gilt

$$x_p = \sum_{k=1}^3 \mu_k P_k,$$
$$\phi(x_p) = \sum_{k=1}^3 \mu_k \phi(P_k).$$

3.4 Diskretisierung der Deformation: 3D

Die Diskretisierung der Deformation erfolgt im 3D analog zum 2D. Wieder wird das Bildgebiet Ω über Triangulation in Simplices unterteilt, die nun die Form von Tetraedern annehmen. Wie zuvor wird dadurch erreicht, dass die Deformation auf den Simplices stückweise affin und global stetig ist.

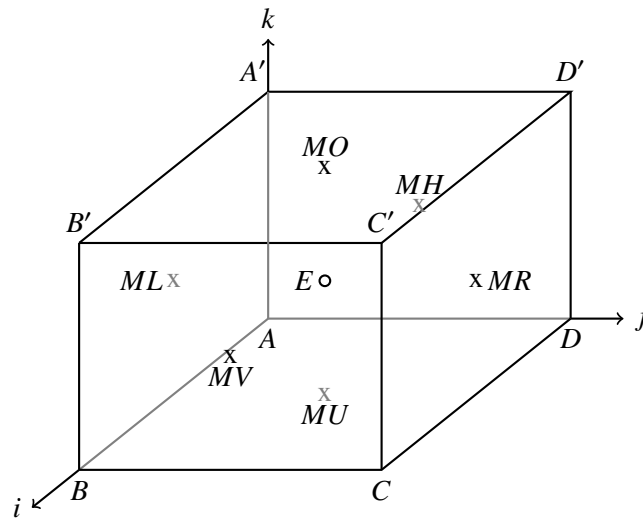
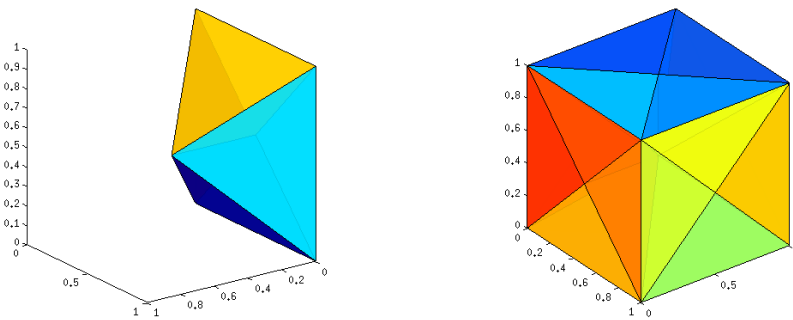


Abbildung 3.11: Darstellung der 15 Knoten jedes Voxels



(a) Darstellung der linken vier Tetraeder

(b) Vollständige Tetraederzerlegung

Abbildung 3.12: Jede der Hauptzellen wird mit Hilfe der in Abbildung 3.11 dargestellten Punkte in 24 Tetraeder zerlegt.

3.4.1 Aufbau des Deformationsgitters

Zur Bildung des Deformationsgitters wird das Gebiet

$$\Omega = (\omega_1, \omega_2) \times (\omega_3, \omega_4) \times (\omega_5, \omega_6)$$

in diesmal $m \times n \times o$ in jeder Richtung äquidistante hexaedrale Hauptzellen unterteilt. Die Länge dieser Zellen in jede Richtung sei mit h_1 bis h_3 festgesetzt. Jede dieser Hauptzellen wird anschließend in insgesamt 24 gleichartige Tetraeder zerlegt. Dafür werden, wie in Abbildung 3.11 dargestellt, zusätzliche Punkte eingefügt, mit Hilfe derer die Tetraeder wie in Abbildung 3.12 erstellt werden. Die Grundflächenpunkte einer Hauptzelle werden mit Buchstaben von A bis D bezeichnet, die von der oberen Fläche mit A' bis D'. Den Mittelpunkt der Hauptzelle und damit „Spitze“ aller 24 Tetraeder

3 Diskretisierung

bildet der Punkt E . Als Grundflächen der Tetraeder dienen jeweils zwei der Hauptzell-Eckpunkte sowie jeweils ein Mittelpunkt MV , MH , ML , MR , MU und MO der Seitenflächen. Diese Punkte ergeben ein sogenanntes Staggered-Gitter. Auch in diesem Modell unterscheidet man zwischen den verschiedenen Arten von Gitterpunkten: Die Eckpunkte des Hauptzell-Quaders sind wieder die schon bekannten Nodal-Gitterpunkte (x^n) – lediglich ins Dreidimensionale übertragen. Die Mittelpunkte der Quader (E) die adaptierten Cell-Centered-Gitterpunkte (x^{cc}). Die nun neuen Oberflächenmittelpunkte sollen fortan als *Facepunkte* bezeichnet werden und bestehen abhängig von ihrer Orientierung jeweils aus einer Nodal- und zwei Cell-Centered-Koordinaten. Als Bezeichnung wird – analog zu den Nodal- und Cell-Centered-Gitterpunkten – x^f mit $f \in \{MV, MH, ML, MR, MU, MO\}$ gewählt. Die Anordnung der unterschiedlichen Knotentypen (Nodal, Cell-Centered und Staggered) erfolgt nun wieder in einem Knotenvektor

$$X_t = (x_1^n, x_1^{MU}, x_1^{MO}, x_1^{MH}, x_1^{MV}, x_1^{ML}, x_1^{MR}, x_1^{cc}, x_2^n, x_2^{MU}, x_2^{MO}, x_2^{MH}, x_2^{MV}, x_2^{ML}, x_2^{MR}, x_2^{cc}, x_3^n, x_3^{MU}, x_3^{MO}, x_3^{MH}, x_3^{MV}, x_3^{ML}, x_3^{MR}, x_3^{cc})^\top \in \mathbb{R}^{3\sigma},$$

wobei der Subindex i wieder den Vektor der i -ten Komponente aller zugehörigen Gitterknoten bezeichnet. Somit ist beispielsweise x_1^n der Vektor aller ersten Komponenten der Nodal-Gitterknoten.

Auch bei dieser Modellierung ist die Deformation ϕ an den Gitterknoten parametrisiert und kann an beliebiger Position des Gebietes Ω wie auch schon im zweidimensionalen Fall über Linearkombination der Basisfunktionen berechnet werden, deren Träger diesmal durch die Tetraeder gegeben sind. Auf eine Erläuterung der Basisfunktion im dreidimensionalen Fall wird an dieser Stelle verzichtet. Stattdessen wird nun noch einmal auf die Ermittlung der Koeffizienten eingegangen.

3.4.2 Effizientes Auswerten der Deformation

Im nächsten Schritt ist es notwendig die Bildgitterpunkte wiederum in das Deformationsgitter einzuordnen. Dies wird in mehreren Schritten realisiert: Zunächst werden die Bildgitterpunkte mittels

$$\begin{pmatrix} \text{Zeilenindex} \\ \text{Spaltenindex} \\ \text{Höhenindex} \end{pmatrix} = \left\lfloor \begin{pmatrix} (x_{p_1} - \omega_1)/h_1 \\ (x_{p_2} - \omega_2)/h_2 \\ (x_{p_3} - \omega_3)/h_3 \end{pmatrix} \right\rfloor + 1$$

wie auch schon im zweidimensionalen Fall in ihre zugehörige Hauptzelle eingeordnet. Dann wird jede dieser Hauptzellen in sechs Pyramiden unterteilt und zwar derart, dass die Grundfläche einer Pyramide jeweils von einer Seitenfläche der Hauptzelle gebildet wird und die Spitze durch den Hauptzellmittelpunkt. Dabei erfolgt eine Unterteilung in die Pyramiden PV, deren Grundfläche durch die Punkte B' , C' , C und B bestimmt ist, die Pyramide PH mit Grundfläche A' , D' , D und A , PL mit Grundfläche A' , A , B und B' , PR mit Grundfläche D' , D , C und C' , PO mit Grundfläche A' , D' , C' und B' sowie PU mit Grundfläche A , B , C und D . Nun werden die Bildpunkte innerhalb einer

3.4 Diskretisierung der Deformation: 3D

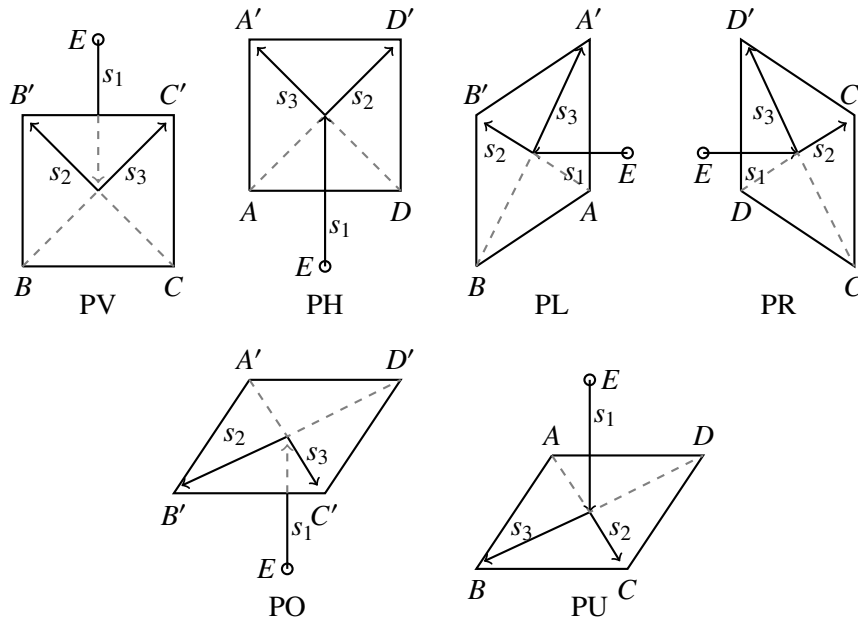


Abbildung 3.13: Bestimmung der Tetraederzugehörigkeit der Bildpunkte innerhalb der jeweiligen Pyramiden. PV = „vordere“ Pyramide, PH = „hintere“ Pyramide, PU = „untere“ Pyramide, PO = „obere“ Pyramide, PL = „linke“ Pyramide, PR = „rechte“ Pyramide.

Hauptzelle jeweils derjenigen Pyramide zugeordnet, deren Facepunkt sie am nächsten sind. Sobald diese Einordnung erfolgt ist, wird in einem abschließenden Schritt die Tetraederzugehörigkeit innerhalb jeder Pyramide ermittelt. Dafür werden analog zum zweidimensionalen Fall diesmal drei Spannvektoren festgelegt: Der erste zeigt vom Hauptzellmittelpunkt E auf den jeweilige Facepunkt, die anderen beiden vom Facepunkt auf einen der Eckpunkte wie es in Abbildung 3.13 dargestellt ist.

Die Einordnung in die zugehörigen Tetraeder erfolgt wiederum über die Linearkombination der Raum-Spannvektoren und die Vorzeichen der so erhaltenen Koeffizienten. Jeder Bildgitterpunkt innerhalb einer Pyramide kann durch die Linearkombination

$$x_p = E + \mu_1 s_1 + \mu_2 s_2 + \mu_3 s_3 \quad (3.5)$$

dargestellt werden. Abhängig davon, ob die Vorzeichen der Koeffizienten μ_2 und μ_3 nun positiv oder negativ sind, können die Bildgitterpunkte einem der jeweiligen Tetraeder zugeordnet werden. Der Koeffizient μ_1 ist immer positiv, da der Aufbau der Gleichung so gewählt wurde, dass s_1 von E zu einem der Facepunkte zeigt und für die Einordnung der Bildgitterpunkte in die jeweiligen Tetraeder nur noch (wie im vorangehenden Absatz erklärt) diejenigen mit entsprechender Pyramidenzugehörigkeit betrachtet werden. Gleichung (3.5) wird weiter umgeformt, um sie direkt von den Eckpunkten abhängig zu machen. Dieses Vorgehen soll nun exemplarisch nur für die Pyramide PU dargelegt werden: Aus Gleichung 3.5 ergibt sich, dass jeder Bildpunkt in der unteren Pyramide über

$$x_p = E + \mu_1 (MU - E) + \mu_2 (C - MU) + \mu_3 (B - MU)$$

3 Diskretisierung

dargestellt werden kann. Umgeformt ergibt sich daraus

$$x_p = (1 - \mu_1)E + (\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)MU + \mu_2 C + \mu_3 B \quad (3.6)$$

für jeden Bildgitterpunkt x_p innerhalb dieser Pyramide. Analog zum 2D-Schema können somit auch hier basierend auf dem Simplex die Bildgitterpunkte durch Linearkombination der Deformationsgitterpunkte dargestellt und mit Hilfe der so erhaltenen Koeffizienten die Deformation an jedem Ort ausgewertet werden, denn auch hier gilt wieder für die Koeffizienten, die Gleichung (3.6) erfüllen, auch

$$\phi(x_p) = (1 - \mu_1)\phi(E) + (\mu_1 - \mu_2 - \mu_3)\phi(MU) + \mu_2 \phi(C) + \mu_3 \phi(B).$$

Die Auswertung der Deformation an jedem Cell-Centered Gitterpunkt erfolgt damit über den folgenden Algorithmus:

```

forall  $x_p$  do
    %%Bestimmen der Hauptzellindices für jeden Cell-Centered-Gitterpunkt
     $x_{ph} = \frac{x_p - [\omega_1, \omega_3, \omega_5]}{h}$ ;
    [zeile,spalte,höhe] =  $\lfloor x_{ph} \rfloor + 1$ ;

     $x_p = x_p - [\text{zeile,spalte,höhe}] \cdot h - h/2$ ;

    %%Festlegen eines Ursprungs-Deformationsvoxels  $U$  mit Facepunkten
    %%und Mittelpunkt
     $U_{MU} = (0, 0, -h_3/2)^T$ ;  $U_{MO} = (0, 0, h_3/2)^T$ ;  $U_{ML} = (0, -h_2/2, 0)^T$ ;
     $U_{MR} = (0, h_2/2, 0)^T$ ;  $U_{MV} = (h_1/2, 0, 0)^T$ ;  $U_{MH} = (-h_1/2, 0, 0)^T$ ;
     $U_E = (0, 0, 0)^T$ 

    Bestimme Pyramidenzugehörigkeit aller  $x_p$  durch minimalen Abstand
    zu den Facepunkten von  $U$ 

end
for  $k = 1, 2, \dots, 6$ 
     $F :=$  Facepunkt von Pyramide  $k$ ;
     $x_p = \{x_p \mid x_p \text{ gehört zur Pyramide } k\}$ ;
    %%Festlegen der Spannvektoren
    Wähle 2 benachbarte Eckpunkte ( $V_1, V_2$ ) der Pyramidengrundseite
     $s_1 = F - E$ ;
     $s_2 = V_1 - F$ ;
     $s_3 = V_2 - F$ ;
     $L = (s_1, s_2, s_3)$ ;

```

Löse: $L \mu = x_p$;

Bestimme Tetraederzugehörigkeit und Eckpunkte (P_1, P_2, P_3, P_4)
über Vorzeichen von $\mu(2, 3)$

$$\mu(4) = 1 - |\mu(1)| - |\mu(2)| - |\mu(3)|; \mu = |\mu|;$$

end

Dann gilt

$$x_p = \sum_{k=1}^4 \mu_k P_k,$$

$$\phi(x_p) = \sum_{k=1}^4 \mu_k \phi(P_k).$$

3.5 Ableitung der Deformation

Wie bereits vorgestellt ist die Deformation stückweise affin und es gilt $\nabla\phi|_{\Omega_j}$ ist konstant. Zur Auswertung der Regularisierer wird deren Wert nun auf jedem Simplex bestimmt. Da jeder Simplex achsenparallele Kanten enthält, können die Richtungsableitungen von ϕ bzw. u zur Berechnung der Jacobimatrizen über einen Differenzenquotienten der Koeffizienten bestimmt werden. Dieses wird nun in den nächsten Abschnitt betrachtet.

3.6 Diskretisierung der Regularisierer und Überführung in Matrix-Vektor-Notation: 2D

Der vorgestellte Ansatz basiert darauf, dass ϕ stückweise affin ist. Die Ableitung der Deformation auf den Dreiecken kann also exakt über einen Differenzenquotienten erhalten werden.

Für die Bestimmung der Regularisierer wird jeweils eine Funktion betrachtet, die von der Jacobimatrix von u oder ϕ abhängt. Da auch u genau wie ϕ stückweise affin ist, kann auch für u die Ableitung exakt über einen Differenzenquotienten bestimmt werden. Es gilt also auch bei

$$x_p = \mu_1 A + \mu_2 D + \mu_3 E$$

$$u(x_p) = \mu_1 u(A) + \mu_2 u(D) + \mu_3 u(E)$$

für die Auswertung der Verrückung. Dies wird in Abbildung 3.14 exemplarisch dargestellt.

3 Diskretisierung

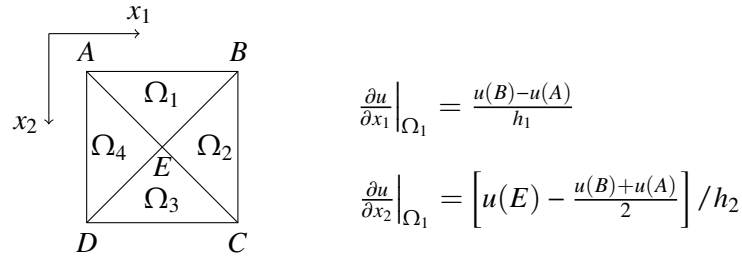


Abbildung 3.14: Ermittlung der Richtungsableitungen auf dem Dreieck Ω_1 über einen Differenzenquotienten.

Für die Jacobimatrix von u gilt, dass sie mit

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

definiert ist.

Bevor die Diskretisierung der Regularisierer erläutert wird, muss noch ein wichtiger Punkt betrachtet werden: ϕ bzw. u ist eine Funktion, wie sie in Kapitel 2.1 eingeführt wurden und die jedem Ort eines Bildes einen Deformationswert zuordnet. Für die Auswertung der Deformation und der Verrückung werden im Folgenden die Koeffizienten dieser an den Deformationsgitterpunkten betrachtet. Diese Koeffizienten werden ebenfalls kurz Deformation bzw. Verrückung genannt und beschreiben jeweils ein Element aus dem \mathbb{R}^d , welches als Deformations- oder Verrückungswert einem Deformationsgitterpunkt zugeordnet ist. Über die beschriebene Art der Linearkombination kann diese Deformation an jedem Ort des Gebietes Ω ausgewertet werden. Alle Koeffizienten werden im Folgenden in einem Vektor angeordnet und zwar derart, dass der Aufbau gerade dem schon bekannten Aufbau von X_t entspricht. Diese Vektoren werden mit ϕ bzw. u bezeichnet.

Die Komponenten von ∇u sollen für alle Simplices auf einmal bestimmt werden und sind daher als vektorwertige Komponenten anzusehen. Nun werden Matrizen D_{ij} , D_i und P_i so gewählt, dass

$$D_{ij} \cdot \mathbf{u} = D_i \cdot P_j \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \Big|_{\Omega_k} \right)_{k=1}^{\eta}$$

gilt, wobei η die Anzahl der Simplices bezeichnet. Die Matrix P_i realisiert die Projektion auf die i -te Komponente, die Matrix D_i die Ableitung in Richtung i . Daraus folgt, dass die Matrix P_j eine Diagonalmatrix ist, die jedoch nur in der j -ten Hälfte Einsen auf der Diagonale aufweist:

$$P_1 = \begin{pmatrix} I & Z \\ Z & Z \end{pmatrix} \text{ und } P_2 = \begin{pmatrix} Z & Z \\ Z & I \end{pmatrix},$$

mit I als Einheitsmatrix und Z als Nullmatrix, $I, Z \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$. Die Matrix $D_i \in \mathbb{R}^{\eta \times 2\eta}$ ist eine Matrix mit zwei Diagonalen und realisiert – multipliziert mit den Komponenten u_j – die Ableitung mittels Vorwärts-Differenzenquotienten nach x_i . Damit ist es nun möglich die einzelnen Regularisierer zu diskretisieren.

3.6 Diskretisierung der Regularisierer und Überführung in Matrix-Vektor-Notation: 2D

Diffusiver Regularisierer

Für den diffusiven Regularisierer muss das Integral über die quadrierte Frobenius-Norm der Jacobimatrix diskretisiert werden. Die Jacobimatrix wird durch die schon beschriebene Vorwärtsdifferenz der Verrückungswerte von u realisiert, sodass der Wert des Regularisierers durch

$$\begin{aligned} S^{\text{diff}} &= \int_{\Omega} \|\nabla u\|_F^2 dx = \sum_j \int_{\Omega_j} \sum_{k,l} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^2 dx \\ &= \sum_{k,l} \sum_j |\Omega_j| \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)^2 \Big|_{\Omega_j} = \frac{h_1 h_2}{4} \sum_{k,l} \mathbf{u}^\top D_{k,l}^\top D_{k,l} \mathbf{u} \end{aligned}$$

bestimmt ist.

Linear elastischer Regularisierer

Der linear elastische Regularisierer war definiert als

$$\begin{aligned} S^{\text{le}}(u) &= \int_{\Omega} \mu \operatorname{tr}(E^{\text{le}}(u)^2) + \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(E^{\text{le}}(u))^2 dx \\ \text{mit } E_{ij}^{\text{le}} &= \nabla u + \nabla u^\top. \end{aligned}$$

Auch die Bezeichnung des Dehnungstensors E müsste abhängig vom kontinuierlichen bzw. diskreten Fall unterschieden werden. Da die Zugehörigkeit sich jedoch unmittelbar aus den nachfolgenden Berechnungen ergibt, wird wie schon beim Distanzmaß an dieser Stelle darauf verzichtet für diesen einen diskreten Repräsentanten einzuführen und die Bezeichnung E somit ebenfalls synonym verwendet. Die vektorwertigen Komponenten von E^{le} lassen sich durch

$$\begin{aligned} E_{11} &= D_{11} \mathbf{u} \\ E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{2} (D_{21} + D_{12}) \mathbf{u} \\ E_{22} &= D_{22} \mathbf{u} \end{aligned}$$

bestimmen. Es müssen

$$\operatorname{tr}(E^2) = \operatorname{tr}((\nabla u + \nabla u^\top)^2) = E_{11}^\top E_{11} + 2 E_{12}^\top E_{21} + E_{22}^\top E_{22}$$

und

$$\operatorname{tr}(E)^2 = \operatorname{tr}(\nabla u + \nabla u^\top)^2 = (E_{11} + E_{22})^\top (E_{11} + E_{22})$$

3 Diskretisierung

realisiert werden. Damit ist es möglich den Wert des Potentials und damit auch den des Regularisierers mittels

$$S^{\text{le}} = \frac{h_1 h_2}{4} \left(\mu \mathbf{u}^\top \underbrace{(D_{11}^\top D_{11} + 2(D_{12}^\top D_{21}) + D_{22}^\top D_{22})}_{L_1} \mathbf{u} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{u}^\top \underbrace{(D_{11} + D_{22})^\top (D_{11} + D_{22})}_{L_2} \mathbf{u} \right) \quad (3.7)$$

zu berechnen. Ein weiterer Vorteil der beiden Darstellungen des diffusiven und linear elastischen Regularisierers ist, dass die Matrizen $D_{k,l}^\top$, $D_{k,l}$ sowie L_1 und L_2 nur einmal berechnet werden müssen. Sie können bei den Iterationen der Registrierung weiter verwendet werden, um die neuen Ableitungen von u zu realisieren.

Quadratisch elastischer Regularisierer

Der quadratisch elastische Regularisierer berechnet sich mit der gleichen Zielfunktion wie im linearen Fall, allerdings mit

$$E^{\text{qe}} = \nabla u + \nabla u^\top + \nabla u^\top \nabla u.$$

Wird diese Gleichung mit den gegebenen Jacobimatrizen ausmultipliziert, lassen sich die vektorwertigen Komponenten von E^{qe} im diskreten Fall mittels

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{2} (2D_{11}\mathbf{u} + \text{diag}(D_{11}\mathbf{u})D_{11}\mathbf{u} + \text{diag}(D_{21}\mathbf{u})D_{21}\mathbf{u}) \\ E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{2} ((D_{12} + D_{21})\mathbf{u} + \text{diag}(D_{11}\mathbf{u})D_{12}\mathbf{u} + \text{diag}(D_{21}\mathbf{u})D_{22}\mathbf{u}) \\ E_{22} &= \frac{1}{2} (2D_{22}\mathbf{u} + \text{diag}(D_{12}\mathbf{u})D_{12}\mathbf{u} + \text{diag}(D_{22}\mathbf{u})D_{22}\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

berechnen. Der Diagonaloperator

$$\text{diag}(v) := \begin{pmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_n \end{pmatrix}, \quad v \in \mathbb{R}^n$$

dient dazu, den Vektor, den er als Argument enthält in eine quadratische Hauptdiagonalmatrix umzuwandeln. Bleibt noch die Bestimmung des Potentials W . Zur Erinnerung: W war definiert über

$$W(E) = \mu \text{tr}(E^2) + \frac{\lambda}{2} \text{tr}(E)^2,$$

3.6 Diskretisierung der Regularisierer und Überführung in Matrix-Vektor-Notation: 2D

was sich in diesem Fall zu

$$\begin{aligned} W(E) &= \mu (E_{11} \odot E_{11} + 2E_{12} \odot E_{21} + E_{22} \odot E_{22}) + \frac{\lambda}{2} (E_{11} + E_{22})^2 \\ &= \mu (E_{11} \odot E_{11} + 2E_{12} \odot E_{21} + E_{22} \odot E_{22}) + \frac{\lambda}{2} (E_{11}^2 + 2 E_{11} \odot E_{22} + E_{22}^2) \\ &= \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) E_{11} \odot E_{11} + 2\mu (E_{12} \odot E_{21}) + \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right) E_{22} \odot E_{22} + \lambda E_{11} \odot E_{22} \end{aligned}$$

umformen lässt (\odot bezeichnet die komponentenweise Multiplikation und auch die Quadrierung ist punktweise gemeint). Der Wert des Regularisierers lässt sich nun mit

$$S^{\text{qc}} = \int_{\Omega} W(E^{\text{qc}}(u)) \, dx = \sum_j \int_{\Omega_j} W(E^{\text{qc}}(u)) \, dx = \frac{h_1 h_2}{4} e^{\top} (W(E^{\text{qc}}(\mathbf{u})))$$

berechnen.

Volumenregularisierer

Der Volumenregularisierer konnte im kontinuierlichen Fall mittels

$$S^{\text{Vol}} = \int_{\Omega} \psi(\det(\nabla\phi)) \, dx$$

bestimmt werden. Die vektorwertigen Komponenten der Jacobimatrix von ϕ für alle Punkte können mit

$$\begin{aligned} V_{11} &= D_{11}\phi \\ V_{12} &= D_{12}\phi \\ V_{21} &= D_{21}\phi \\ V_{22} &= D_{22}\phi \end{aligned}$$

erhalten werden. Die Determinante wird dann punktweise über

$$\det(V) = V_{11} \odot V_{22} - V_{12} \odot V_{21}$$

bestimmt und der Regularisierer mit

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{(z-1)^2}{z} \\ S^{\text{Vol}} &= \int_{\Omega} \psi(\det(\nabla\phi)) \, dx = \sum_j \int_{\Omega_j} \psi(\det(\nabla\phi|_{\Omega_j})) \, dx \\ &= \frac{h_1 h_2}{4} e^{\top} (\psi(\det(V))) \end{aligned}$$

errechnet, wobei $\psi(\det(V))$ hier punktweise ausgewertet wird.

3.7 Diskretisierung der Regularisierer: 3D

Die Diskretisierung erfolgt im Dreidimensionalen analog zum 2D-Fall. Die Jacobimatrizen der Deformation und deren Verrückung sind durch

$$\nabla\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial\phi_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad \nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

definiert. Es werden zur Bildung der Ableitung von ϕ bzw. u wiederum Matrizen $D_{ij} = D_i P_j$ erstellt, welche für $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die Richtungsableitungen der Komponenten von ϕ und u über einen Differenzenquotienten realisieren, sodass $D_{ij} \mathbf{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ gilt. Daraus ergeben sich folgende Darstellungen für die auch im 2D vertretenen Regularisierer:

$$S^{\text{diff}}(u) = \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \|\nabla u\|_F^2 = \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \mathbf{u}^\top (D_1^\top D_1 + D_2^\top D_2 + D_3^\top D_3) \mathbf{u}$$

$$\begin{aligned} S^{\text{le}}(u) = & \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \mu \mathbf{u}^\top \left(D_{11}^\top D_{11} + \right. \\ & \frac{1}{2} (D_{21} + D_{12})^\top (D_{12} + D_{21}) + \frac{1}{2} (D_{31} + D_{13})^\top (D_{13} + D_{31}) + \\ & \left. \frac{1}{2} (D_{32} + D_{23})^\top (D_{23} + D_{32}) + D_{22}^\top D_{22} + D_{33}^\top D_{33} \right) \mathbf{u} + \\ & \frac{\lambda}{2} \mathbf{u}^\top (D_{11} + D_{22} + D_{33})^\top (D_{11} + D_{22} + D_{33}) \mathbf{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{ij}^{\text{qe}}(u) = & \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji}) \mathbf{u} + \frac{1}{2} (D_{1i} \mathbf{u} \odot D_{1j} \mathbf{u} + D_{2i} \mathbf{u} \odot D_{2j} \mathbf{u} + D_{3i} \mathbf{u} \odot D_{3j} \mathbf{u}) \\ W^{\text{qe}}(E^{\text{qe}}) = & \mu (E_{11}^2 + E_{22}^2) + E_{33}^2 + 2E_{12} \odot E_{21} + 2E_{13} \odot E_{31} + 2E_{23} \odot E_{32} \\ & + \frac{\lambda}{2} (E_{11} + E_{22} + E_{33})^2 \\ S^{\text{qe}}(u) = & \frac{h_1 h_2 h_3}{24} e^\top (W^{\text{qe}}(E^{\text{qe}})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{ij}(u) = & D_{ij} \phi \\ \psi(z) = & \frac{(z-1)^2}{z} \\ S^{\text{Vol}} = & \frac{h_1 h_2 h_3}{24} e^\top (\psi(\det(V))). \end{aligned}$$

Die Quadrierung ist dabei punktweise zu verstehen.

Flächenregularisierer

Bleibt noch die Diskretisierung des Kofaktors zur Kontrolle der Seitenflächen bei der dreidimensionalen Deformation zu erläutern. Im kontinuierlichen Fall war dieser definiert über

$$S^{\text{Cof}} = \int_{\Omega} (\|\text{cof}(\nabla\phi)\|^2 - 3)^2 dx.$$

Die Ableitung der Komponenten der Deformation ϕ kann wie auch bei den vorangehenden Regularisierern über eine Matrix-Vektor-Multiplikation von D_{ij} und ϕ realisiert werden. Es ergeben sich die drei Spalten der Kofaktormatrix $\partial_2\phi \times \partial_3\phi$, $\partial_1\phi \times \partial_3\phi$ und $\partial_1\phi \times \partial_2\phi$ damit zu

$$\begin{aligned}\partial_2\phi \times \partial_3\phi &= D_{i2}\phi \times D_{i3}\phi \\ \partial_1\phi \times \partial_3\phi &= D_{i1}\phi \times D_{i3}\phi \\ \partial_1\phi \times \partial_2\phi &= D_{i1}\phi \times D_{i2}\phi,\end{aligned}$$

jeweils für $i \in \{1, 2, 3\}$. Der Wert des Regularisierers kann nun mittels der schon bekannten Funktion

$$S^{\text{Cof}} = \frac{h_1 h_2 h_3}{24} (\|\text{cof}(\nabla\phi)\|_F^2 - 3)^2$$

errechnet werden.

3.8 Ableitung der Zielfunktion

Zur Minimierung der nun diskreten Zielfunktion

$$J(R, T \circ \phi) = D(R, T \circ \phi) + \alpha S(u)$$

wird auf ein Iterationsverfahren zurückgegriffen, das in Abschnitt 3.9 vorgestellt wird. Für dieses werden die Ableitungen von Distanzmaß und Regularisierer benötigt.

3.8.1 Ableitung des Distanzmaßes

In vektorwertiger Schreibweise kann das Distanzmaß auch über

$$\begin{aligned}D^{2D}(R, T(\phi(x))) &= \frac{h_1 h_2}{2} \langle r(x), r(x) \rangle, & D^{3D}(R, T(\phi(x))) &= \frac{h_1 h_2 h_3}{12} \langle r(x), r(x) \rangle, \\ r(x) &= R(x) - T(\phi(x))\end{aligned}$$

ausgedrückt werden, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt bezeichnet. Die Ableitung kann dann über

$$\begin{aligned}\nabla D^{2D}(R, T(\phi(x))) &= h_1 h_2 (\nabla r(x))^\top r(x) \\ \nabla D^{3D}(R, T(\phi(x))) &= h_1 h_2 h_3 (\nabla r(x))^\top r(x)\end{aligned}$$

3 Diskretisierung

ausgedrückt werden, wobei

$$\nabla r = -\nabla T(\phi) \nabla \phi$$

gilt. Mit R und T sind nun die diskreten Bilder gemeint, genauer gesagt die Matrizen, deren Einträge die Grauwerte an den Cell-Centered-Gitterpunkten sind. Die zweite Ableitung sei dann näherungsweise durch

$$\begin{aligned}\nabla^2 D^{2D}(R, T(\phi(x))) &\approx h_1 h_2 \nabla r(x)^\top \nabla r(x) \\ \nabla^2 D^{3D}(R, T(\phi(x))) &\approx h_1 h_2 h_3 \nabla r(x)^\top \nabla r(x)\end{aligned}$$

bestimmt.

3.8.2 Ableitung der Regularisierer: 2D

Als Nächstes wird nun der zweite Baustein und damit die einzelnen Regularisierer abgeleitet.

Hauptregularisierer

Die diskrete Form des diffusiven Regularisierers ist von der Bauart $S = \mathbf{u}^\top A \mathbf{u}$, wobei A gänzlich von \mathbf{u} unabhängig ist. Nach den allgemeinen Differenzierungsregeln gilt damit, dass der Gradient von S sich über $\nabla S = (A + A^\top)\mathbf{u}$ und die zweite Ableitung über $\nabla^2 S = A + A^\top$ bestimmen lässt. Da die Matrix A in diesem Fall symmetrisch ist, ergeben sich für den diffusiven Regularisierer analog die folgenden Ableitungen:

$$\begin{aligned}\nabla S^{\text{diff}} &= \frac{h_1 h_2}{2} (D_1^\top D_1 + D_2^\top D_2) \mathbf{u} \\ \nabla^2 S^{\text{diff}} &= \frac{h_1 h_2}{2} (D_1^\top D_1 + D_2^\top D_2).\end{aligned}$$

Von der gleichen Bauart ist der linear elastische Regularisierer. Die beiden Matrizen L_1 und L_2 aus Gleichung 3.7 sind ebenfalls symmetrisch, sodass sich auch die Ableitungen des linear elastischen Regularisierers analog mit

$$\begin{aligned}\nabla S^{\text{le}} &= \frac{h_1 h_2}{4} (2\mu L_1 + \lambda L_2) \mathbf{u} \\ \nabla^2 S^{\text{le}} &= \frac{h_1 h_2}{4} (2\mu L_1 + \lambda L_2)\end{aligned}$$

bestimmen lassen.

Das Potential W ist eine Funktion in Abhängigkeit von der Elastizität E , welche wiederum von u abhängt. Die Ableitung des Potentials

$$\nabla_u W(E(u)) = \nabla_E W(E(u))^\top \cdot \nabla_u E(u)$$

3.8 Ableitung der Zielfunktion

kann somit durch Differenzieren der einzelnen Komponenten erhalten werden. Unter Verwendung von Gleichung 3.8 kann die Jacobimatrix von E mittels

$$\begin{aligned}\nabla_u E_{11} &= 2 D_{11} + 2 \operatorname{diag}(D_{11} \mathbf{u}) D_{11} + 2 \operatorname{diag}(D_{21} \mathbf{u}) D_{21} \\ \nabla_u E_{12} = \nabla_u E_{21} &= (D_{12} + D_{21}) + \operatorname{diag}(D_{11} \mathbf{u}) D_{12} + \operatorname{diag}(D_{12} \mathbf{u}) D_{11} + \\ &\quad \operatorname{diag}(D_{21} \mathbf{u}) D_{22} + \operatorname{diag}(D_{22} \mathbf{u}) D_{21} \\ \nabla_u E_{22} &= 2 D_{22} + 2 \operatorname{diag}(D_{22} \mathbf{u}) D_{22} + 2 \operatorname{diag}(D_{12} \mathbf{u}) D_{12}\end{aligned}$$

bestimmt werden. Für die Berechnung von $\nabla_E W$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla_{E_{11}} W &= (2\mu + \lambda) E_{11} + \lambda E_{22} \\ \nabla_{E_{12}} W &= 2\mu E_{21} \\ \nabla_{E_{21}} W &= 2\mu E_{12} \\ \nabla_{E_{22}} W &= (2\mu + \lambda) E_{22} + \lambda E_{11}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla_u W = \nabla_u E^\top \cdot \nabla_E W.$$

Zur späteren Optimierung wird das Gauß-Newton-Verfahren genutzt, welches eine Approximation an die zweite Ableitung nutzt (vgl. Abschnitt 3.9). Es ist daher nun eine Approximation an die zweite Ableitung zu bestimmen. Diese ist

$$\nabla_u^2 W \approx \nabla_u E^\top \cdot \nabla_E^2 W \cdot \nabla_u E.$$

Die Jacobimatrix von E ist aus den vorhergehenden Berechnungen schon bekannt, es bleibt also lediglich $\nabla_E^2 W$ zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla_E^2 W &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \nabla_{E_{11}} W}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \nabla_{E_{11}} W}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \nabla_{E_{11}} W}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \nabla_{E_{11}} W}{\partial E_{22}} \\ \frac{\partial \nabla_{E_{12}} W}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \nabla_{E_{12}} W}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \nabla_{E_{12}} W}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \nabla_{E_{12}} W}{\partial E_{22}} \\ \frac{\partial \nabla_{E_{21}} W}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \nabla_{E_{21}} W}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \nabla_{E_{21}} W}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \nabla_{E_{21}} W}{\partial E_{22}} \\ \frac{\partial \nabla_{E_{22}} W}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \nabla_{E_{22}} W}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \nabla_{E_{22}} W}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \nabla_{E_{22}} W}{\partial E_{22}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2\mu + \lambda) I & (0) & (0) & \lambda I \\ (0) & (0) & 2\mu I & (0) \\ (0) & 2\mu I & (0) & (0) \\ \lambda I & (0) & (0) & (2\mu + \lambda) I \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3 Diskretisierung

Volumen

Für die Ableitung des Volumenregularisierers werden sowohl die Ableitung der Determinante als auch der Funktion ψ benötigt:

$$\nabla\psi(z) = \frac{z-1}{z}$$

$$\nabla^2\psi(z) = \frac{2}{z^3}.$$

Die Ableitung der Determinante ergibt sich zu

$$\nabla\det(\phi) = \text{diag}(D_{11}\phi) D_{22} + \text{diag}(D_{22}\phi) D_{11} - \text{diag}(D_{12}\phi) D_{21} - \text{diag}(D_{21}\phi) D_{12}.$$

Die Ableitung des kompletten Regularisierers ergibt sich mit

$$\nabla S^{\text{Vol}} = \frac{h_1 h_2}{4} \nabla\psi(\det(\nabla\phi))^\top \cdot \nabla\det(\nabla\phi)$$

$$\nabla^2 S^{\text{Vol}} \approx \frac{h_1 h_2}{4} \nabla\psi(\det(\nabla\phi))^\top \cdot \nabla^2\det(\nabla\phi) \cdot \nabla\psi(\det(\nabla\phi)),$$

wobei die zweite Ableitung wieder nur näherungsweise bestimmt ist.

3.8.3 Ableitung der Regularisierer: 3D

Auch die Ableitung der diskreten dreidimensionalen Regularisierer soll nun kurz erläutert werden. Für den diffusiven und linear elastischen Regularisierer ergibt sich als Ableitung

$$\nabla S^{\text{diff}}(u) = \frac{h_1 h_2 h_3}{12} (D_1^\top D_1 + D_2^\top D_2 + D_3^\top D_3) \mathbf{u}$$

$$\nabla^2 S^{\text{diff}}(u) = \frac{h_1 h_2 h_3}{12} (D_1^\top D_1 + D_2^\top D_2 + D_3^\top D_3)$$

$$L_1 = D_{11}^\top D_{11} + \frac{1}{2} (D_{21} + D_{12})^\top (D_{12} + D_{21})$$

$$+ \frac{1}{2} (D_{31} + D_{13})^\top (D_{13} + D_{31})$$

$$+ \frac{1}{2} (D_{32} + D_{23})^\top (D_{23} + D_{32}) + D_{22}^\top D_{22} + D_{33}^\top D_{33}$$

$$L_2 = (D_{11} + D_{22} + D_{33})^\top (D_{11} + D_{22} + D_{33})$$

$$\nabla S^{\text{le}}(u) = \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \left(\mu (L_1 + L_1^\top) \mathbf{u} + \frac{\lambda}{2} (L_2 + L_2^\top) \mathbf{u} \right)$$

$$\nabla^2 S^{\text{le}}(u) = \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \left(\mu (L_1 + L_1^\top) + \frac{\lambda}{2} (L_2 + L_2^\top) \right)$$

analog zu den Ableitungen des zweidimensionalen Falls.

Auch die Ableitung des quadratisch elastischen Regularisierers erfolgt analog zum zweidimensionalen Fall. Aus diesem Grund soll an dieser Stelle auf die ausführliche

3.8 Ableitung der Zielfunktion

Entwicklung dieser Regularisierer-Ableitung verzichtet und lediglich das Vorgehen erläutert werden. Wie auch schon im zweidimensionalen Fall, werden die beiden Funktionen W und E voneinander getrennt betrachtet und die Ableitung nach der Kettenregel gebildet. Die Ableitungen für diesen Regularisierer werden danach über

$$\begin{aligned}\nabla S^{\text{qe}}(u) &= \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \nabla_u E^{\text{qe}\top} \nabla_E W^{\text{qe}} \\ \nabla^2 S^{\text{qe}}(u) &\approx \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \nabla_u E^{\text{qe}\top} \nabla_E^2 W^{\text{qe}} \nabla_u E^{\text{qe}}\end{aligned}$$

gebildet. Mit der Ableitung von E^{qe} nach u

$$\begin{aligned}\nabla_u E_{ij}^{\text{qe}}(u) &= \frac{1}{2}(D_{ij} + D_{ji}) + \frac{1}{2}(\text{diag}(D_{1i}\mathbf{u})D_{1j} + \text{diag}(D_{1j}\mathbf{u})D_{1i} \\ &\quad + \text{diag}(D_{2i}\mathbf{u})D_{2j} + \text{diag}(D_{2j}\mathbf{u})D_{2i} + \text{diag}(D_{3i}\mathbf{u})D_{3j} + \text{diag}(D_{3j}\mathbf{u})D_{3i})\end{aligned}$$

und den Ableitungen von $W^{\text{qe}}(E^{\text{qe}})$

$$\begin{aligned}\nabla_E W^{\text{qe}}(E^{\text{qe}}) &= \left(\frac{\partial}{\partial E_{11}}, \frac{\partial}{\partial E_{12}}, \frac{\partial}{\partial E_{21}}, \frac{\partial}{\partial E_{22}} \right)^\top W^{\text{qe}}(E^{\text{qe}}) \\ &=: (\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3, \mathbf{G}_4)^\top \\ \nabla_E^2 W^{\text{qe}}(E^{\text{qe}}) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \mathbf{G}_1}{\partial E_{22}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \mathbf{G}_2}{\partial E_{22}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \mathbf{G}_3}{\partial E_{22}} \\ \frac{\partial \mathbf{G}_4}{\partial E_{11}} & \frac{\partial \mathbf{G}_4}{\partial E_{12}} & \frac{\partial \mathbf{G}_4}{\partial E_{21}} & \frac{\partial \mathbf{G}_4}{\partial E_{22}} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ergeben sich die Ableitungen für diesen Regularisierer. Das gleiche Verfahren wird für die Ableitung des Volumens genutzt: Die Volumen-Gewichtungs-Funktion ψ

$$\begin{aligned}\nabla \psi(z) &= \frac{z-1}{z} \\ \nabla^2 \psi(z) &= \frac{2}{z^3},\end{aligned}$$

ändert sich bei Übertragung ins Dreidimensionale nicht. Es bleibt also nur die Deter-

3 Diskretisierung

minante von $\nabla\phi$ und deren Ableitung entsprechend zu

$$\begin{aligned}
\nabla\det(\phi) = & \text{diag}(\text{diag}(D_{11}\phi)D_{22}\phi)D_{33} \\
& + \text{diag}(D_{33}\phi)(\text{diag}(D_{11}\phi)D_{22} + \text{diag}(D_{22}\phi)D_{11}) \\
& + \text{diag}(\text{diag}(D_{21}\phi)D_{32}\phi)D_{13} \\
& + \text{diag}(D_{13}\phi)(\text{diag}(D_{21}\phi)D_{32} + \text{diag}(D_{32}\phi)D_{21}) \\
& + \text{diag}(\text{diag}(D_{31}\phi)D_{12}\phi)D_{23} \\
& + \text{diag}(D_{23}\phi)(\text{diag}(D_{31}\phi)D_{12} + \text{diag}(D_{12}\phi)D_{31}) \\
& - \text{diag}(\text{diag}(D_{13}\phi)D_{22}\phi)D_{31} \\
& - \text{diag}(D_{31}\phi)(\text{diag}(D_{13}\phi)D_{22} + \text{diag}(D_{22}\phi)D_{13}) \\
& - \text{diag}(\text{diag}(D_{23}\phi)D_{32}\phi)D_{11} \\
& - \text{diag}(D_{11}\phi)(\text{diag}(D_{23}\phi)D_{32} + \text{diag}(D_{32}\phi)D_{23}) \\
& - \text{diag}(\text{diag}(D_{33}\phi)D_{12}\phi)D_{21} \\
& - \text{diag}(D_{21}\phi)(\text{diag}(D_{33}\phi)D_{12} + \text{diag}(D_{12}\phi)D_{33})
\end{aligned}$$

anzupassen. Die Ableitungen können dann anschließend mittels

$$\begin{aligned}
\nabla S^{\text{Vol}} &= \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \nabla\psi(\det(\nabla\phi))^\top \cdot \nabla\det(\nabla\phi) \\
\nabla^2 S^{\text{Vol}} &\approx \frac{h_1 h_2 h_3}{24} \nabla\psi(\det(\nabla\phi))^\top \cdot \nabla^2\det(\nabla\phi) \cdot \nabla\psi(\det(\nabla\phi))
\end{aligned}$$

(näherungsweise) bestimmt werden.

Für die Ableitung des Kofaktor-Regularisierers wird die Funktion des Regularisierers $S^{\text{Cof}} = (\|\text{cof}(\nabla\phi)\|_F^2 - 3)^2$ in zwei Teilfunktionen unterteilt. Seien zwei Funktionen

$$\begin{aligned}
f(\phi) &= \|\text{cof}(\nabla\phi)\|_F^2 \text{ und} \\
g(x) &= (x - 3)^2
\end{aligned}$$

definiert. Der Regularisierer ist damit eine Funktion, die als $g(f(\phi))$ verstanden werden kann. Diese Auffassung ermöglicht es nun, die Ableitungen des Regularisierers mittels

$$\begin{aligned}
\nabla S^{\text{Cof}} &= \nabla_x g(x) \cdot \nabla_\phi f(\phi) \\
\nabla^2 S^{\text{Cof}} &\approx \nabla_\phi f(\phi)^\top \nabla_x^2 g(x) \nabla_\phi f(\phi)
\end{aligned}$$

zu berechnen. Auch hier ist die zweite Ableitung nur näherungsweise bestimmt.

Seien nun die einzelnen Komponenten etwas genauer betrachtet: Es gilt, dass

$$\begin{aligned}
\nabla_x g(x) &= 2(x - 3) \\
\nabla_x^2 g(x) &= \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & \ddots & \\ & & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3.9 Optimierung mit dem Gauß-Newton-Verfahren

und

$$\begin{aligned}
 f(\phi) &= \|\text{cof}(\nabla\phi)\|_F^2 = (e^\top ((\partial_2\phi \times \partial_3\phi)^2 + (\partial_1\phi \times \partial_3\phi)^2 + \partial_1\phi \times \partial_2\phi)^2 - 3)^2 \\
 \nabla_\phi f(\phi) &= 2(e^\top ((\partial_2\phi \times \partial_3\phi)^2 + (\partial_1\phi \times \partial_3\phi)^2 + \partial_1\phi \times \partial_2\phi)^2 - 3) \cdot \\
 &\quad 2e^\top (\partial_2\phi \times \partial_3\phi + \partial_1\phi \times \partial_3\phi + \partial_1\phi \times \partial_2\phi) \cdot \\
 &\quad (\nabla_\phi \partial_2\phi \times \partial_3\phi + \nabla_\phi \partial_1\phi \times \partial_3\phi + \nabla_\phi \partial_1\phi \times \partial_2\phi).
 \end{aligned}$$

Die Ableitung der letzten Komponenten $\nabla_\phi \partial_2\phi \times \partial_3\phi + \nabla_\phi \partial_1\phi \times \partial_3\phi + \nabla_\phi \partial_1\phi \times \partial_2\phi$ wird nur am ersten Summanden erläutert. Für die anderen beiden Summanden ist das Vorgehen analog. Es ergibt sich mit

$$\begin{aligned}
 \partial_2\phi \times \partial_3\phi &= (D_{22}\phi) \odot (D_{33}\phi) - (D_{32}\phi) \odot (D_{23}\phi) \\
 &\quad + (D_{32}\phi) \odot (D_{13}\phi) - (D_{12}\phi) \odot (D_{33}\phi) \\
 &\quad + (D_{12}\phi) \odot (D_{23}\phi) - (D_{22}\phi) \odot (D_{13}\phi)
 \end{aligned}$$

die Jacobimatrix

$$\begin{aligned}
 \nabla_\phi \partial_2\phi \times \partial_3\phi &= \text{diag}(D_{22}\phi)D_{33} + \text{diag}(D_{33}\phi)D_{22} - \text{diag}(D_{32}\phi)D_{23} \\
 &\quad - \text{diag}(D_{23}\phi)D_{32} + \text{diag}(D_{32}\phi)D_{13} + \text{diag}(D_{13}\phi)D_{32} \\
 &\quad - \text{diag}(D_{12}\phi)D_{33} - \text{diag}(D_{33}\phi)D_{12} + \text{diag}(D_{12}\phi)D_{23} \\
 &\quad + \text{diag}(D_{23}\phi)D_{12} - \text{diag}(D_{22}\phi)D_{13} - \text{diag}(D_{13}\phi)D_{22}.
 \end{aligned}$$

3.9 Optimierung mit dem Gauß-Newton-Verfahren

Für die Registrierung muss nun die Zielfunktion minimiert werden. Dies wird iterativ durch Bestimmung einer Abstiegsrichtung mit dem Gauß-Newton-Verfahren und Armijo-Linesearch nach [22] zur Schrittweitenanpassung realisiert. Das Gauß-Newton-Verfahren funktioniert ähnlich wie das Newton-Verfahren mit dem Unterschied, dass es nur eine Näherung an die zweite Ableitung verwendet. Das Gauß-Newton-Verfahren wird vor allem verwendet, um Zielfunktionen der Form

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \|r(x)\|^2$$

zu minimieren, indem der Term innerhalb der Norm zu

$$r(x_{k+1}) \approx r(x_k) + \nabla r(x_k) \cdot p_k$$

linearisiert wird. Dies führt auf ein Minimierungsproblem mit einer Suchrichtung p_k , die über das Lösen des Gleichungssystems

$$(\nabla r(x_k)^\top \nabla r(x_k)) \cdot p_k = - \underbrace{\nabla r(x_k) \cdot r(x_k)}_{\nabla f(x_k)}$$

3 Diskretisierung

erhalten werden kann. Die Iteration soll terminieren, wenn das Minimum gefunden worden ist oder nach einer endlichen Anzahl an Iterationsschritten, falls kein Minimierer gefunden werden kann. Deswegen wird der Minimierungsprozess mit den Abbruchkriterien von Gill, Murray und Wright [23] beschränkt, nach denen der Prozess abgebrochen wird, wenn

$$\begin{aligned} &\text{der Abstieg der Funktionswerte } \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\| < \tau \cdot (1 + \|f(x_k)\|) \text{ und} \\ &\text{die Änderung in den Iterationswerten } \|x_{k+1} - x_k\| < \sqrt{\tau} \cdot (1 + \|x_k\|) \text{ und} \\ &\text{die Größe der Ableitungsnorm } \|\nabla f(x_k)\| < \sqrt[3]{\tau} \cdot (1 + \|f(x_k)\|) \end{aligned}$$

oder die Norm der Ableitung von $f(x_k)$ unter die Maschinengenauigkeit fällt oder aber die maximale Iterationsschrittzahl überschritten worden ist. Für die hier allgemein verwendete Funktion f wird nun die Zielfunktion $J = D + \alpha S$ verwendet.

Die vorgestellte Art der Diskretisierung bringt noch einen weiteren Vorteil mit sich: Durch die zwei verschiedenen Gittermodelle ist es möglich, die gesamte Registrierung auch basierend auf einem voneinander unabhängigen Multi-Level-Ansatz (vgl. Abschnitt 3.10) durchzuführen.

3.10 Multi-Level-Verfahren

Das Verhalten der Registrierung ist stark vom Startwert abhängig. Um diesen Aspekt zu verbessern und zu verhindern, dass der Algorithmus in lokalen Minima terminiert, können Multi-Level genutzt werden. Die Idee dahinter besteht darin, zunächst eine oder mehrere Vorregistrierungen auf einer geringeren Bild- oder Gitterauflösung zu leisten, um einen besseren Startwert für die eigentliche Registrierung des Gesamtbildes mittels Gesamt-Deformationsgitters zu erhalten. Da die Auswertung der Distanz der Bilder und der Deformation auf zwei verschiedenen Gittern stattfindet, können diese auch unabhängig voneinander in der Auflösung verändert werden. Im ersten Problem wird sowohl die Auflösung des Bildgitters als auch des Deformationsgitters grob gewählt und vorregistriert. Danach wird die Auflösung von Problem zu Problem erhöht, bis der Originalzustand wieder hergestellt ist. Dieser Vorgang wird in Abbildung 3.15 verdeutlicht. Zur Prolongation der Bildgitter wird lediglich ein neues Cell-Centered-Gitter auf dem Gebiet Ω mit doppelter Auflösung erstellt. Für die Prolongation des Deformationsgitters wird der Ansatz der Linearkombination genutzt, der in Abschnitt 3.3.3 beschrieben worden ist.

An dieser Stelle ist wichtig, dass die Gitter der verschiedenen Level für die Deformation *nested* sind. Das heißt, dass die groben Gitter in den feinen enthalten sein müssen. Andernfalls wären die Funktionen von der gröberen Auflösung auf der feineren nicht exakt darstellbar.

Der letzte noch fehlende Schritt zur Registrierung ist die Auswertung des Bildes an jedem beliebigen Ort des Gebietes Ω , was für die Bestimmung von $T \circ \phi$ notwendig ist. Dieses wird über Interpolation mit kubischen Splines realisiert, welche nun eingeführt werden.

3.11 Interpolation von Bild-Daten

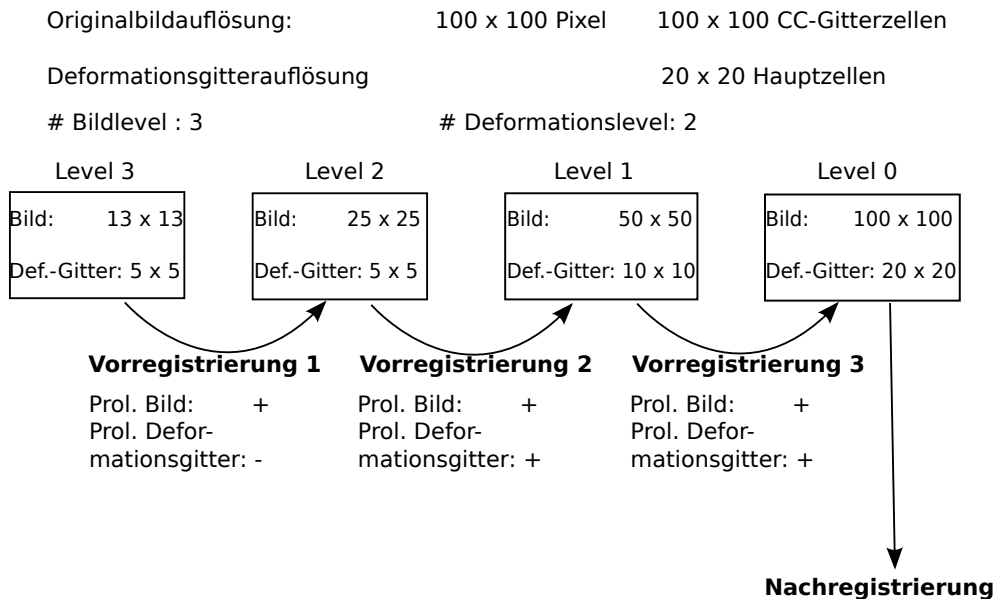


Abbildung 3.15: Darstellung eines Registrierungsbeispiels unter Nutzung von Multi-Level: Auf jeder Auflösung wird ein optimales ϕ bestimmt, welches ggf. prolongiert wird, um als Startwert für die nächste Registrierungsebene zu dienen.

3.11 Interpolation von Bild-Daten

Die zu registrierenden Bilder liegen in diskreten Daten vor. Im Zuge der Registrierung ist es jedoch notwendig, das Bild an jedem Ort des Bildgebietes Ω auszuwerten. Dafür wird Interpolation genutzt: Diese Interpolation soll zusätzlich stetig und differenzierbar sein. Ein gängiger Ansatz ist die Nutzung von kubischen Splines. Die Einführung in Splines erfolgt hierbei nach [24], und soll zunächst nur im Eindimensionalen betrachtet werden.

Die Interpolation mit kubischen B-Splines stellt eine Linearkombination aus lokalen Basisfunktionen

$$I = \sum_j \alpha_j b_j(x)$$

dar, welche auf einem kompakten Träger beschränkt sind (d.h. außerhalb dieser Trägermenge ist die Funktion stets Null) und deren Argumente b_j über Translate der Basisfunktion b_0 mittels

$$b_j(x) = b_0(x - j), \quad b_0 = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

erhalten werden können. Um nun auch höhere Ordnungen der Splines zu erhalten, werden diese über Faltung mit dem Null-Spline $b^n = b^{n-1} * b^0$ erzeugt, wobei b_0 auf dem Intervall $[0, 1)$ gerade den Wert 1 annimmt und sonst 0 ist. Der Operator $*$ steht für Faltung. Die konkrete Berechnung der Splines kann dann über die Rekursionsformel

3 Diskretisierung

nach Boor und Cox erfolgen, nach der sich jeder Spline aus

$$b^n(x) = \frac{x}{n} \cdot b^{n-1}(x) + \frac{n+1-x}{n} \cdot b^{n-1}(x-1)$$

zusammen setzt. Da die zweifache Differenzierbarkeit des Splines gegeben sein soll, ergibt sich für den kubischen B-Spline ein stückweises Polynom der Form

$$b^3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} \cdot x^3 & , x \in [0, 1) \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - \frac{1}{2} \cdot (x-1)^3 & , x \in [1, 2) \\ \frac{2}{3} - (x-2)^2 + \frac{1}{2} \cdot (x-2)^3 & , x \in [2, 3) \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot (x-3) + \frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 - \frac{1}{6} \cdot (x-3)^3 & , x \in [3, 4) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bleibt zu klären, wie die Koeffizienten α_j berechnet werden: Diese ergeben sich, da die Splines zu den zu interpolierenden Datenwerten passen müssen, über die so genannten *kardinalen* B-Splines

$$b_{k,h}^n(x) = b^n\left(\frac{x-x_0}{h} - k + \frac{n+1}{2}\right),$$

unter Lösen des linearen Gleichungssystems von

$$d_j = I(x_j) = \sum_{k=1}^M c_k \cdot b_{k,h}^n(x_j) \quad j = 1, \dots, M,$$

wobei d_j die zu interpolierenden Datenpunkte beschreibt.

Nun sollen jedoch nicht nur eindimensionale Daten interpoliert werden, sondern zweidimensionale Bilddaten d_{ij} für $i = 1, \dots, M$ und $j = 1, \dots, N$, an den Gitterpunkten (x_i, y_j) . Das Modell der Splines muss also in den mehrdimensionalen Raum übertragen werden. Die gesuchte Interpolante ist dann

$$d_{ij} = I(x_i, y_j) \stackrel{!}{=} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\lambda=1}^M c_{\lambda,\mu} \cdot b_{\lambda,\mu}(x_i, y_j). \quad (3.9)$$

Die Idee besteht nun darin, diese höherdimensionalen B-Splines durch die eindimensionalen Basisfunktionen mittels

$$\begin{aligned} b^n(x, y) &= b^n(x) \cdot b^n(y) \\ b_{\lambda,\mu,h}^n(x, y) &= b_{\lambda,h_1}^n(x) \cdot b_{\mu,h_2}^n(y) \end{aligned}$$

auszudrücken. Nun müssen noch die 2-D-Koordinaten bestimmt werden. Analog zu Gleichung (3.9) kann das Problem zu

$$d_{ij} = \underbrace{\sum_{\mu=1}^N \sum_{\lambda=1}^M c_{\lambda,\mu} \cdot b_{\lambda,h_1}^n(x_i) \cdot b_{\mu,h_2}^n(y_j)}_{\hat{c}_{i\mu}}$$

3.11 Interpolation von Bild-Daten

umformuliert werden, welches in zwei Schritten als jeweils 1-D-Interpolationsproblem über

$$A_2 = (b_{\mu, h_2}^n(y_j))_{\mu, j=1}^{N, N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$d_i = (d_{i1}, \dots, d_{iN})^\top \in \mathbb{R}^N$$

$$\hat{c}_i = (\hat{c}_{i1}, \dots, \hat{c}_{iN})^\top \in \mathbb{R}^N$$

löse: $A_2 \cdot \hat{c}_i = d_i$ für $i = 1, \dots, M$

$$\hat{c}_{i\mu} = \sum_{\lambda=1}^N c_{\lambda\mu} b_{\lambda, h_1}^n(x_i) \text{ für alle } i = 1, \dots, M$$

$$A_1 = (b_{\lambda, h_1}^n(x_i))_{\lambda, i=1}^{M, M} \in \mathbb{R}^{M \times M}$$

$$\hat{c}_\mu = (\hat{c}_{1\mu}, \dots, \hat{c}_{M\mu})^\top \in \mathbb{R}^M$$

$$c_\mu = (c_{1\mu}, \dots, c_{M\mu})^\top \in \mathbb{R}^M$$

löse: $A_1 \cdot c_\mu = \hat{c}_\mu$ für $\mu = 1, \dots, N$

gelöst werden kann. Entsprechend dieses Systems sind die Splines dann auch auf den dreidimensionalen Raum erweiterbar.

4 Experimente und Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die vorgestellten Regularisierer verglichen. Es wird untersucht, wie sich diese zum Teil kombiniert bei verschiedenen Deformationen verhalten. Es soll herausgestellt werden, welches unterschiedliche Verhalten die Regularisierer zeigen und bei welchen Deformationen welcher Regularisierer bevorzugt gewählt werden sollte. Dafür werden die in Tabelle 4.1 aufgezeigten Testreihen erstellt. Zunächst wird jeweils einer der Regularisierer diffusiv, linear elastisch oder quadratisch elastisch verwendet. Anschließend wird einer von diesen im 2D mit dem Volumenregularisierer bzw. im 3D auch noch mit dem Flächenregularisierer gepaart. Um das Verhalten der Regularisierer besser erläutern zu können, ist dieser Abschnitt zweigeteilt. Zunächst werden nur Testdaten betrachtet, die das Verhalten der Regularisierer an elementaren Deformationen – wie Rotation und Skalierungen – deutlich machen. Im zweiten Schritt werden die Regularisierer zur Registrierung von Bilddaten verwendet. Die Auswertung der Tests und die Implementierung der Algorithmen erfolgt unter Matlab 2011a.

4.1 Verhalten der Regularisierer bei Elementardeformationen

Zunächst soll das Verhalten der Regularisierer bei Elementardeformationen analysiert und die Werte der Regularisierer bei

- Rotation,
- Skalierung und
- Scherung

bestimmt werden. Die Tests erfolgen nur im Zweidimensionalen.

	Testreihe 1	Testreihe 2	Testreihe 3
&	–	Volumen	Flächen
diffusiv	2D / 3D	2D / 3D	3D
linear elastisch	2D / 3D	2D / 3D	3D
quadratisch elastisch	2D / 3D	2D / 3D	3D

Tabelle 4.1: Testreihen der Regularisierer im 2D und 3D.

4 Experimente und Ergebnisse

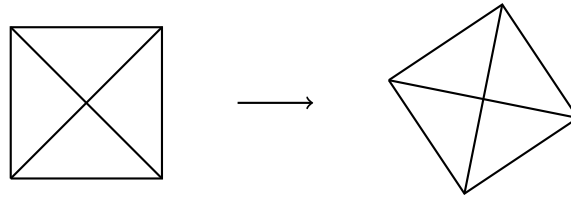


Abbildung 4.1: Deformation einer Gitterzelle bei Rotation.

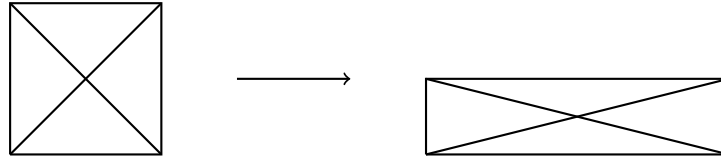


Abbildung 4.2: Deformation einer Gitterzelle bei volumenerhaltender Skalierung.

4.1.1 Testdeformationen

Rotation

Für die Rotation wird das Gebiet Ω um Vielfache eines Winkels ρ mit

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(k\rho) & -\sin(k\rho) \\ \sin(k\rho) & \cos(k\rho) \end{pmatrix} x$$

um den Mittelpunkt des Gebietes gedreht. Eine rotierte Gitterzelle könnte dann wie in Abbildung 4.1 aussehen.

Skalierung

Für die Betrachtung der Skalierung werden zwei Tests unterschieden: In einem ersten Schritt werden die Werte der Regularisierer bei **volumenerhaltender Skalierung** betrachtet (vgl. Abbildung 4.2). Die Deformation wird durch

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} x$$

beschrieben.

Als zweites soll eine weitere Eigenschaft der aus Kapitel 2.3.5 bekannten Deformationsdeterminante betrachtet werden: Ist die Determinante der Ableitung der Deformation ϕ $\det(\nabla\phi) = 1$, ist gewährleistet, dass keine Volumenänderung stattfindet. Es gilt jedoch für hinreichend glatte Verrückungen und demzufolge kleine Gradienten mit

$$\begin{aligned} \det(\nabla\phi) &= \det(\nabla(id + u)) = \det(I + \nabla u) \\ &\approx 1 + \text{tr}(\nabla u) \\ &= 1 + \text{div}(u) \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.1 Verhalten der Regularisierer bei Elementardeformationen

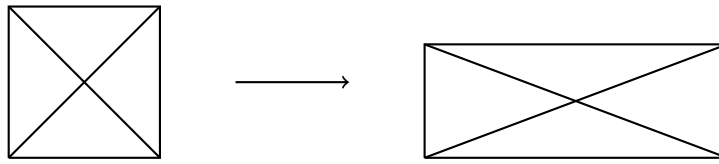


Abbildung 4.3: Deformation einer Gitterzelle bei Skalierung mit Divergenz Null.

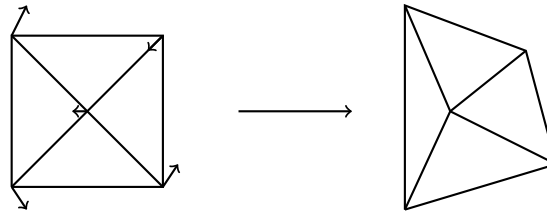


Abbildung 4.4: Nicht-lineare Deformation einer Gitterzelle, durch Addition eines Zufallsvektors.

auch, dass eine solche Deformation über eine divergenzfreie Verrückung ausgedrückt werden kann. Um diese Eigenschaft zu simulieren, soll eine **divergenzfreie Skalierung** betrachtet werden, sodass die Divergenz der Verrückungsänderung gleich Null ist (vgl. Gleichung (4.1)). Dies soll Querkontraktion simulieren. Ähnlich wie bei einer volumenerhaltenden Skalierung bewirkt dies, dass beim Verändern einer Dimensionsrichtung, die anderen beiden mit beeinflusst werden. Im Unterschied zur volumenerhaltenden Deformation muss die Zelle bei der divergenzfreien Deformation aber nicht im gleichen Maße in eine Dimension abnehmen wie in die andere zu. Eine mögliche – nach diesem Schema deformierte – Gitterzelle zeigt Abbildung 4.3. Zur Deformation wird mit $u = \phi - x$ die Form der Skalierungsmatrix für ϕ

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

als Skalierungsmatrix für u angepasst. Mit der Forderung, dass nun die Divergenz der Verrückung Null sein soll folgt unmittelbar $b = 2 - a$. Somit ergibt sich die Deformationsvorschrift

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix} x.$$

Die Untersuchung der Divergenz soll zum einen das Verhalten der elastischen Regularisierer verdeutlichen, da diese Teil des linear und des quadratisch elastischen Regularisierers ist, zum anderen den Einfluss des Volumenregularisierers hervorheben da sie auch eine Näherung an $\det(\nabla\phi)$ darstellt.

Nicht-lineare Deformation

Ein weiterer Test soll das Verhalten der Regularisierer analysieren, wenn eine nicht-lineare Deformation stattfindet. Eine mögliche Gitterzelldeformation ist in Abbildung 4.4 abgebildet. Dafür wird ein Zufallsvektor

4 Experimente und Ergebnisse

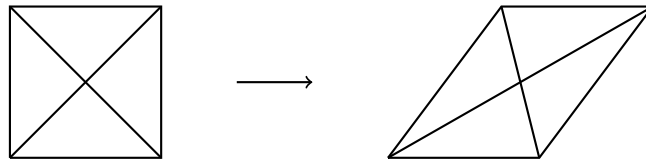


Abbildung 4.5: Deformation einer Gitterzelle bei Scherung entlang der x_1 -Achse.

$$v = \begin{pmatrix} 0.43 & 0.48 \\ 0.38 & 0.44 \\ 0.76 & 0.64 \\ 0.79 & 0.70 \\ 0.18 & 0.75 \end{pmatrix}$$

erzeugt und anschließend auf die diskrete Form des Bildgebietes jeweils ein Vielfaches dieses Vektors addiert. Dieser Test soll Unterschiede zwischen linear und nichtlinear elastischem Regularisierer bei großen und kleinen Deformationen (vgl. Untersuchungen zu Gleichung 2.4) aufzeigen.

Scherung

Für die Scherung wird im Zweidimensionalen jeweils um einen Faktor a entlang der x_1 -Achse geschert (vgl. Abbildung 4.5). Die Deformationsvorschrift lautet somit

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Die vorgestellten Elementardeformationen werden in Tabelle 4.2 noch einmal auf einen Blick dargestellt.

4.1.2 Ergebnisse

Zur Erinnerung: Die Tests der Elementardeformation sind nur im 2D durchgeführt worden. Dementsprechend entfallen die Untersuchungen und die Ergebnisse des Kofaktorregularisierers. Auch der Volumenregularisierer wird nur dann verwendet, wenn die Elementardeformation nicht volumenerhaltend ist. Die Werte der Regularisierer im Zuge der Rotation sind in Abbildung 4.6 dargestellt. Während der diffusive und linear elastische Regularisierer ein recht ähnliches Verhalten aufweisen und sich lediglich in der Breite der Glockenkurve unterscheiden und damit mit dem linear elastischen Regularisierer mehr Rotation zugelassen wird als mit dem diffusiven, ist der quadratisch elastische Regularisierer rotationsinvariant.

Die Verhalten der Regularisierer bei Skalierung unter Volumenerhaltung bzw. divergenzfreien Skalierung sind in Abbildung 4.7 dargestellt. Es wird deutlich, dass der quadratisch elastische Regularisierer bei beiden Deformationsarten bei größerer Transformation größere Werte liefert als die übrigen Regularisierer. Größere Deformationen

4.1 Verhalten der Regularisierer bei Elementardeformationen

Rotation:	$\phi(x) = \begin{pmatrix} \cos(k\rho) & -\sin(k\rho) \\ \sin(k\rho) & \cos(k\rho) \end{pmatrix} x$
Volumenerhaltende Skalierung:	$\phi(x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} x$
Skalierung mit Divergenz Null:	$\phi(x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2-a \end{pmatrix} x$
Änderung eines Linienelements:	$\phi(x) = x + \begin{pmatrix} 0.43 & 0.48 \\ 0.38 & 0.44 \\ 0.76 & 0.64 \\ 0.79 & 0.70 \\ 0.18 & 0.75 \end{pmatrix}$
Scherung:	$\phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$

Tabelle 4.2: Zusammenfassung der Elementardeformationen

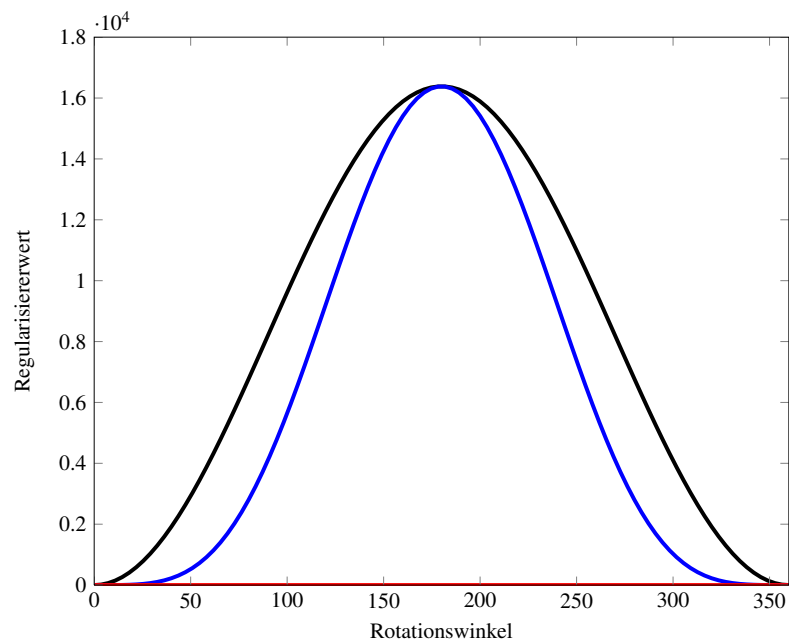
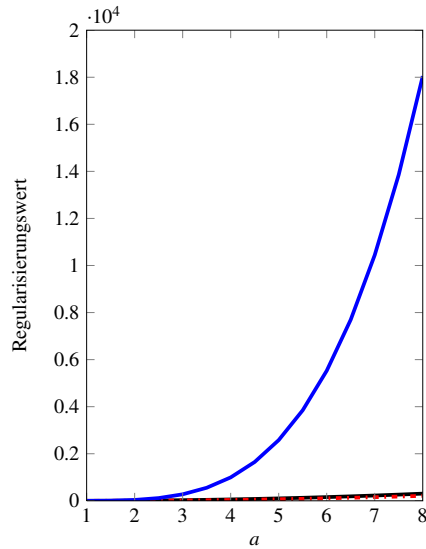
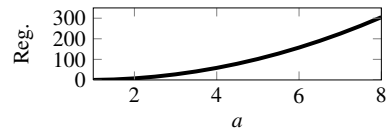


Abbildung 4.6: Verhalten der Regularisierer bei Rotation des regulären Ausgangsgitters. Schwarz: diffusiv; blau: linear elastisch; rot: quadratisch elastisch.

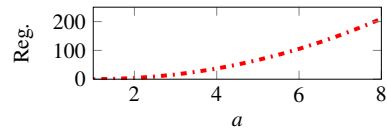
4 Experimente und Ergebnisse



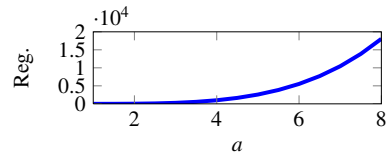
(a) Regularisierung bei volumenerhaltender Skalierung; blau: quadratisch elastisch, rot: linear elastisch, schwarz: diffusiv



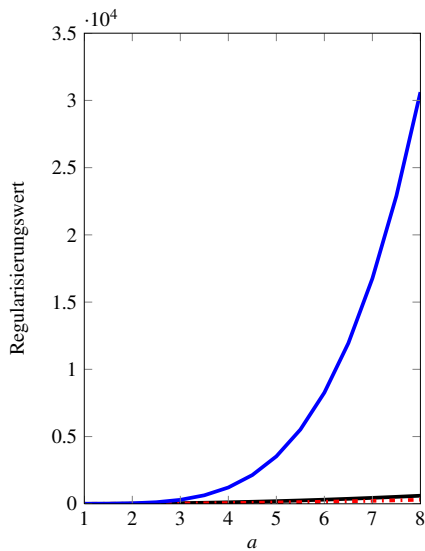
(b) Regularisierung bei volumenerhaltender Skalierung, diffusiv



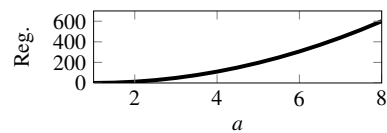
(c) Regularisierung bei volumenerhaltender Skalierung, linear elastisch



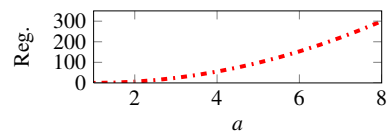
(d) Regularisierung bei volumenerhaltender Skalierung, quadratisch elastisch



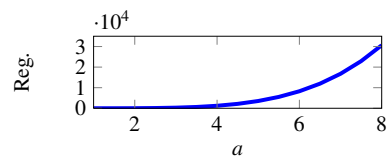
(e) Regularisierung bei Skalierung mit Divergenz 0; blau: quadratisch elastisch, rot: linear elastisch, schwarz: diffusiv



(f) Regularisierung bei Skalierung mit Divergenz 0, diffusiv



(g) Regularisierung bei Skalierung mit Divergenz 0, linear elastisch



(h) Regularisierung bei Skalierung mit Divergenz 0, quadratisch elastisch

Abbildung 4.7: Einfluss der Regularisierer bei volumenerhaltender Skalierung und Skalierung mit Divergenz Null; linke Spalte: Übersicht aller Regularisierer, rechte Spalte: Darstellung der einzelnen Regularisierer.

4.1 Verhalten der Regularisierer bei Elementardeformationen

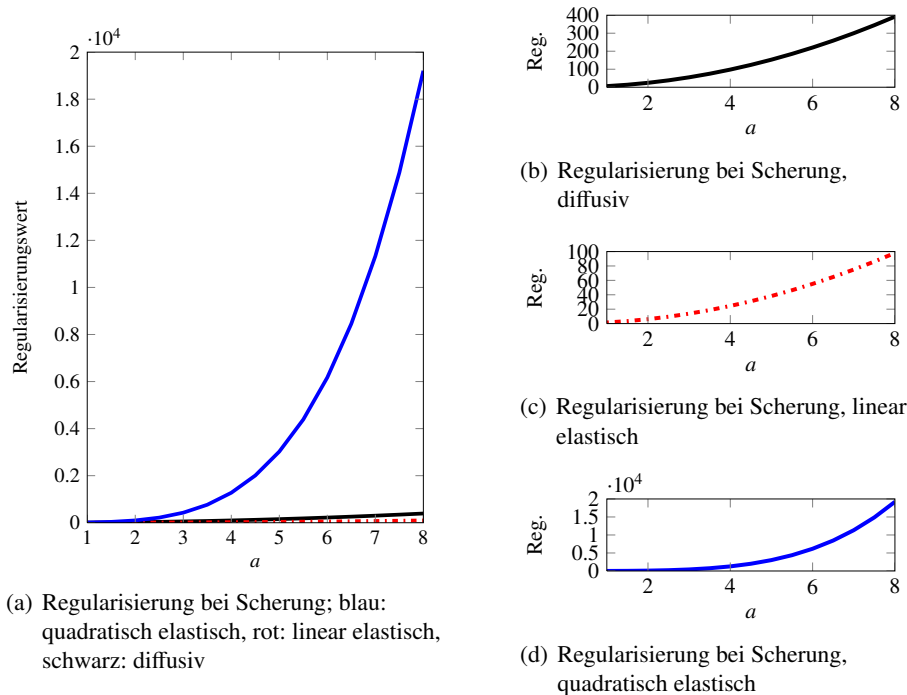


Abbildung 4.8: Einfluss der Regularisierer bei Scherung entlang der x_1 -Achse; links: Übersicht aller Regularisierer, rechts: Darstellung der einzelnen Regularisierer.

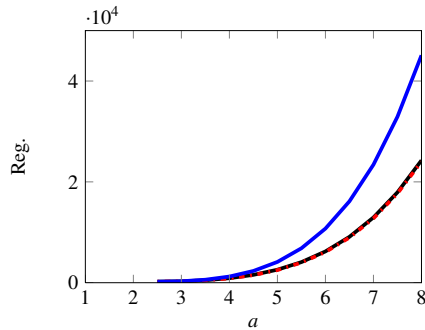
werden also mit dem quadratisch elastischen Regularisierer stärker gewichtet als kleinere, bei denen der Unterschied zwischen den Regularisierern nur gering ist.

Ein ähnliches Verhalten weist auch die Regularisierung der Scherung (vgl. Abbildung 4.8) auf. Auch hier unterscheidet sich der quadratisch elastische Regularisierer stark vom linear elastischen und diffusiven Regularisierer, wenn die Deformation groß wird, während bei kleinen Deformationen die Kurven der Regularisierer einen ähnlichen Verlauf aufweisen.

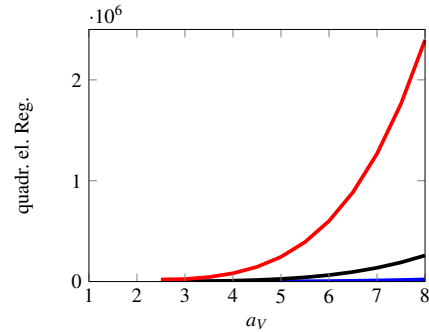
Als Nächstes wird der Einfluss des Volumenregularisierers auf die divergenzfreie Skalierung analysiert (vgl. Abbildung 4.9(a)). Bei der Zuschaltung mit $\alpha_m = \alpha_{\text{Vol}}$ ist der Kurvenverlauf des quadratisch elastischen Regularisierers mit Volumenregularisierung immer noch ähnlich zu dem ohne Volumenregularisierung. Bei der Paarung mit linear elastischem und diffusivem Regularisierer unterscheiden sich die Kurvenverläufe jedoch stark. Um einen besseren Eindruck für die Veränderung in den Kurvenverläufen des quadratisch elastischen Regularisierers mit und ohne Volumen zu bekommen, wird das Verhältnis von $\alpha_m : \alpha_{\text{Vol}}$ nun jeweils um Faktor 10 erhöht (vgl. Abbildung 4.9(b)).

Die Ergebnisse der nicht-linearen Deformation nach Abbildung 2.2 sind in Abbildung 4.10 dargestellt. Verschiedene Orte werden jeweils um ein Vielfaches eines festen Zufallswertes voneinander entfernt. Während sich die Regularisierung mittels diffusivem und linear elastischem Regularisierer nur um einen Steigungsfaktor unterscheidet, nimmt der quadratisch elastische Regularisierer quadratisch zu und liefert somit schnell sehr viel größere Regularisierungswerte als die anderen beiden.

4 Experimente und Ergebnisse

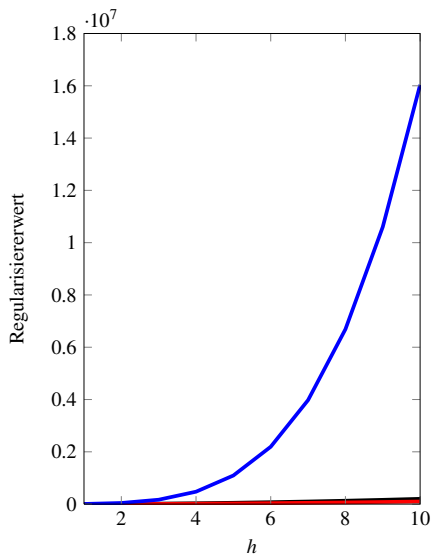


(a) Regularisierung bei divergenzfreier Skalierung und Volumenregularisierung im Verhältnis 1:1; blau: quadratisch elastisch, rot: linear elastisch, schwarz: diffusiv

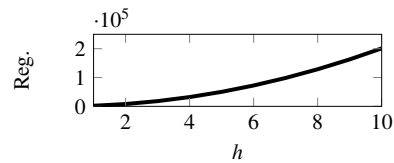


(b) Regularisierungswerte bei zunehmender Gewichtung von α_{Vol} ; rot: $\alpha_{\text{Vol}} = 100$, schwarz: $\alpha_{\text{Vol}} = 10$, blau: $\alpha_{\text{Vol}} = 1$

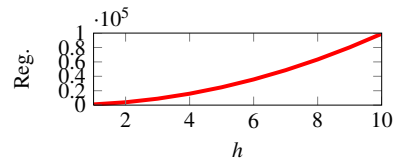
Abbildung 4.9: Einfluss des Volumenregularisierers auf divergenzfreie Skalierung



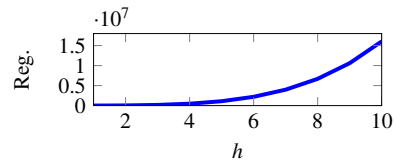
(a) Änderung eines Linienelementes; blau: quadratisch elastisch, rot: linear elastisch, schwarz: diffusiv



(b) Regularisierung bei $\text{div}(u) = 0$, diffusiv



(c) Regularisierung bei $\text{div}(u) = 0$, linear elastisch



(d) Regularisierung bei $\text{div}(u) = 0$, quadratisch elastisch

Abbildung 4.10: Änderung eines Linienelementes um das h -fache eines Wertes.

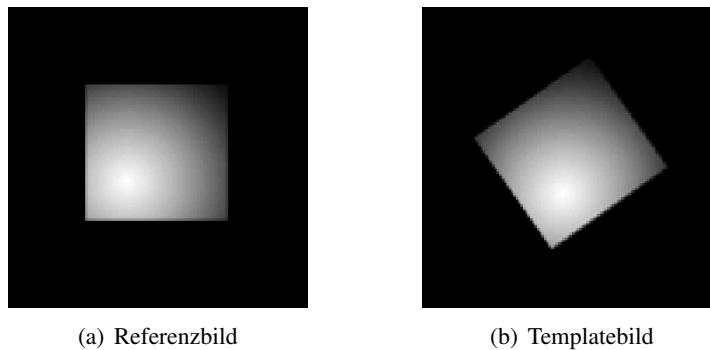


Abbildung 4.11: Registrierung zweier um 35° gegeneinander rotierter Quadrate mit Helligkeitsverlauf

Es soll jedoch nicht nur das Verhalten der Regularisierer bei verschiedenen Grunddeformationen untersucht werden, sondern auch die Registrierung abhängig von Deformationen und Eingabebildern. Dafür werden im folgenden Abschnitt Testbilder vorgestellt und auf ihnen die Registrierung durchgeführt.

4.2 Registrierung

In einem nächsten Schritt wird der Einfluss der verschiedenen Regularisierer auf die Registrierung untersucht. Dafür werden die nachfolgenden Testbilder erstellt.

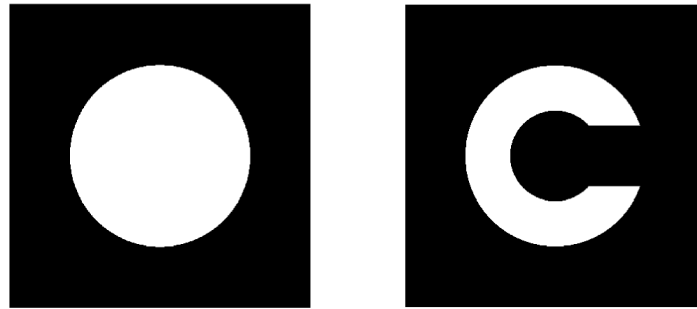
4.2.1 Testbilder

Akademische Daten

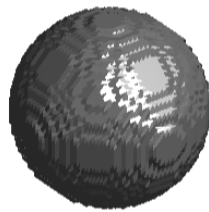
Ein erstes Beispiel zeigt den Einfluss der Regularisierer auf Rotation. Hierfür werden zwei um 35° gegeneinander rotierte Quadrate aufeinander registriert wie sie in Abbildung 4.11 dargestellt sind. Damit genügend Gradienteninformation der Grauwerte in den Bildern enthalten ist, werden nicht einfach schwarz-weiß-Bilder von zwei Quadraten erzeugt, sondern in das Quadrat ein Helligkeitsverlauf gelegt. Dieses 2D-Beispiel hat eine Auflösung von 128×128 Pixeln.

Im Zweidimensionalen wird in einem weiteren Test ein Kreis auf ein C registriert, im Dreidimensionalen entsprechend eine Kugel auf ein schalenähnliches Objekt. Beide Testbilder sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Die Auflösung für dieses 2D-Beispiel wird – wie auch schon bei den Quadraten auf 128×128 Pixel festgesetzt. Im 3D wird aufgrund der Rechenzeit nur eine Auflösung von $32 \times 32 \times 32$ Voxeln gewählt. Mit dem erstellten Programm würde eine Registrierung von größerer Auflösung zu viel Zeit in Anspruch nehmen. Dieses Beispiel dient dazu, das Verhalten der Regularisierer an einem Objekt zu untersuchen, für dessen Registrierung eine große unregelmäßige Deformation nötig ist.

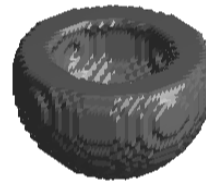
4 Experimente und Ergebnisse



(a) 2D: Registrierung eines Kreises (Template) auf ein C (Referenz)



(b) 3D: Template



(c) 3D: Referenz

Abbildung 4.12: Registrierung eines Kreises auf ein C im 2D (a) und einer Kugel auf eine Schale (b) und (c)

Reale Daten

Um auch die Regularisierer bei Registrierung realer Daten vergleichen zu können, werden sie an einem medizinischen Beispiel getestet. Hierfür werden CT-Bilder der Lunge der Auflösung von 128×128 Pixeln, wie sie in Abbildung 4.13 dargestellt sind, unter Verwendung der unterschiedlichen Regularisierer registriert. Diese Registrierung erfolgt im Dreidimensionalen auf dem gesamten Lungen-CT-Datensatz (allerdings nur bei einer Auflösung von $32 \times 32 \times 32$ Voxeln), im Zweidimensionalen nur auf zwei ähnlichen Schichten aus den zu vergleichenden Aufnahmen.

Die realen Lamé-Konstanten wären die in Abschnitt 2.3.4 eingeführten. In den nachfolgenden Tests wird jedoch nur $\mu = \lambda = 1$ genutzt.

4.2.2 Ergebnisse

Für die Registrierung der Testbilder wird folgende Strategie gewählt: Sei zunächst der Parameter α_m derart gewählt, dass abhängig vom Hauptregularisierer ein möglichst kleiner SSD-Wert (Distanz) erzielt wird, α_m dabei aber möglichst groß bleibt. Ersteres schafft eine größere Ähnlichkeit zwischen den beiden Bildern, letzteres forciert ein glatteres Deformationsgitter. Es soll also eine minimale Deformation bei vergleichbarer Ähnlichkeit erreicht werden. Anschließend wird das Deformationsgitter optisch auf Faltungen oder kollabierte Volumenabschnitte geprüft und gegebenenfalls über die

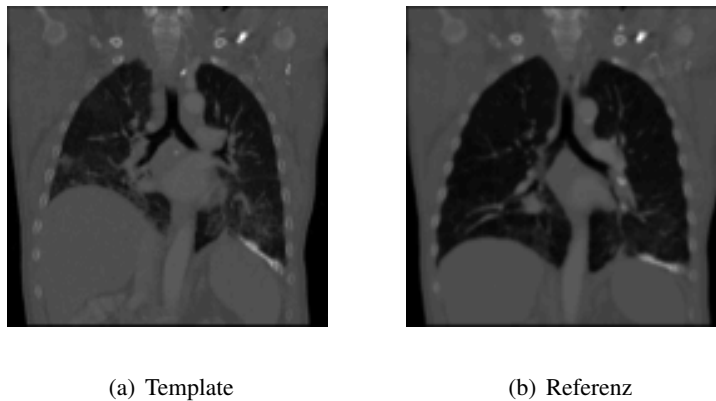


Abbildung 4.13: Registrierungsbeispiel auf einem realen CT-Datensatz der Lunge; 2D: zwei Schichten (wie abgebildet) werden registriert; 3D: Der gesamte Datensatz wird registriert.

Regularisierer	α_m	SSD-Wert (%)
diffusiv	1	3.85
linear elastisch	10	3.84
quadratisch elastisch	100	3.81

Tabelle 4.3: Ergebnisse der Registrierung von zwei gegeneinander rotierten Quadraten

Parameter α_{Vol} bzw. α_{Cof} korrigiert. Der Registrierungsvorgang erfolgt unter Verwendung des Multi-Level-Ansatzes.

Ergebnisse der zweidimensionalen Testbilder

Die Ergebnisse und Eigenschaften der unterschiedlichen Hauptregularisierer der Registrierung zu den beiden gegeneinander rotierten Quadraten sind in Abbildung 4.14 dargestellt. Die Differenzbilder unterscheiden sich bei allen drei Hauptregularisierern nicht merklich, allerdings weisen die Deformationsgitter und Deformationsspektren starke Unterschiede auf. Im Deformationsspektrum ist die Norm des Verrückungswertes an den aus dem optimalen Deformationsgitter rekonstruierten Bildgitterpunkten aufgetragen. Während beim diffusiven Regularisierer die Gitterpunkte im Innern des Quadrates an die richtige Position „gezogen“ werden und außerhalb weitestgehend konstant bleiben, weisen sowohl der linear elastische, als auch der quadratisch elastische Regularisierer deutlich mehr Rotationseigenschaft auf, was auch an den kreisförmigen Deformationsplots sichtbar wird. Dieses Ergebnis spiegelt das der Testdaten wieder. Mit dem quadratisch elastischen Regularisierer wird keine Rotation bestraft und somit kann diese ungehindert durchgeführt werden. Der linear elastische Regularisierer lässt sehr viel mehr Rotation zu als der diffusive. Die Differenzen der registrierten Bilder sind in Tabelle 4.3 dargestellt. Der SSD-Wert kann jeweils auf ca. 3.8% des Wertes der nicht registrierten Bilder reduziert werden. Die Regularisierer unterscheiden sich in diesen SSD-Werten nicht merklich. Das Deformationsgitter hin-

4 Experimente und Ergebnisse

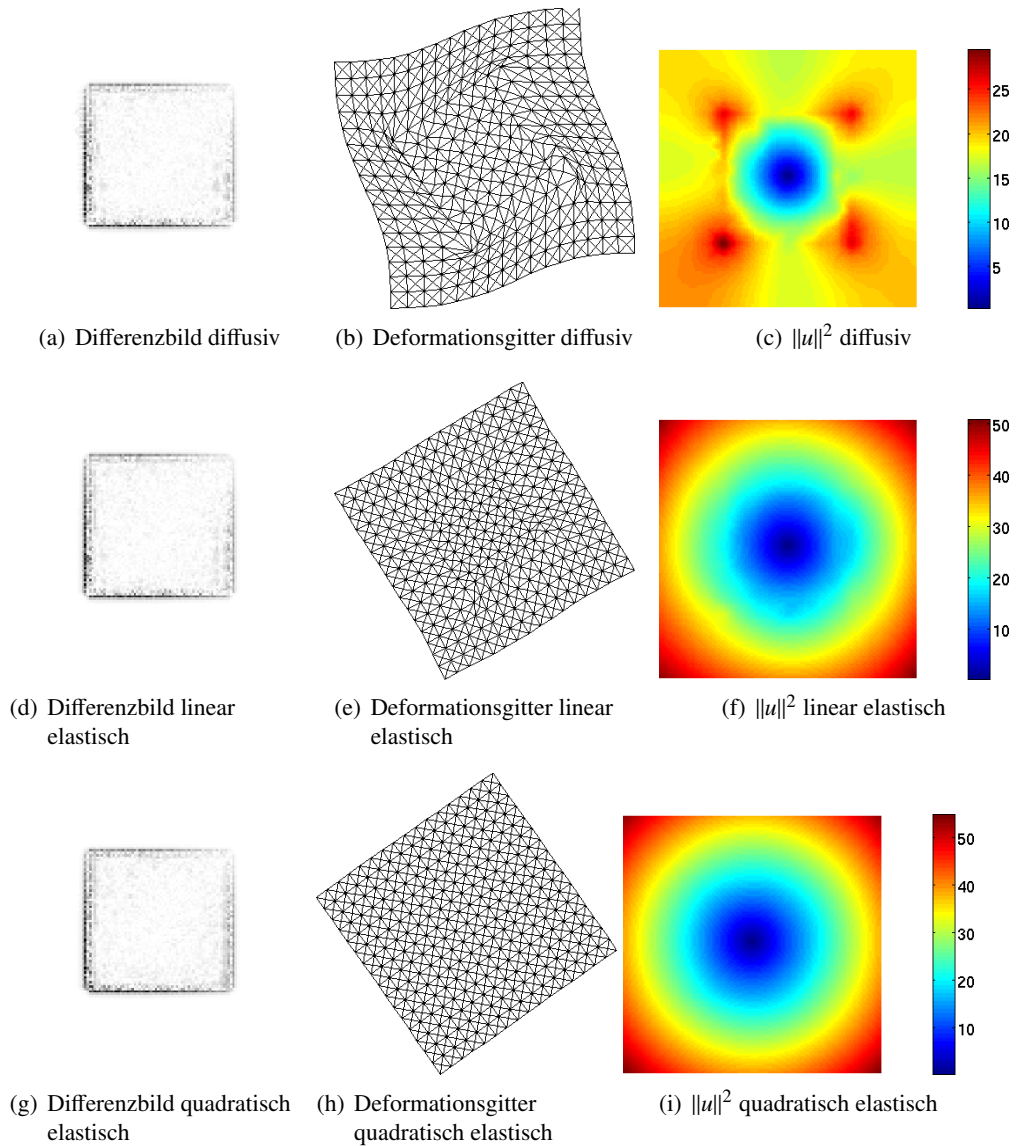


Abbildung 4.14: Ergebnisse der Registrierung bei zwei um 35° gegeneinander rotierten Quadraten im 2D; Darstellung von Differenzbild des Registrierungszustandes, Deformationsgitter und quadratische Norm des Deformationswertes an den rekonstruierten Bildgitterpunkten.

Regularisierer	α_m	α_{Vol}	SSD-Wert
linear elastisch	10^{-2}	0	6.86%
	10^{-3}	10^{-2}	9.37%
quadratisch elastisch	10^{-4}	0	6.38%
	10^{-3}	10^{-2}	10.64%

Tabelle 4.4: Ergebnisse der Registrierung eines Kreises auf ein C mit elastischen Regularisierern.

gegen lässt große Unterschiede deutlich werden: Das am ehesten bei einer Rotation zu erwartende Deformationsgitter liefert der quadratisch elastische Regularisierer. Dieser Aspekt wird auch unter Betrachtung der Deformationsspektren deutlich: Die Rotation äußert sich in dem konzentrischen Kreisspektrum, welches am regelmäßigsten beim quadratisch elastischen Regularisierer zu finden ist. Es ist zwar davon auszugehen, dass aufgrund der Deformation besonders beim linear elastischen und auch beim quadratisch elastischen Regularisierer eine Volumenregularisierung greifen würde, allerdings wird auf diese bei diesem Beispiel verzichtet, da es sich bei der Rotation eigentlich um eine volumenerhaltende Deformation handelt.

Bei der Registrierung des Kreises auf das C wird zunächst wieder der diffusive Regularisierer ohne Hinzunahme des Volumens verwendet. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.15 dargestellt. Mit diesem Regularisierer ist es möglich, den SSD-Wert auf 6.44% zu reduzieren. Nun wird noch ein weiterer Aspekt in diesem Registrierungsbeispiel aufgegriffen: Betrachtet man das Bild des Deformationsgitters einmal genauer, fallen besonders am rechten Randbereich des ehemaligen Kreises kollabierte Teilvolumen bzw. Faltungen des Gitters auf. Solche Transformationen sollen beim Vorgang der Registrierung jedoch unbedingt vermieden werden. Deswegen wird für den Regularisierer nun der Volumenterm hinzugeschaltet, der sowohl das Kollabieren der Volumen als damit auch Faltungen des Gitters verhindert. Die Ergebnisse dazu sind in Abbildung 4.16 dargestellt. Die sich zuvor in der Faltung befindlichen Teilvolumen sind noch immer stark verkleinert, allerdings werden die Faltungen jetzt vollständig unterbunden. Als Nächstes wird analysiert, wie sich die Registrierung verändert, wenn die Regularisierer höherer Komplexität verwendet werden. Die Ergebnisse dazu sind in Tabelle 4.4 und Abbildung 4.17 und 4.18 (a)-(f) dargestellt. Auch in diesem Beispiel unterscheiden sich die Differenzbilder wenig und die SSD-Werte liegen alle in der gleichen Größenordnung. Doch auch hier sind bei der Deformation des Gitters wieder große Unterschiede festzustellen: Während beim diffusiven Regularisierer ohne Volumenregularisierung die Faltung nur lokal am rechten ehemaligen Kreisrand auszumachen ist, erstreckt sich die Faltung bei der Registrierung mit dem quadratisch elastischen Regularisierer ohne Volumenregularisierung viel globaler über das Gitter. Fast der gesamte Kreisrandbereich wird in die Faltung mit einbezogen und teilweise erstrecken sich diese Faltungen bis hin zum Gitterrand. Bei der linear elastischen Regularisierung schließlich ist das Deformationsgitter dem des diffusiven Ansatzes ähnlich, jedoch tritt hier eine starke Drehung des Gitters auf. Diese kann, wie auch die starken Faltungen des quadratisch elastischen Regularisierers, jedoch bei Hinzuschalten des Volumenterms eliminiert werden. Im Vergleich zum linear elastischen Regularisierer mit Volumenregularisierung weist nun die Deformation unter dem quadratisch elasti-

4 Experimente und Ergebnisse

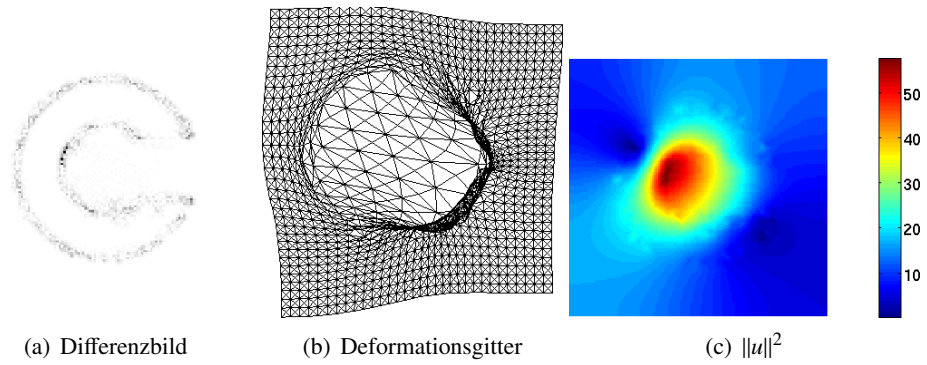


Abbildung 4.15: Registrierung eines Kreises auf ein C mittels diffusiven Regularisierers

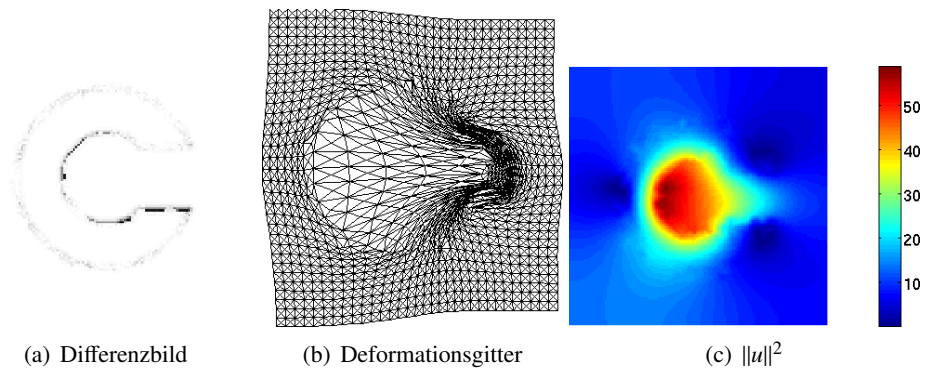


Abbildung 4.16: Registrierung eines Kreises auf ein C mit diffusivem Regularisierer unter Volumenregularisierung, $\alpha : \alpha_{Vol} = 1 : 1$.

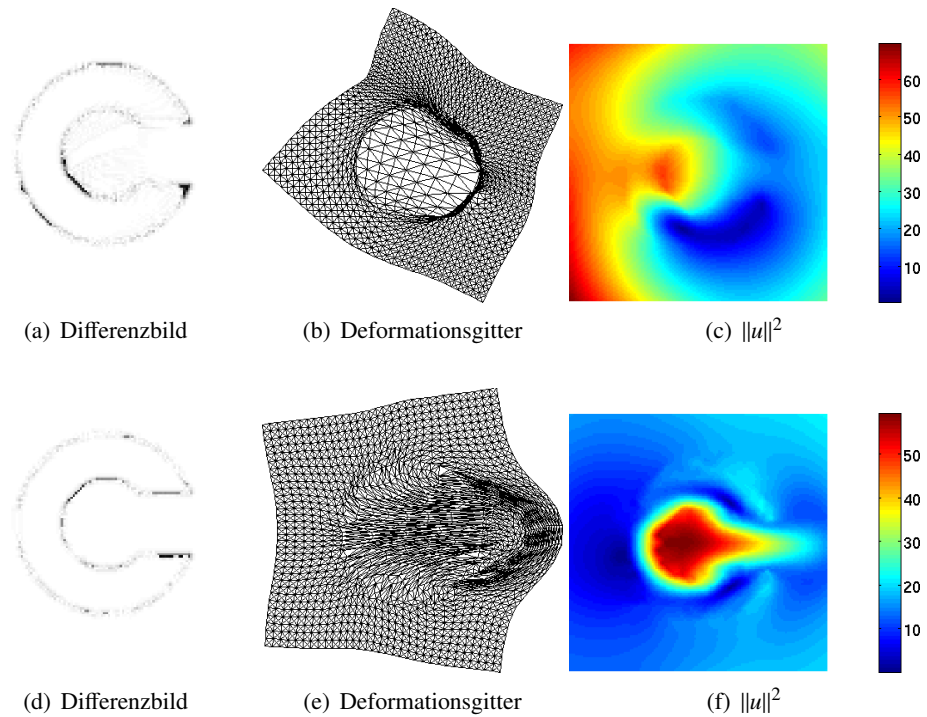


Abbildung 4.17: Registrierung eines Kreises auf ein C mit linear elastischem Regularisierer ohne Volumenregularisierung (a)-(c) und mit Volumenregularisierung (d)-(f)

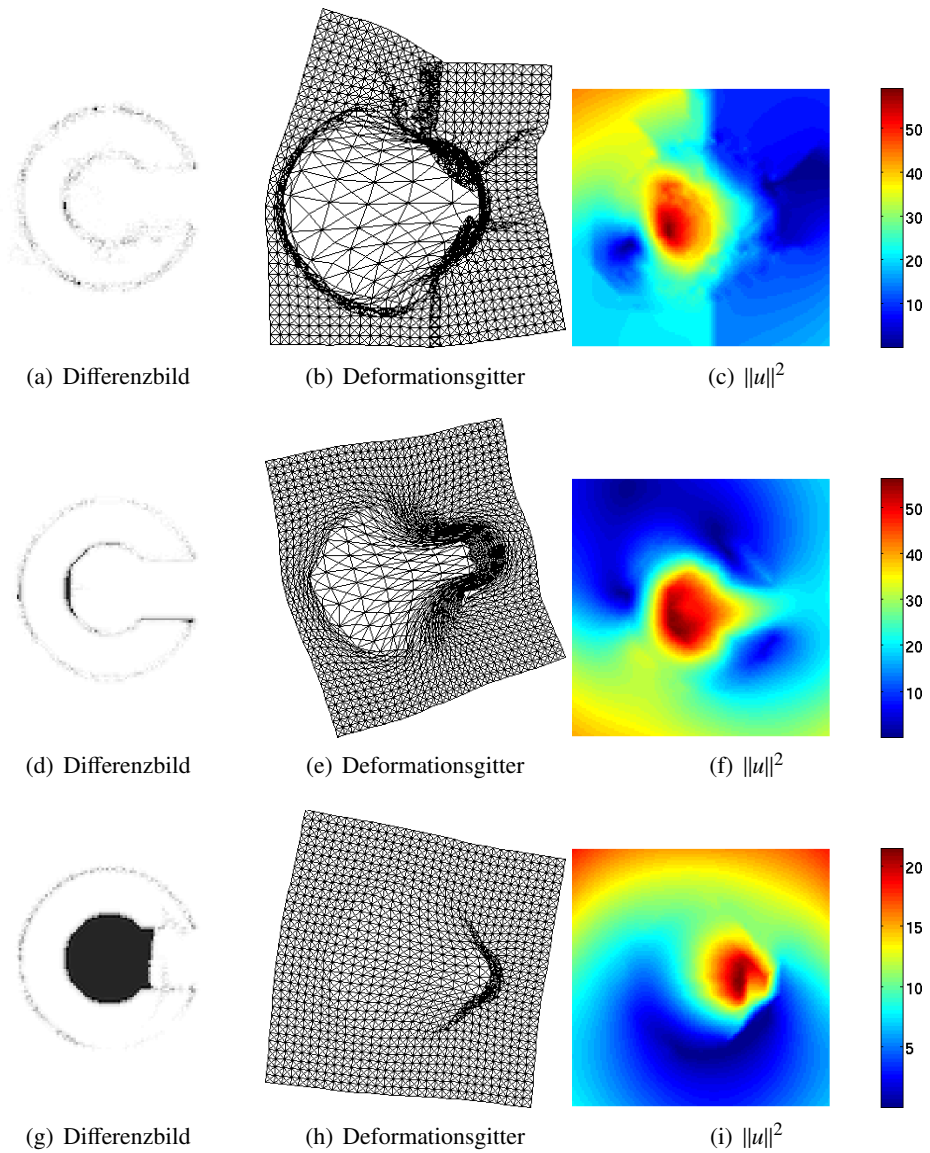


Abbildung 4.18: Registrierung eines Kreises auf ein C mit quadratisch elastischem Regularisierer; (a)-(c) quadratisch elastisch ohne Volumenregularisierung, $\alpha = 10^{-4}$; (d)-(f) quadratisch elastisch mit Volumenregularisierung, $\alpha = 10^{-4}$, $\alpha_{Vol} = 10^{-3}$; (g)-(i) quadratisch elastisch ohne Volumenregularisierung, $\alpha = 10^{-1}$.

4 Experimente und Ergebnisse

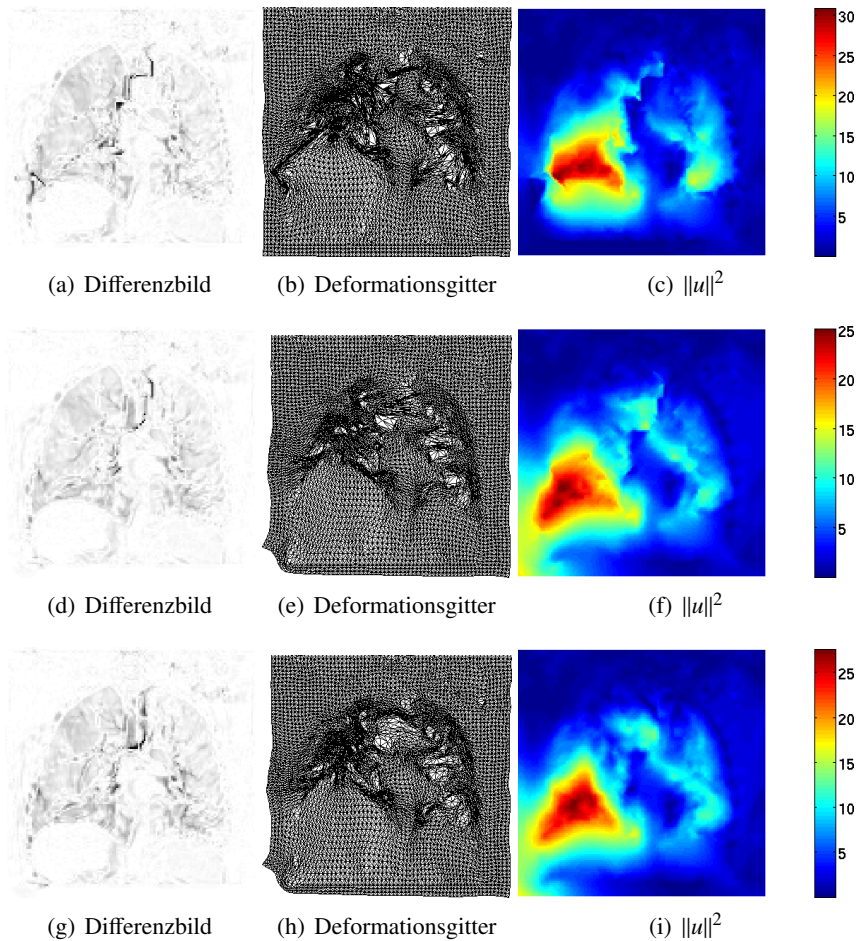


Abbildung 4.19: Registrierung der Lunge unter Volumenregularisierung; (a) - (c) diffusiv, (d) - (f) linear elastisch, (g) - (i) quadratisch elastisch, jeweils unter Volumenregularisierung.

schen Ansatz jedoch eine gewisse Asymmetrie und Drehung auf. Das Spektrum des linear elastischen Regularisierers gepaart mit dem Volumenterm liefert das am ehesten zu erwartende Deformationsspektrum. Da die Registrierung unter dem quadratisch elastischen Regularisierer ein solch starkes Faltungsgitter erzeugt hat, wird ein zweiter Versuch unternommen, bei dem das α_m zu Gunsten der Glattheit des Gitters erhöht wird. Dadurch sollen Faltungen vermindert werden. Wie aus Abbildung 4.18 (g)-(i) entnommen werden kann, geht diese Erhöhung jedoch drastisch auf Kosten der Ähnlichkeit zwischen den Bildern. Das Templatebild bleibt nahezu unverändert und der SSD-Wert kann nur auf 74% gesenkt werden. Die Registrierung kann also in diesem Fall nur eine sehr geringe Ähnlichkeit zwischen den Bildern herstellen.

Abschließend werden nun für den zweidimensionalen Fall die Ergebnisse für die Registrierung der Lungenbilder erläutert. Wie auch schon bei den bisherigen Registrierungsbeispielen wird wieder der Multi-Level-Ansatz verwendet. Die Ergebnisse zu dieser Registrierung sind in Abbildung 4.19 und Tabelle 4.5 dargestellt. Allein anhand der Abbildungen lässt sich kaum ein Unterschied zwischen den Regularisierern

Regularisierer	α_m	α_{Vol}	$\alpha_m S^m + \text{SSD-Wert}$	$\alpha_{\text{Vol}} V$
diffusiv	10^{-4}	0	1.54	12.01%
	10^{-4}	10^{-3}	5.85	14.97%
linear elastisch	10^{-4}	0	1.43	12.08%
	10^{-3}	10^{-3}	5.51	16.45%
quadratisch elastisch	10^{-4}	0	1.81	14.64%
	10^{-4}	10^{-3}	5.02	16.38%

Tabelle 4.5: Ergebnisse der Lungenregistrierung mit und ohne Volumenregularisierung

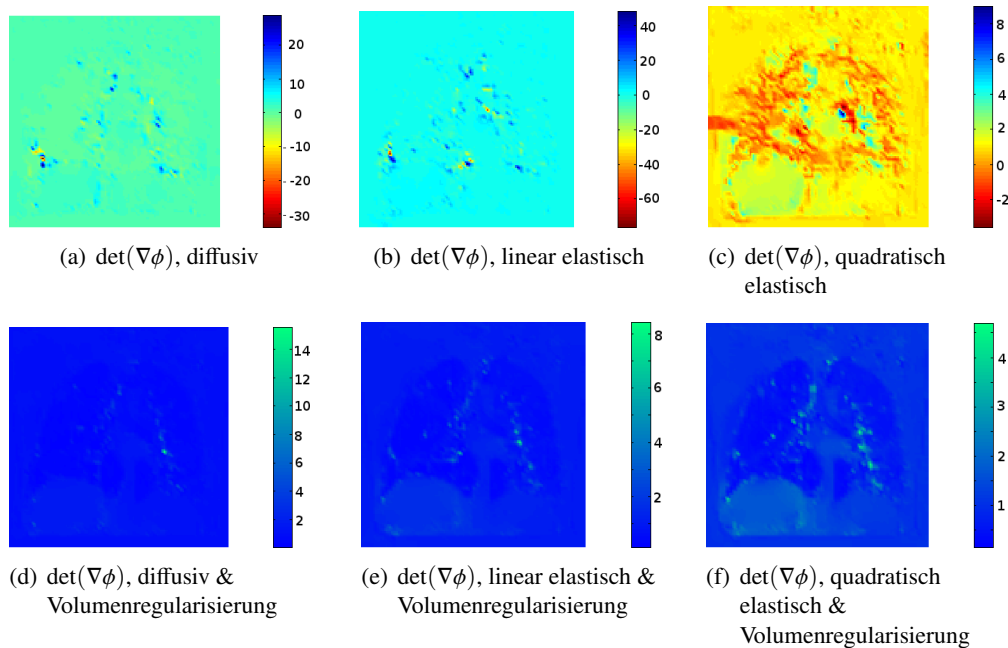


Abbildung 4.20: Determinanten der deformierten Gitterzellen bei der Registrierung mit und ohne Volumenregularisierung. Dargestellt ist für jeden Bildpunkt die zur jeweiligen Gitterzelle gehörende Determinante der Deformationsänderung.

feststellen. Dies wird auch an den ähnlichen SSD-Werten deutlich. Neben dem SSD-Wert kann man Tabelle 4.5 noch einen anderen Aspekt entnehmen: Zusätzlich ist hier der Wert des Gesamtregularisierers dargestellt. Auch wenn sich die Werte jeweils ohne und mit Volumenregularisierung nur minimal unterscheiden, weist der quadratisch elastische Regularisierer neben seinem zwar größten SSD-Wert unter Volumenregularisierung dennoch den kleinsten Regularisierungswert – und damit die wenigsten unerwünschten Deformationseigenschaften – auf. Um nun einen erweiterten Eindruck der Volumenänderungen während der Deformation zu erhalten, werden die Determinanten der Deformation betrachtet. Die Determinanten der aus der Registrierung resultierenden optimalen Deformation sind für dieses Beispiel in Abbildung 4.20 dargestellt. In den Bildern ohne Volumenregularisierung können deutlich die „Faltungsinselformen“ (d.h. $\det(\nabla\phi) < 0$) der Deformation ausgemacht werden, die in der Registrierung mit Volumenregularisierung vollständig unterbunden werden. Der quadratisch

4 Experimente und Ergebnisse

Regularisierer	α_m	α_{Vol}	α_{Cof}	$\alpha_m S^m + \alpha_{Vol} S^{Vol} + \alpha_{Cof} S^{Cof}$	SSD-Wert	Anteil negativer Determinanten
diffusiv	10^{-4}	0	0	6.51	1.26%	5.09%
	10^{-4}	10^{-2}	0	40.01	9.24%	
	10^{-4}	10^{-2}	10^{-4}	36.64	9.24%	
linear elastisch	10^{-3}	0	0	0.30	0.49%	49.68%
	10^{-1}	10^{-2}	0	45.80	2.73%	
	10^{-1}	10^{-2}	10^{-4}	39.44	5.28%	
quadratisch elastisch	10^{-4}	0	0	11.21	1.76%	36.95%
	10^{-4}	10^{-2}	0	52.99	6.64%	
	10^{-4}	10^{-2}	10^{-4}	57.85	5.80%	

Tabelle 4.6: Ergebnisse der Registrierung einer Kugel auf eine Schale.

elastische Regularisierer liefert hier mit und ohne Volumenregularisierung jeweils die kleinsten Determinantenwerte.

Ergebnisse der dreidimensionalen Testbilder

Im Dreidimensionalen wird auf die bisherige Art der Deformationsgitterbetrachtung und -darstellung verzichtet. Um dennoch eine möglichst glatte Deformation zu erhalten, wird der Parameter α_m so groß wie möglich gewählt. Auch hier werden wieder die Deformationsdeterminanten analysiert. Auf diese Weise können Orte großer Faltungen detektiert werden. Zusätzlich wird, wie im Zweidimensionalen auch, die Norm der Verrückung betrachtet. Da eine Auswertung für jeden Punkt im Dreidimensionalen recht unübersichtlich ist, werden diese jeweils über einen *Maximum Intensity Plot* dargestellt. In diesem werden auf den Seitenflächen eines Quaders, der dem Bildgebiet Ω entspricht, jeweils die Maxima in die jeweilige Raumrichtung projiziert. Auch für die Darstellung des 3D-Differenzbildes des Lungenbeispiels wird diese Darstellungsweise genutzt. Bei der Registrierung der Kugel auf die Schale wird statt des Differenzbildes ein Oberflächenplot des Referenz- und des deformierten Templatebildes erstellt. Jede Registrierung wird nach dem schon bekannten Vorgehen durchgeführt: Zuerst wird über ein passendes α_m ein möglichst gutes Ergebnis in Bezug auf den SSD-Wert erzielt, anschließend über die Zuschaltung von α_{Vol} und α_{Cof} Faltungen und Flächenkollabierungen verhindert.

Die Ergebnisse der Registrierung der Kugel auf die Schale sind in Tabelle 4.6 aufgeführt. Ohne Hinzuschalten des Volumen- und Flächenregularisierers kann mit allen drei Hauptregularisierern die SSD-Differenz auf unter 2% gesenkt werden. Betrachtet man allerdings das Ergebnis des diffusiven Regularisierers und des quadratisch elastischen, die mit dem gleichen α_m registriert worden sind, stellt man fest, dass obwohl der SSD-Wert in der gleichen Größenordnung vertreten ist, der diffusive Regularisierer weitaus weniger Faltungen aufweist. Allgemein ist gerade bei den elastischen Regularisierern der große Anteil an Faltungen ersichtlich. Um dies zu verhindern, werden zur Kontrolle die Terme für Volumen und Fläche hinzugeschaltet.

Damit ist es (nun faltungsfei) möglich, die Distanz mit allen Regularisierern auf unter 10% zu senken. Für eine grafische Anschauung sind die Ergebnisse zu dieser Registrierung in den Abbildungen 4.21 und 4.22 visualisiert. Die Darstellung umfasst die Ergebnisse lediglich unter Registrierung mit einem der Hauptregularisierer und jene unter Zuschaltung von sowohl Volumen- als auch Flächenterm. In der ersten Spalte der Abbildungen findet sich jeweils ein Übereinstimmungsplot, in dem das Referenz- und Templatebild übereinander geplottet werden. In der zweiten Spalte findet sich das schon aus dem 2D bekannte Deformationsspektrum und in der dritten die Darstellung der Determinante, beide über einen Maximum Intensity Plot repräsentiert. Lediglich anhand der Übereinstimmungsbilder lassen sich keine großartigen Unterschiede zwischen den Hauptregularisierern feststellen. Auch das Hinzuschalten des Volumen- und Flächenterms scheint das Gesamtbild kaum zu verändern. Betrachtet man allerdings die Deformationsspektren, werden die Unterschiede deutlicher: Die elastischen Ansätze weisen globalere Deformationen auf, während der diffusive Ansatz stärker lokal wirkt. Die Darstellungen der Determinanten in jedem Punkt wirken bei hinzugeschaltetem Volumen- und Flächenterm insgesamt homogener. Auch die absoluten Werte dieser Determinanten sind sehr viel kleiner. Der größte Anteil an negativen Determinanten kann bei der Registrierung mit linear elastischer Regularisierung festgestellt werden. Auch im Vergleich der Regularisierergrößen können Unterschiede festgestellt werden: Beim Hinzuschalten der Volumen- und Flächenregularisierung steigen diese Größen stark an. Im Vergleich untereinander liefert jedoch immer der diffusive Ansatz den kleinsten Regularisierungswert, was auch auf die geringste Komplexität dieses Regularisierers zurückgeführt werden kann. Da die dargestellten Überlagerungsbilder der unterschiedlichen Regularisierer nicht sehr präzise vergleichbar sind, ist in Abbildung 4.23 für jeden Regularisierer unter Zuschaltung von Volumen- und Flächenregularisierung ein Querschnitt der zu registrierenden Objekte in jede Raumdimension dargestellt. Es gelingt dabei sowohl mit dem diffusiven als auch mit den elastischen Regularisierern die Kugel auf die Schale zu registrieren. Bei den gewählten Parametern liefert in diesem Beispiel der linear elastische Regularisierer das beste Ergebnis im Querschnittbild.

Im Folgenden werden nun die Ergebnisse der Registrierung des gesamten CT-Lungenbild-Datensatzes betrachtet. Die Abbildungen 4.24 und 4.25 sowie Tabelle 4.7 veranschaulichen diese. Auch in diesem Beispiel weist die Deformation nach diffusiver Registrierung wieder die wenigsten negativen Determinanten auf, während der Anteil bei der elastischen Registrierung relativ hoch ist; am höchsten ist dieser bei linear elastischer Registrierung. Für das Lungenbeispiel sind in den Abbildungen, wie schon angekündigt, die Maximum Intensity Plots der absoluten Differenzbilder dargestellt. Auch diese unterscheiden sich für die unterschiedlichen Regularisierer nicht merklich, während die Deformationsspektren wiederum große Unterschiede deutlich werden lassen: Die Spektren der diffusiven Registrierung erscheinen „schärfer“, was auch hier auf die lokalere Wirkungseigenschaft der diffusiven Regularisierung zurückgeführt werden kann. Auffällig ist außerdem, dass im Deformationsspektrum der elastischen Regularisierer an den Kanten des dargestellten Würfels sehr hohe Deformationswerte zu finden sind, während beim diffusiven Ansatz diese eher im Innern der Würfelflächen auftreten. Der Maximum Intensity Plot der Deformationsdeterminanten von diffusivem und linear elastischem Regularisierer sehen einander relativ ähnlich: in beiden Fällen

4 Experimente und Ergebnisse

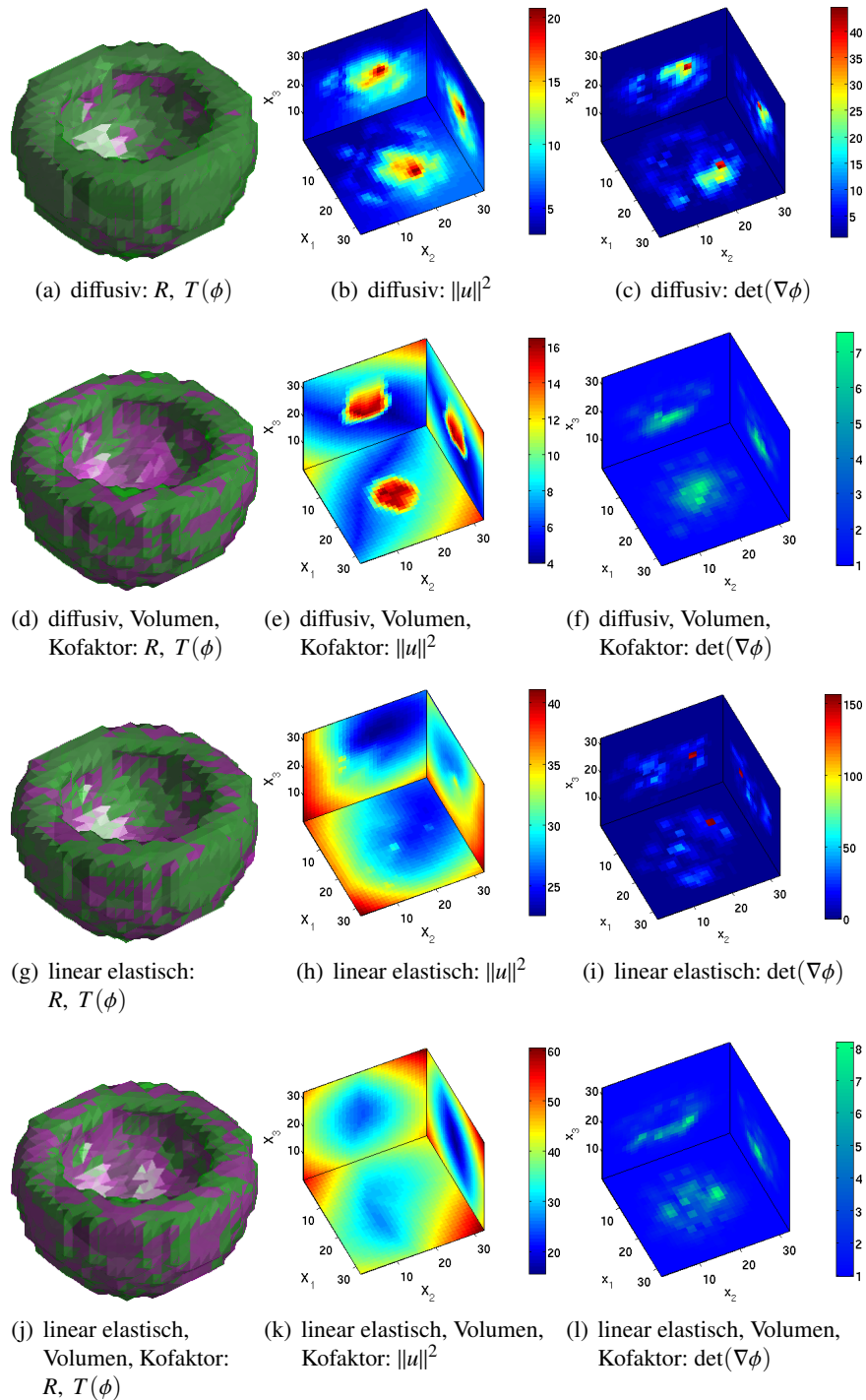


Abbildung 4.21: Ergebnisse der Registrierung einer Kugel auf eine Schale mit diffusivem und linear elastischem Ansatz. Erste Spalte: Referenz- (grün) und deformiertes Templatebild (magenta), zweite Spalte: Maximum Intensity Plot des Deformationsspektrums, dritte Spalte: Maximum Intensity Plot der Deformationsdeterminante.

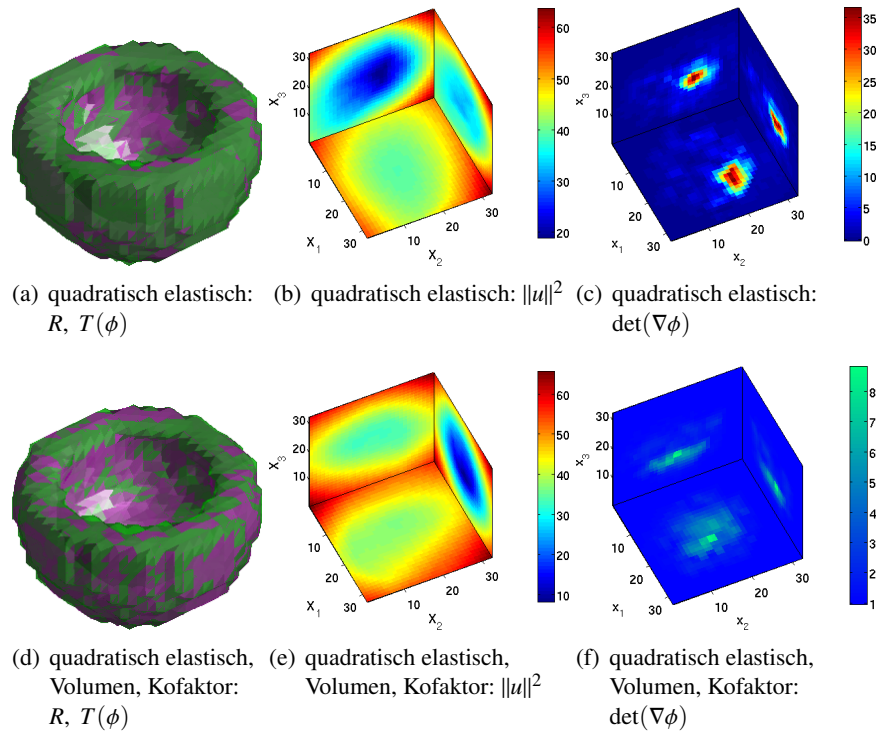


Abbildung 4.22: Ergebnisse der Registrierung einer Kugel auf eine Schale mit quadratisch elastischem Ansatz. Erste Spalte: Referenz- (grün) und deformiertes Templatebild (magenta), zweite Spalte: Maximum Intensity Plot des Deformationsspektrums, dritte Spalte: Maximum Intensity Plot der Deformationsdeterminante.

weisen die Plots ohne Flächenregularisierung kleinere Inseln großer Determinanten auf, die beim Zuschalten der Zusatzregularisierer stark vermindert werden. Bei der quadratisch elastischen Regularisierung treten diese großen Determinantenänderungen sehr viel großflächiger auf. In diesem Fall gelingt es beim Zuschalten der Zusatzregularisierer auch nicht, den SSD-Wert auf unter 10% abzusenken. Auch für dieses Beispiel sollen nun noch die Querschnitte des deformierten Templates – wie in Abbildung 4.26 dargestellt – betrachtet werden: Auch in diesem Beispiel schafft es die Registrierung mit allen Regularisierern, sogar die filigranen Lungenspitzen zu erreichen.

4.3 Diskussion

Die erhaltenen Ergebnisse haben gezeigt, dass größere Deformationen vom quadratisch elastischen Regularisierer am stärksten bestraft werden. Im Zuge dessen ist bei solchen ein verhältnismäßig kleines α_m notwendig, um ein ähnliches Ergebnis wie bei diffusiver und linear elastischer Regularisierung zu erhalten. Allerdings weisen die elastischen Ansätze deutlich mehr Flexibilität bezüglich der Deformationen auf als bei Regularisierung mit dem diffusiven Ansatz. Dass die untersuchten drei Hauptregularisierer bei kleinen Deformationen jedoch ein ähnliches Strafverhalten aufweisen und gerade der quadratisch elastische Regularisierer sehr komplex und rechenintensiv

4 Experimente und Ergebnisse

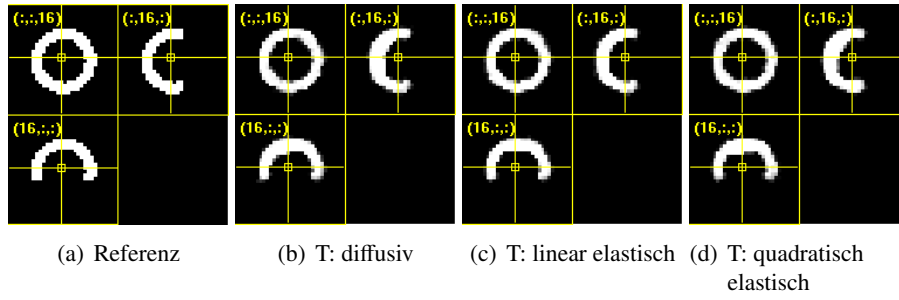


Abbildung 4.23: Darstellung der Querschnitte in jede Raumdimension des Referenzbildes und der Registrierungsergebnisse für die Hauptregularisierer bei Zuschaltung von Volumen- und Flächenregularisierung.

Regularisierer	α_m	α_{Vol}	α_{Cof}	$\alpha_m S^m + \alpha_{Vol} S^{Vol} + \alpha_{Cof} S^{Cof}$	SSD-Wert	Anteil negativer Determinanten
diffusiv	10^{-4}	0	0	1.71	5.65%	0.02%
	10^{-3}	10^{-4}	0	2.47	9.01%	
	10^{-3}	10^{-4}	10^{-8}	2.44	9.91%	
linear elastisch	10^{-2}	0	0	2.45	7.19%	34.71%
	10^{-2}	10^{-4}	0	4.92	8.03%	
	10^{-2}	10^{-4}	10^{-8}	4.92	8.03%	
quadratisch elastisch	10^{-5}	0	0	5.54	9.55%	22.18%
	10^{-5}	10^{-5}	0	5.41	13.46%	
	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	5.31	13.55%	

Tabelle 4.7: Ergebnisse der Registrierung der CT-Lungenbilder.

gegenüber den anderen beiden ist, lässt es sinnvoll erscheinen, für kleine Deformationen besser auf den diffusiven oder linear elastischen Ansatz zurückzugreifen. Denn gerade bei schwierig zu registrierenden Details, wie einer präzisen Registrierung des C-/Schalen-Innenbogens oder der Lungenflügelspitzen kann auch der linear elastische Ansatz im Experiment ein präzises Ergebnis erzielen.

Die Wahl der Regularisierer sollte jedoch nicht nur basierend auf der Komplexität der Deformation gewählt werden, sondern auch nach Art derselben. Wenn ersichtlich ist, dass eine Deformation nötig ist, die viel Rotationseigenschaft aufweist, bietet sich der quadratisch elastische Regularisierer an, der diese vollständig zulassen würde, wohingegen einer der anderen Ansätze sinnvoll wäre, wenn gerade diese unterbunden werden soll. Auch bei Betrachtung der Deformationsgitter wird noch ein weiterer Aspekt deutlich: Die elastischen Regularisierer betrachten die zu behandelnden Bilder und deren Deformationen zueinander sehr viel globaler als der diffusive Regularisierer, der eine stark lokal eingeschränkte Anpassung aufweist.

Die Verwendung von Volumen- und Flächenregularisierung muss ambivalent betrachtet werden. Zwar ist es durch diese Regularisierung möglich, jegliche Faltungen zu unterbinden, allerdings werden bei Zuschaltung dieser Regularisierer dann auch gleichzeitig jegliche Volumen- und Flächenänderungen bestraft. Gerade in Bezug auf das

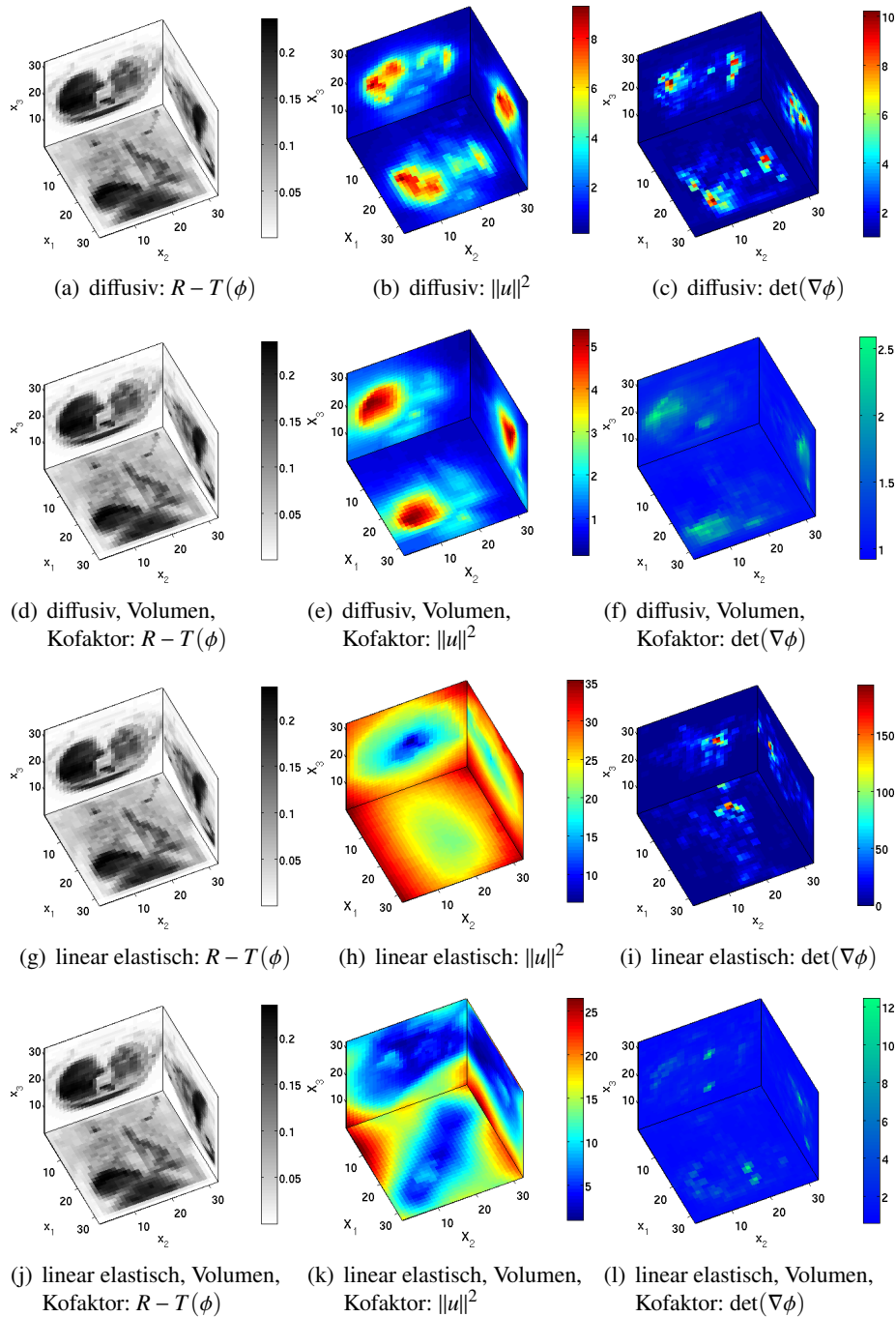


Abbildung 4.24: Ergebnisse der Registrierung der CT-Lungenbilder mit diffusivem und linear elastischem Ansatz. Erste Spalte: Maximum Intensity Plot der absoluten Differenz zwischen Referenz- und Templatebild, zweite Spalte: Maximum Intensity Plot des Deformationspektrums, dritte Spalte: Maximum Intensity Plot der Deformationsdeterminante.

4 Experimente und Ergebnisse

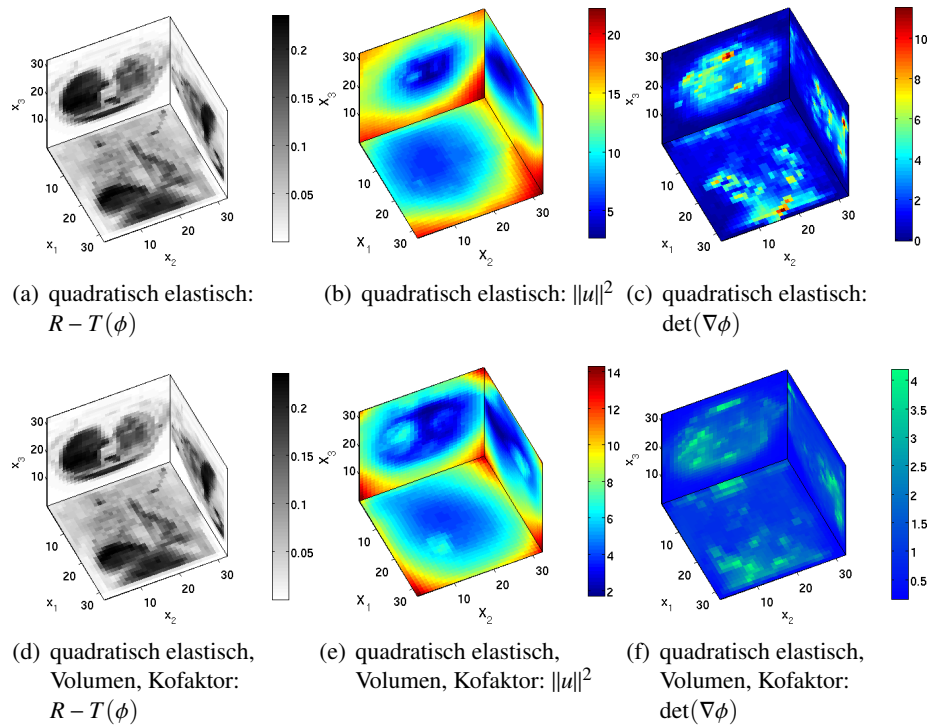


Abbildung 4.25: Ergebnisse der Registrierung der CT-Lungenbilder mit quadratisch elastischem Ansatz. Erste Spalte: Maximum Intensity Plot des absoluten Unterschiedes zwischen Referenz- und Templatebild, zweite Spalte: Maximum Intensity Plot des Deformationsspektrums, dritte Spalte: Maximum Intensity Plot der Deformationsdeterminante.

Beispiel bei der Registrierung eines Kreises oder einer Kugel auf ein C bzw. eine Schale macht aber eine solche Volumenregularisierung keinen Sinn. Dass bei der Registrierung auf ein volumenverschiedenes Objekt die Registrierung unter Volumenregularisierung dann widersprüchlich ist, ist offensichtlich. Man könnte für dieses Beispiel also besser eine Registrierung wählen, die als Nebenbedingung $\det(\nabla\phi) > 0$ fordert und auf einen Volumenregularisierer verzichtet. Somit werden zwar die Faltungen unterbunden, nicht aber eine Volumenänderung an sich bestraft. Die vorgestellte Volumen- und Flächenregularisierung sollte nur bei der Registrierung von Bildern genutzt werden, bei denen auch wirklich eine Volumen- bzw. Flächenänderung bestraft werden soll.

Hinsichtlich der Rechenzeit sind zwar keine expliziten Werte in der Auswertung gemessen worden, es kann aber zusammengefasst werden, dass die Regularisierung des diffusiven Regularisierers in der hier verwendeten Implementierung die wenigste Zeit in Anspruch nimmt. Etwa vergleichbar ist die Regularisierung mittels linear elastischem Regularisierer. Alle anderen Regularisierer erhöhen die Laufzeit stark.

Es kann zusammengefasst werden, dass durch die vorgestellte Diskretisierung eine Möglichkeit aufgezeigt worden ist, selbst die komplexen Regularisierer numerisch exakt zu bestimmen. Bei der Wahl des Regularisierers muss abhängig von der Art der Deformation und der Rechenzeit abgewogen werden, ob ein Regularisierer höherer

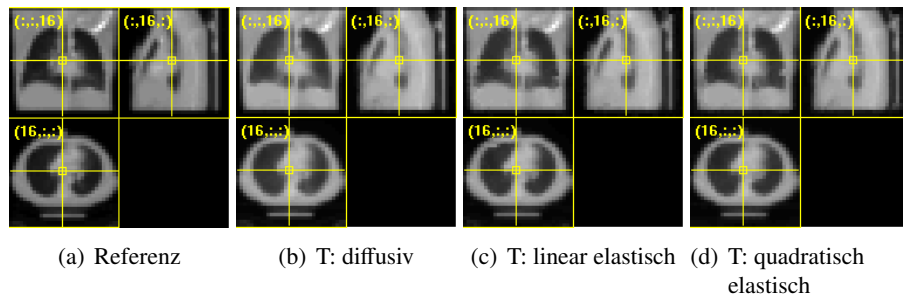


Abbildung 4.26: Darstellung der Querschnitte in jede Raumdimension des Referenzbildes und der Registrierungsergebnisse für die Hauptregularisierer bei Zuschaltung von Volumen- und Flächenregularisierung.

oder niedrigerer Komplexität gewählt werden sollte. Zwar liefert ein Ansatz höherer Komplexität oft mehr Flexibilität in der Deformationseigenschaft, allerdings erhöht er auch die Rechenzeit stark. Desweiteren sollte bei der Wahl des richtigen Regularisierers die gewünschte Deformation betrachtet werden und so z.B. bei einer resultierenden Rotation auch auf einen Regularisierer zurückgegriffen werden, der nicht die Rotation unterbindet.

5 Ausblick

Bisher ist die Diskretisierung des Bildes unter Wahl der gleichen Lamé-Konstanten (nämlich $\mu = \lambda = 1$) auf dem gesamten Bild unternommen worden. Ein modifizierter Ansatz wäre, die Lamé-Konstanten entsprechend dem am meisten vertretenen Material zu wählen bzw. nach dem Material, welches hauptsächlich betrachtet werden soll. Im untersuchten Lungenbeispiel ging es hauptsächlich um die Registrierung der Lungen, also weiches Muskelgewebe. Ein erster Ansatz wäre also, das in Abschnitt 2.3.4 vorgestellte Lamé-Konstanten-Verhältnis für Muskeln zu wählen. Des Weiteren könnte dieser Ansatz weiter präzisiert werden, indem eine Vorsegmentierung stattfindet, die Muskeln von Knochen trennt und den Diskretisierungselementen abhängig von ihrer Segmentzugehörigkeit entsprechende Lamé-Konstanten-Verhältnisse zuordnet. Dies ist in Abbildung 5.1 noch einmal veranschaulicht. Genau genommen gibt

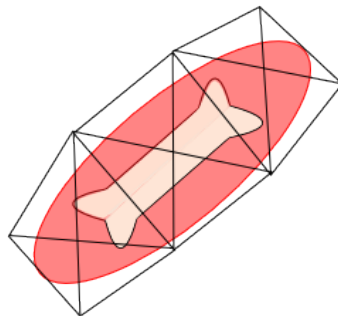


Abbildung 5.1: Grobe Darstellung eines in einen Muskel eingebetteten Knochens. Bei der vorgestellten Diskretisierung enthalten die Dreiecke sowohl Knochen als auch Muskel- und Umgebungselemente. Die Elastizitätseigenschaft der beiden Materialien ist jedoch stark verschieden. Es wird demnach eine Diskretisierung benötigt, deren Elemente nur homogene Materialien enthalten.

es jedoch beispielsweise in einem Knochen auch unterschiedliche Knochenschichten, deren Materialeigenschaften stark variieren, sodass diese jeweils noch spezifischere Lamé-Konstanten erhalten müssten. Damit einher geht jedoch auch, dass die einzelnen Diskretisierungselemente nicht mehr verschiedene Materialstrukturen des abgebildeten Objektes beinhalten dürfen, sondern innerhalb eines Elementes nur homogenes Material zu finden sein darf. Für dieses Vorgehen ist zuvor die Entwicklung einer präzisen Segmentierung notwendig.

Ein weiterer Aspekt unter Betrachtung linearer und quadratisch elastischer Regularisierung ist die Kombination aus beiden Verfahren. Viele Materialien verhalten sich abhängig von der Deformationsgröße (wie z.B. Knochen) zunächst linear elastisch, später dann plastisch, bis es schließlich zum Bruch des Materials kommt. Abhängig

5 Ausblick

von der nötigen Deformation könnte also untersucht werden, ob deformationsgrößenabhängig die Registrierung durch das Hintereinanderschalten von linear und quadratisch elastischem Regularisierer verbessert würde.

Ebenfalls denkbar ist die Untersuchung von Unterschieden der schon angesprochenen Registrierung mit Volumenregularisierung gegenüber der Registrierung mit Nebenbedingung auf $\det(\nabla\phi) > 0$, welche in der Diskussion schon kurz angesprochen worden ist. Faltungen könnten so unterbunden werden, ohne aber eine Volumenänderung in den zu registrierenden Objekten an sich zu bestrafen.

Auch der Einfluss der Diskretisierung – also der räumlichen Auflösung – der Deformation auf die Registrierung könnte weiter untersucht werden. Bei einigen Objekten dürfte es bei der Registrierung einen großen Unterschied machen, ob eine Diskretisierung hoher oder niedriger Auflösung gewählt wird. Aufgrund der Laufzeit der zu dieser Arbeit gehörenden Implementierung waren Untersuchungen mit höherer Diskretisierung besonders im 3D nicht möglich.

Insgesamt haben die durchgeführten Tests interessante Ergebnisse bezüglich der Wahl und Kombination der Regularisierer geliefert. Die erwähnten Ausblicke könnten diese Tests noch weiter untermauern und die Verfahren präzisieren.

6 Notation

Ω	Bildraum
R	Referenzbild
T	Templatebild
ϕ	Deformation
u	Verrückung: $\phi - id$
α_m	Gewichtungsparameter des Hauptregularisierers
α_{Vol}	Gewichtungsparameter Volumen-/Flächenregulierung (2D)
α_{Cof}	Gewichtungsparameter Flächenregulierung (3D)
b_i	Bildgitterschrittweite in Richtung i
h_i	Deformationsgitterschrittweite in Richtung i
\mathcal{J}	Indexmenge der Simplicies
\mathcal{K}	Indexmenge der Deformationsgitterknoten
X_p	Vektor aller Bildgitterpunkte
x_p	einzelner Bildgitterpunkt
X_t	Vektor aller Deformationsgitterpunkte
x_t	einzelner Deformationsgitterpunkt
x_{ij}	Gitterknotenpunkt ij
x_i, x_j	i - bzw. j -te Koordinate eines Punktes x
Facepunkt	Bezeichnung des Mittelpunktes einer Seitenfläche bei einer Hauptzelle des 3D-Deformationsgitters
ϕ, u	Koeffizientenvektor der Deformation / Verrückung an den Deformationsgitterpunkten; angeordnet nach dem Format von X_t
$\text{diag}(x)$	wandelt einen Vektor x in eine quadratische Hauptdiagonalmatrix um
\odot	komponentenweises Produkt
$*$	Faltung
σ	Anzahl der Deformationsgitterpunkte
η	Anzahl der Simplicies

Literaturverzeichnis

- [1] MODERSITZKI, JAN: *Numerical methods for image registration*. Oxford University Press, USA, 2004.
- [2] FISCHER, BERND und JAN MODERSITZKI: *Ill-posed medicine – an introduction to image registration*, Band 24. IOP Publishing, 2008.
- [3] FISCHER, B. und J. MODERSITZKI: *Fast diffusion registration*. Inverse problems, image analysis, and medical imaging: AMS Special Session on Interaction of Inverse Problems and Image Analysis, January 10-13, 2001, New Orleans, Louisiana, 313, 2002. S. 117.
- [4] MAES, F., A. COLLIGNON, D. VANDERMEULEN, G. MARCHAL und P. SUETENS: *Multimodality image registration by maximization of mutual information*. Medical Imaging, IEEE Transactions on, 16(2):187–198, 1997.
- [5] HABER, E. und J. MODERSITZKI: *Intensity gradient based registration and fusion of multi-modal images*. Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2006, Seiten 726–733, 2006.
- [6] BRAESS, DIETRICH: *Finite Differenzen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1992. Seiten 229-256.
- [7] HANSEN, MADSG. FOGTMANN: *The Virtual Knife*. Technical University of Denmark, 2009. Kongens Lyngby.
- [8] GIANCOLI, DOUGLAS C.: *Physik*, Band 3. Pearson Studium, 2006. Kapitel 12: Statisches Gleichgewicht; Elastizität und Bruch.
- [9] PAGEL, HORST: *Vorlesung Muskelphysiologie*. Universität zu Lübeck, Institut für Physiologie.
- [10] BOBLAN, IVO: *Modellbildung und Regelung eines fluidischen Muskelpaares*. TU Berlin, Dissertation, 2010.
- [11] PREUSSLER, T.: *Werkstoffelemente*. FH Trier, Technische Mechanik II.
- [12] FORSTER, OTTO: *Analysis 3, Differentialrechnung im R^n* , Band 4. Vieweg & Sohn, 2007.
- [13] BURGER, MARTIN, JAN MODERSITZKI und LARS RUTHOTTO: *A hyperelastic regularization energy for image registration*. submitted to SIAM SISC, 2011.
- [14] FORSTER, OTTO: *Analysis 2, Differentialrechnung im R^n* . Gewöhnliche Differentialgleichungen, Vieweg Braunschweig, 1984.
- [15] CIARLET, PHILIPPE G.: *Mathematical Elasticity*, Band 20. North Holland, 1993.

Literaturverzeichnis

- [16] LAU, DIETLINDE: *Algebra und diskrete Mathematik*, Band 1. Springer, 2004.
- [17] GHOBADI, KIMIA, NEDIALKO S. NEDIALKOV und TAMÁS TERLAKY: *On the Discretize then Optimize Approach*. Industrial and Systems Engineering.
- [18] PAPENBERG, NILS: *Ein genereller Registrierungsansatz mit Anwendung in der navigierten Leberchirurgie*. Institut für Mathematik, Universität zu Lübeck, Inauguraldissertation, 2008. S. 23 ff.
- [19] DAHMEN, W. und A. REUSKEN: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*, Band 2. Springer, 2006.
- [20] GROSSMANN, C. und H.G. ROOS: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Vieweg+ Teubner, 2006.
- [21] LEE, J.M.: *Introduction to smooth manifolds*, Band 218. Springer Verlag, 2003.
- [22] NOCEDAL, JORGE und STEPHEN J. WRIGHT: *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer, 2nd Auflage, 2006.
- [23] GILL, PHILIP E., WALTER MURRAY und MARGRET H. WRIGHT: *Practical Optimization*. Academic Press, 1992.
- [24] DE BOOR, CARL: *A practical guide to splines*. Springer Verlag, 2001.