



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
IMAGE COMPUTING

Masterarbeit

Registrierung von Bildsequenzen mit räumlich-zeitlicher Regularisierung

Lars König, B.Sc.

Arbeit betreut von
Dr. Nils Papenberg
Fraunhofer MEVIS Project Group Image Registration

Thema ausgegeben von
Prof. Dr. Bernd Fischer
Institute of Mathematics and Image Computing

Abgabe: 16.11.2011

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe. Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

Lübeck, den 16. November 2011

Abstract

Different methods for registration of medical image sequences using L_1 - and L_2 -norm based spatio-temporal regularization are presented. These methods are based on a two-image registration framework which is described and then extended to image sequences. The temporal regularization uses mathematical models with a fixed-location Euler framework as well as a Lagrange framework. The Lagrange framework allows tracking of single points over time without penalizing uniform motion. Additionally, iterative procedures for numerical optimization of the discrete sequence registration problem are suggested that exploit information from future and past timesteps. The advantages of the presented methods are verified by examples and evaluated on clinical data. Using spatio-temporal regularization, the results show considerable improvement over a pure spatial regularization approach.

Zusammenfassung

In der Arbeit werden verschiedene Verfahren zur Registrierung medizinischer Bildsequenzen mit L_1 - und L_2 -Norm basierter räumlich-zeitlicher Regularisierung vorgestellt. Als Grundlage dieser Verfahren wird zunächst ein Registrierungsmodell für zwei Bilder beschrieben und auf Bildsequenzen erweitert. Die zeitliche Regularisierung wird mathematisch sowohl in einer ortsfesten Euler-Sichtweise zur Betrachtung der Veränderung von Deformationen als auch in einer Lagrange-Sichtweise modelliert. Die Lagrange-Sichtweise ermöglicht es, einzelne Punkte über die Zeit zu verfolgen und eine gleichförmige Bewegung wird im Gegensatz zur Euler-Sichtweise nicht bestraft. Zusätzlich werden iterative Methoden zur numerischen Optimierung des diskreten Sequenz-Registrierungsproblems aufgestellt, die Informationen von vorherigen und nachfolgenden Zeitschritten nutzen. Der Nutzen der gezeigten Ansätze wird an Beispielen belegt und mit klinischen Daten evaluiert. Es zeigen sich durch die Verwendung räumlich-zeitlicher Regularisierung deutliche Vorteile gegenüber rein räumlicher Regularisierung.

Ich danke den Mitarbeitern des Institute of Mathematics and Image Computing und der Fraunhofer MEVIS Projektgruppe Bildregistrierung – allen voran Prof. Bernd Fischer und Dr. Nils Papenberg – für die freundliche Aufnahme am Institut und das angenehme Arbeitsklima. Weiterer Dank geht an Helen, Johannes und Melanie für die gute Zeit während und vor der Entstehung dieser Arbeit sowie meine Eltern, die immer an mich geglaubt und mich stets in jeder Hinsicht unterstützt haben. Spezieller Dank schließlich an Katrin – auch für die Motivation in den schwierigen Phasen der Entstehung dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Notation | xi |
| 1 Einleitung | 1 |
| 2 Bildregistrierung | 3 |
| 2.1 Registrierungsansatz | 3 |
| 2.2 Zielfunktion | 4 |
| 2.2.1 Abstandsmaß | 5 |
| 2.2.2 Regularisierer | 5 |
| 2.2.3 Diffusiver Regularisierer | 7 |
| 2.2.4 Totalvariation | 7 |
| 2.2.5 Beispiel | 8 |
| 2.3 Diskretisierung | 9 |
| 2.3.1 Gitter | 10 |
| 2.3.2 Abstandsmaß | 10 |
| 2.3.3 Regularisierer | 11 |
| 2.3.4 Matrixschreibweise | 14 |
| 2.4 Optimierung | 16 |
| 2.4.1 Gauß-Newton-Verfahren | 16 |
| 2.4.2 Hessematrix des Regularisierers | 17 |
| 3 Registrierung von Bildsequenzen | 19 |
| 3.1 Erweiterung des Registrierungsproblems | 19 |
| 3.1.1 Gesamtsystem | 20 |
| 3.2 Zeitlicher Regularisierer | 21 |
| 3.2.1 Gesamtsystem | 21 |
| 3.2.2 Zeitliche Glattheit | 22 |
| 3.2.3 Diskretisierung | 23 |
| 3.3 Iterationsverfahren | 24 |
| 3.3.1 Asymmetrischer Ansatz | 25 |
| 3.3.2 Symmetrischer Ansatz | 29 |
| 3.3.3 Reihenfolge der Iterationen | 31 |
| 3.4 Interpolierter Lagrange-Ansatz | 32 |
| 3.4.1 Iterativ | 33 |
| 3.4.2 Gesamtsystem | 37 |
| 3.5 Direkter Lagrange-Ansatz | 41 |
| 3.6 Fazit | 46 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Ergebnisse und Evaluation | 49 |
| 4.1 | Iterationsverfahren | 49 |
| 4.2 | Lagrange-Ansatz | 52 |
| 4.2.1 | Interpolierter Lagrange-Ansatz | 52 |
| 4.2.2 | Direkter Lagrange-Ansatz | 54 |
| 4.3 | Zeitliche Regularisierung mit Totalvariation | 56 |
| 4.4 | Anwendung auf Lungendaten | 62 |
| 4.5 | Fazit | 66 |
| 5 | Ausblick | 71 |
| | Literaturverzeichnis | 73 |

Notation

Zur Referenz ist an dieser Stelle eine Übersicht der verwendeten Notation aufgelistet. Dabei handelt es sich um häufig verwendete Kurzschreibweisen und Vereinfachungen, die im Text zur Anwendung kommen. Eine genauere Erläuterung der Abkürzungen ist im Text jeweils bei deren erster Verwendung angegeben.

| | |
|---|--|
| d | Dimension, $d \in \mathbb{N}$ |
| $x = (x_1, \dots, x_d)$ | Beliebiger Punkt mit d -dimensionalen Koordinaten, $x \in \mathbb{R}^d$ |
| m_i, h_i | Zellenanzahl und -größe in Richtung x_i , $m_i \in \mathbb{N}$, $h_i \in \mathbb{R}_+$ |
| $\tilde{h} = \prod_{i=1}^d h_i$, $\tilde{m} = \prod_{i=1}^d m_i$ | Produkte der Zellenanzahl und -größe |
| $u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_d(x))^T$ | Vektorfeld $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit Komponentenfunktionen $u_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, d$ |
| ∇u_i | Gradient einer Komponentenfunktion des Vektorfeldes, $\nabla u_i \in \mathbb{R}^{d \times 1}$ |
| Ju | Jacobimatrix des Vektorfeldes u , $Ju \in \mathbb{R}^{d \times d}$ |
| $X = (x_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, \tilde{m} \\ j=1, \dots, d}}$ | Regelmäßiges Gitter, $X \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times d}$ |
| $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,d})$ | Punkt i auf dem Gitter, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^d$ |
| $\mathbf{u} = u(X) = (u_1(X), \dots, u_d(X))^T$ | Diskretisierung des Vektorfeldes u an allen Punkten des Gitters X , $u(X) \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times 1}$ |
| $I(\mathbf{u}, X)$ | Interpolante von \mathbf{u} , ausgewertet an allen Punkten von X |
| $\nabla^2 \mathcal{S}(u)$ | Hessematrix von $\mathcal{S} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla^2 \mathcal{S}(u) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ |
| t | Zeitpunkt, $t \in \mathbb{N}$ |

| | |
|---|--|
| $u^{(t)} = u(x_1, x_2, \dots, x_d, t)$ | Vektorfeld u zum Zeitpunkt t |
| $\mathbf{u}^{(t)} = u^{(t)}(X) = \left(u_1^{(t)}(X), \dots, u_d^{(t)}(X)\right)^\top$ | Diskretisierung von u zum Zeitpunkt t auf dem Gitter X , $\mathbf{u}^{(t)} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}d \times 1}$ |
| $\mathbf{1}_m = (1, \dots, 1)^\top$ | Vektor aus Einsen der Länge m , $\mathbf{1}_m \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ |
| E_k | Einheitsmatrix mit Einsen auf der Hauptdiagonale, $E_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ |
| $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)^\top$ | Vektor mit einzelnen Elementen $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ |
| $\text{diag}(\mathbf{v})$ | Diagonalmatrix-Operator, liefert eine Matrix mit den Elementen von \mathbf{v} auf der Hauptdiagonale |
| $\mathbf{u}_t = \left(u_i^{(1)}(X), \dots, u_i^{(T)}(X)\right)_{i=1, \dots, d}^\top$ | Diskretisierung des Vektorfeldes u zu den Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ auf dem Gitter X , $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^{\tilde{m}dT \times 1}$ |
| $\mathbf{u}_{(k)}$ | \mathbf{u}_t nach dem Iterationsschritt k des Optimierungsverfahrens, $\mathbf{u}_{(k)} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}dT \times 1}$ |
| $\mathbf{G}_{d\tilde{m}} = \mathbf{1}_d^\top \otimes E_{\tilde{m}}$ | Hilfsmatrix zur Summierung der Ableitungen der einzelnen Komponentenfunktionen, $\mathbf{G}_{d\tilde{m}} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times d\tilde{m}}$ |

1 Einleitung

Bildregistrierung gehört zu den zentralen Problemen heutiger medizinischer Bildverarbeitung. Mit modernen Aufnahmegegeräten wie Magnetresonanz- oder Computertomographen können verschiedene Darstellungen des menschlichen Körpers angefertigt werden. Hierbei kann sich zwischen zwei Bildern der Zeitpunkt, die Lage des Patienten im Gerät, die anatomische Beschaffenheit der betrachteten Objekte und nicht zuletzt das Aufnahmeverfahren verändern. Die Aufgabe der Bildregistrierung ist es, gemeinsame Informationen verschiedener Aufnahmen in einem Bild zu vereinen und Veränderungen darzustellen, die zwischen diesen Bildern stattgefunden haben. Sie stellt damit eine Erleichterung und ein unverzichtbares Hilfsmittel in der Diagnose unterschiedlicher medizinischer Fragestellungen, wie z.B. Präoperationsplanung und Intraoperationskontrolle, onkologischer Diagnostik oder Stoffwechseluntersuchungen dar.

Verschiedene Methoden der Bildregistrierung sind in den letzten Jahren beschrieben worden, eine Übersicht findet sich in [24]. Diese Verfahren beschäftigen sich größtenteils mit der Registrierung von zwei Bildern. Durch immer leistungsfähigere Geräte zur medizinischen Bildgebung ist es mittlerweile jedoch möglich, nicht nur einzelne Bilder von Patienten aufzunehmen, sondern Sequenzen von Bildern zu erstellen. Dies bietet die Möglichkeit, kurzfristige Veränderungen im Körper wie Atmung oder Herzschlag zu visualisieren, und erschließt so neue Möglichkeiten der Diagnostik und Therapie. Bei den daraus entstehenden Daten handelt es sich meist um dreidimensionale Bilder mit der Zeit als zusätzliche Dimension, also 4D-Aufnahmen. Ein Beispiel einer solchen 4D-CT-Aufnahme der Lunge ist für verschiedene Zeitpunkte als frontales Schnittbild in Abbildung 1.1 gezeigt.

In dieser Arbeit wird eine Erweiterung des Registrierungsproblems auf Bildsequenzen vorgestellt, bei der nicht nur eine Aneinanderreihung von Registrierungen zweier Bilder behandelt, sondern der zeitliche Verlauf der Bewegung in das Modell mit einbezogen wird. Durch diese Betrachtung wird es möglich, zusätzliches Wissen über Eigenschaften der Bewegung zu verwenden. Dies wird auch als *zeitliche Regularisierung* bezeichnet. Zeitliche Regularisierung ist vor allem bei der Ermittlung der Bewegung hilfreich, die im Verlauf der Sequenz stattgefunden hat. Diese Information lässt sich zur Korrektur

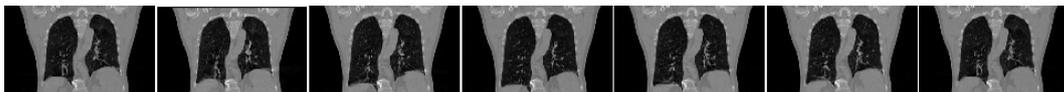


Abbildung 1.1: Frontales Schnittbild einer Atembewegung, aufgenommen zu sieben verschiedenen Zeitpunkten, Abbildung der Einzelbilder in zeitlicher Reihenfolge von links nach rechts

von Bewegungen bei Strahlungstherapien oder zu Ventilations- und Perfusionsmessungen verwenden.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 wird zunächst ein generelles Registrierungsmodell zur Behandlung von Problemen mit zwei Bildern beschrieben. Eine Erweiterung dieses Modells auf Bildsequenzen findet anschließend in Kapitel 3 statt. Zusätzlich werden dort verschiedene kontinuierliche Ansätze zur Modellierung des Registrierungsproblems mit zeitlicher Regularisierung aufgestellt und in diskretisierter Form im Registrierungsverfahren betrachtet. Iterative Verfahren zur Lösung des Problems werden vorgestellt. Das darauf folgende Kapitel 4 beinhaltet Testergebnisse von Beispielen zur Überprüfung der Eigenschaften der vorgestellten Verfahren sowie die Anwendung auf klinische Daten. Dabei wird auch die gezeigte Bildsequenz der Lungenbewegung aus Abbildung 1.1 wieder aufgegriffen.

2 Bildregistrierung

Um eine Behandlung von Bildsequenzen mittels Bildregistrierung zu ermöglichen, muss zunächst die Registrierung von zwei Bildern, das kleinste Einzelproblem dieser Fragestellung, modelliert werden. In diesem Kapitel werden daher die einzelnen Komponenten des verwendeten Registrierungsverfahrens kurz beschrieben. Die Arbeit baut dabei auf das in der Bachelorarbeit [13] beschriebene Registrierungsverfahren auf, weshalb die Erläuterung der Grundlagen an dieser Stelle kurz gefasst wird. Weitere Einführungen zum verwendeten Registrierungsansatz finden sich in [15, 20].

2.1 Registrierungsansatz

Das Ziel der Bildregistrierung ist es, eine *sinnvolle* Transformation φ zu finden, mit der sich ein Templatebild \mathcal{T} *möglichst ähnlich* auf ein Referenzbild \mathcal{R} abbilden lässt.

Diese generelle Formulierung des Registrierungsproblems muss durch Modellierung der kursiv gedruckten Bausteine in ein mathematisches Modell zur Lösung des Problems überführt werden.

Dafür gibt es je nach Aufnahmemodalität und Fragestellung verschiedene Zielsetzungen. Bei der sogenannten Bildfusion von Bildern verschiedener Bildgebungsverfahren ist häufig das Ergebnis interessant, d.h. das transformierte Templatebild \mathcal{T} in Überlagerung mit dem Referenzbild. Dadurch können die in den Bildern enthaltenen Informationen besser miteinander in Bezug gesetzt werden. Eine andere Fragestellung zielt hauptsächlich auf die Transformation selbst ab. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, Bewegungen zu beschreiben, die zwischen Aufnahmen stattgefunden haben. Dies findet, wie schon in der Einleitung erwähnt, z.B. bei Ventilations- und Perfusionsmessungen von Lunge und Herz Verwendung, bei denen Luft und Blutbewegungen analysiert werden, aber auch zur Bewegungskorrektur bei Strahlungstherapien.

In dieser Arbeit wird vor allem letztere Fragestellung im Fokus stehen, da bei Bildsequenzen meist eine Bewegung bezüglich der Zeit interessant ist.

Das Referenz- und Templatebild werden als kontinuierliche Funktionen

$$\mathcal{R} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathcal{T} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

mit Trägern auf rechteckigen, zusammenhängenden Gebieten $\Omega_{\mathcal{R}} \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega_{\mathcal{T}} \subset \mathbb{R}^d$ betrachtet, wobei $d \in \mathbb{N}$ die Bilddimension bezeichnet. Die Funktionen bilden also von einer Koordinate im Raum auf einen reellen Wert ab, der als Grauwert interpretiert wird.

In der Praxis sind jedoch kontinuierliche Repräsentationen der Bilder nicht gegeben. Aufgenommene Daten aus Bildgebungsverfahren bestehen aus einer endlichen Anzahl n an äquidistanten Stellen abgetasteten Bildpunkten $\mathbf{R}_i \in \Omega_{\mathcal{R}}$, $\mathbf{T}_i \in \Omega_{\mathcal{T}}$, $i = 1, \dots, n$. Daher wird eine kontinuierliche Formulierung durch d -dimensionale Interpolation auf den Datenpunkten erreicht. Diese kontinuierliche Modellierung wird später zur Transformation von Bildern benötigt, bei der diese an beliebigen Stellen ausgewertet werden müssen.

Sei $I(\mathbf{D}, x)$ die Interpolationsfunktion der Datenpunkte \mathbf{D} , ausgewertet an der Stelle $x \in \mathbb{R}^d$, dann gilt

$$\mathcal{R}(x) := I(\mathbf{R}, x), \quad \mathcal{T}(x) := I(\mathbf{T}, x).$$

Als Interpolationsverfahren wird kubische B-Spline-Interpolation verwendet, die durch ihre Differenzierbarkeit und ihren lokalen Träger zwei wünschenswerte Eigenschaften für die in dieser Arbeit verwendete ableitungsbasierte Optimierung von Bilddaten erfüllt. Genauere Details und Hintergründe der Spline-Interpolation finden sich in [7, 18].

2.2 Zielfunktion

Die gesuchte Transformation wird durch die Minimierung einer Zielfunktion bestimmt, die so gewählt wird, dass zulässige Lösungen dieses Optimierungsproblems die Forderungen des Registrierungsproblems aus Abschnitt 2.1 erfüllen. Jede dieser Forderungen wird durch eine Komponente der Zielfunktion modelliert.

Die Transformation $\varphi : \Omega_{\mathcal{R}} \rightarrow \mathbb{R}^d$ bildet dabei Koordinaten des Trägers von \mathcal{R} ab, so dass das Templatebild mit $T(\varphi(x))$, $x \in \Omega_{\mathcal{R}}$ auf den transformierten Koordinaten ausgewertet wird. Dadurch lassen sich Referenzbild $\mathcal{R}(x)$, $x \in \Omega_{\mathcal{R}}$ und transformiertes Templatebild auf demselben Gebiet vergleichen, was auch als Euler-Ansatz bezeichnet wird [14].

Das Zielfunktional $\mathcal{J} : \varphi \rightarrow \mathbb{R}$ wird dann mit einer Deformation $u(x) = \varphi(x) - x$, die später genauer beschrieben wird, als Minimierungsproblem

$$\mathcal{J}(\varphi) = \mathcal{D}(\mathcal{R}, \mathcal{T}(\varphi)) + \alpha \mathcal{S}(u) \rightarrow \min \quad (2.1)$$

formuliert. Die Terme \mathcal{D} und \mathcal{S} bezeichnen das sogenannte *Abstandsmaß* und den *Regularisierer*. Das Abstandsmaß misst die Ähnlichkeit der Bilder. Der Regularisierer stellt Forderungen wie „Glattheit“ [8] oder bestimmtes physikalisch motiviertes Verhalten [14] an die Transformation und schränkt so den Lösungsraum auf – im Kontext des Regularisierers – sinnvolle Transformationen ein. Diese Einschränkung sorgt dafür, dass das Problem im Sinne von Hadamard [12] korrekt gestellt ist. Der Parameter $\alpha \in \mathbb{R}_+$ dient der Gewichtung zwischen den beiden Termen und damit der Abwägung zwischen sinnvoller Transformation und Ähnlichkeit der Bilder. Im Folgenden werden die einzelnen Komponenten der Zielfunktion näher beschrieben.

2.2.1 Abstandsmaß

Bildsequenzen bestehen aus Aufnahmen, die in kurzer zeitlicher Abfolge mit demselben Aufnahmeverfahren gemacht wurden, daher handelt es sich um Bilder gleicher Modalitäten. Dies erlaubt einen punktweisen Vergleich der Bild-Grauwerte, weshalb als typische Wahl zur Messung der Ähnlichkeit zweier Bilder das „Sum of Squared Differences“ Abstandsmaß SSD [14] verwendet wird, das als

$$\mathcal{D}(\varphi) = \mathcal{D}(\mathcal{R}, \mathcal{T}(\varphi)) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} (\mathcal{R}(x) - \mathcal{T}(\varphi(x)))^2 dx \quad (2.2)$$

formuliert werden kann. Es misst die quadrierten Differenzen zwischen Referenz- und deformiertem Templatebild.

2.2.2 Regularisierer

Der Regularisierer hängt von einer *Deformation* oder *Verrückung* $u(x) = \varphi(x) - x$ ab. Die Deformation wird in dieser Arbeit als ein Vektorfeld $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ modelliert, wobei

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_d(x))^{\top}$$

mit $u_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ die einzelnen Komponentenfunktionen des Vektorfeldes bezeichnet werden. Das erlaubt es, für jeden Punkt x eine eigene Transformation anzugeben, die unabhängig von globalen Transformationsparametern ist. Dieses Modell wird daher auch als nicht-parametrische Transformation bezeichnet.

Die hier verwendeten Regularisierer basieren auf den Gradienten

$$\nabla u_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_d} \right)^{\top} \in \mathbb{R}^{d \times 1}, \quad i = 1, \dots, d \quad (2.3)$$

der einzelnen Komponentenfunktionen der Verrückung, mit denen die Jacobimatrix von u durch

$$\mathbf{J}u = \begin{pmatrix} \nabla u_1^{\top} \\ \vdots \\ \nabla u_d^{\top} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

beschrieben werden kann.

Damit lassen sich die Regularisierer dieser Arbeit in einem allgemeinen Schema zusammenfassen, welches sich mit einer noch zu wählenden Funktion $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$\mathcal{S}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\sum_{i=1}^d \|\nabla u_i(x)\|_2^2 \right) dx \quad (2.4)$$

formulieren lässt. Dieser Term misst die „Stärke“ der Ableitungen ∇u_i . Ist die Änderung in alle Richtungen klein, so wird die Deformation als *glatt* bezeichnet und auch $\mathcal{S}(u)$

nimmt dann einen kleinen Wert an, wodurch die zulässigen Lösungen zur Minimierung der Zielfunktion auf solche glatten Deformationen eingeschränkt werden.

Die Funktion ψ hat als Argument die Gradienten der einzelnen Komponentenfunktionen ∇u_i , zwischen diesen findet damit eine Kopplung statt. Durch diese Betrachtungsweise wird der Regularisierer rotationsinvariant [23, 5], d.h. Deformationsfelder und damit die abgebildeten Objekte werden unabhängig von ihrer Orientierung im Raum behandelt. Im Hinblick auf die Anwendung auf medizinische Bilddaten ist dies sinnvoll, da so unabhängig von der Lage des Patienten vergleichbare Resultate erzielt werden können.

Im Zweidimensionalen lässt sich dies leicht zeigen, es gilt mit einer Rotationsmatrix

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und einem Vektorfeld

$$u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Ju = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

für das rotierte Vektorfeld $R(\alpha)u$ die Formulierung

$$R(\alpha)u = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)u_1 - \sin(\alpha)u_2 \\ \sin(\alpha)u_1 + \cos(\alpha)u_2 \end{pmatrix}.$$

Die Jacobimatrix dieses rotierten Vektorfeldes ist dann durch

$$J(R(\alpha)u) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \sin(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \cos(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \sin(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \sin(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cos(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \sin(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cos(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit gilt die Gleichheit

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(Ru) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\left(\cos(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \sin(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\cos(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \sin(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\sin(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cos(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\sin(\alpha) \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cos(\alpha) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\cos(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \sin(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \sin(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \sin(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \cos(\alpha)^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right) dx \\ &= \mathcal{S}(u), \end{aligned}$$

eine Rotation wirkt sich also nicht auf den Wert des Regularisierers aus.

2.2.3 Diffusiver Regularisierer

Zur vollständigen Definition des Regularisierers muss noch die Funktion ψ gewählt werden. Eine einfache Möglichkeit dazu bietet sich mit der Wahl von $\psi_{\text{diffusiv}}(x) = x$, also der Identität, womit dann

$$\mathcal{S}_{\text{diffusiv}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i(x)\|_2^2 dx$$

gilt. Dieser Term misst die L_2 -Norm [9] der Ableitungen ∇u_i und ist auch als *diffusiver Regularisierer* bekannt [8].

2.2.4 Totalvariation

Ein Nachteil des diffusiven Ansatzes ist die Bevorzugung von global glatten Funktionen, wodurch scharfe Kanten im Deformationsfeld verschmiert werden. Ein anderes Modell, das vor allem in der Bildentrauschung zur Kantenerhaltung eingesetzt wird, ist die *Totalvariation* $\mathcal{TV}(u)$ [21], die als L_1 -Norm der Ableitung von u als

$$\mathcal{TV}(u) = \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} |\nabla u| dx \quad (2.5)$$

definiert wird [1, 6]. Es kann gezeigt werden, dass diese Formulierung nicht nur differenzierbare, sondern auch bestimmte schwach differenzierbare Funktionen zulässt [1]. Es werden daher bei der Regularisierung mit Totalvariation auch Funktionen erreicht, die scharfe Kanten enthalten, deren sonstige Bereiche jedoch glatt sind. Das erlaubt es Objektgrenzen zu erhalten, unerwünschte Störungen jedoch zu eliminieren. Weiterführende theoretische Hintergründe der Regularisierung mit Totalvariation finden sich in [22, 1, 6].

Während der diffuse Ansatz das Quadrat der Ableitung von u regularisiert, wird bei der Totalvariation der Betrag verwendet. Anschaulich kann das im Vergleich von Betragsfunktion und ihrem Quadrat im Eindimensionalen, gezeigt in Abbildung 2.1(a), dargestellt werden. Kleinere Werte von u , d.h. geringe Veränderungen der Deformation, werden durch Totalvariation stärker bestraft, was eine lokale Glattheit erzeugt. Große Werte fallen dagegen im Vergleich zur quadratischen Norm weniger stark ins Gewicht, wodurch einzelne größere Veränderungen möglich werden. Neben der Betrachtung als Regularisierer ist auch eine Betrachtung des Totalvariations-Flusses möglich, dessen Äquivalenz zur TV-Regularisierung für den eindimensionalen Fall gezeigt werden kann [4]. Es können damit verschiedene Entscheidungsregeln bewiesen werden [2, 4], die die kantenerhaltenden Eigenschaften der Totalvariation genauer beschreiben als obige anschauliche Interpretation.

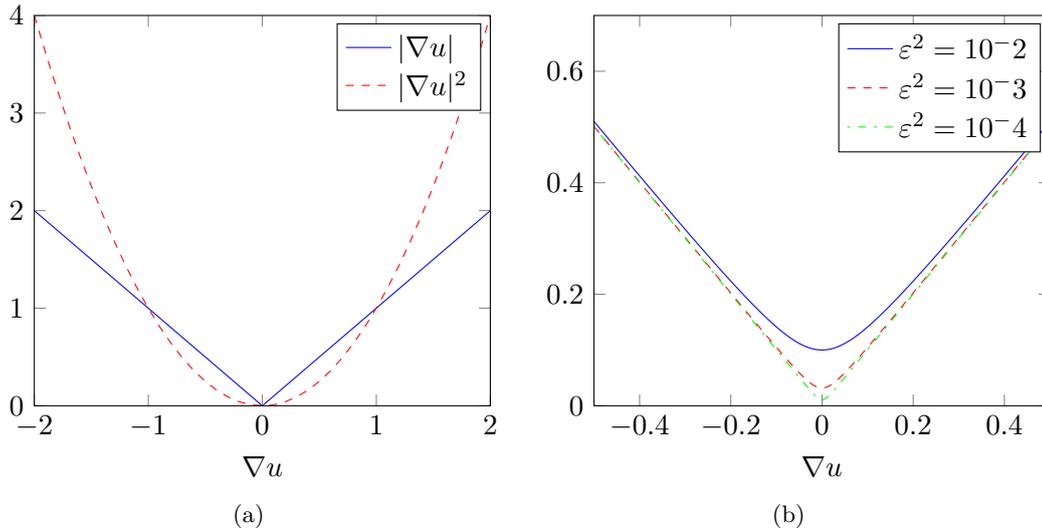


Abbildung 2.1: (a) Vergleich von $|\nabla u|$ und $|\nabla u|^2$ im Eindimensionalen, (b) ψ_{TV} für verschiedene Werte von ε^2

Das Funktional $\mathcal{TV}(u)$ ist für $\nabla u = 0$ nicht differenzierbar. Für spätere Newton-artige Optimierungsverfahren wird jedoch die Ableitung benötigt, daher wird $\mathcal{TV}(u)$ durch die Wahl der Funktion ψ in (2.4) als

$$\psi_{\text{TV}}(x) := \sqrt{x + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

approximiert [1, 3]. Der Parameter ε^2 wird möglichst klein gewählt, eine typische Wahl ist 10^{-3} [3]. Die Funktion ψ_{TV} für verschiedene Werte von ε^2 ist in Abbildung 2.1(b) dargestellt. Mit dieser Funktion wird dann mit

$$\mathcal{S}_{\text{TV}}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi_{\text{TV}} \left(\sum_{i=1}^d \|\nabla u_i(x)\|_2^2 \right) dx = \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \sqrt{\sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \varepsilon^2} dx$$

der endgültige Regularisierer und eine Approximation der Totalvariation aus (2.5) formuliert.

2.2.5 Beispiel

Der hier beschriebene Registrierungsansatz ist eng verwandt mit Methoden der Bildentrauschung. Um die Wirkungsweisen und Unterschiede der beiden vorgestellten Regularisierer deutlich zu machen, wird die Entrauschung (oder Glättung) einer mit Störungen überlagerten eindimensionalen Funktion f_{noise} am Beispiel gezeigt. Mit $\Omega = [0, 100]$ und $f_{\text{noise}}, u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wird das Zielfunktional

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f_{\text{noise}}(x) - u(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \psi \left((u'(x))^2 \right) dx$$

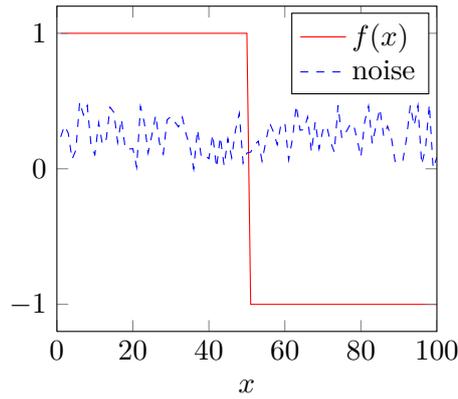


Abbildung 2.2: Originalfunktion und Rauschen

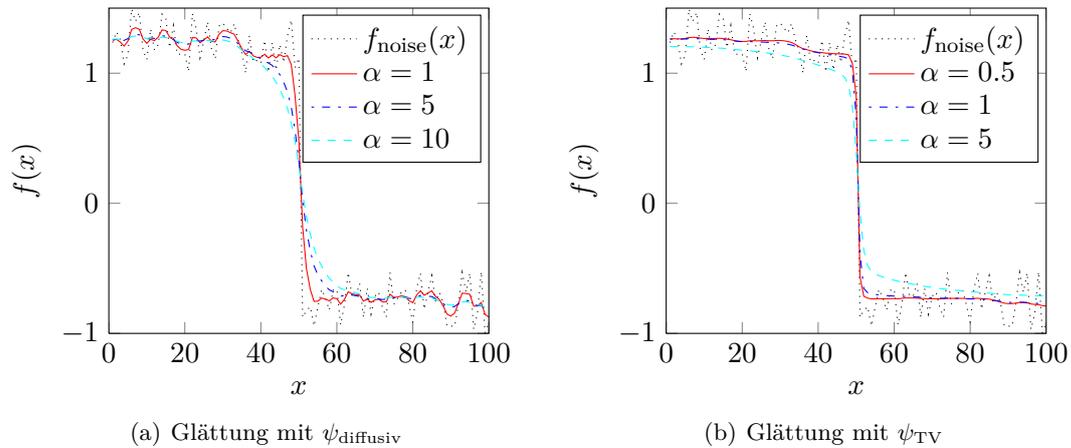
(a) Glättung mit ψ_{diffusiv} (b) Glättung mit ψ_{TV}

Abbildung 2.3: Glättung mit verschiedenen Regularisierern

diskretisiert und numerisch minimiert. Genauere Details zu den verwendeten Methoden finden sich in Abschnitt 2.3 und 2.4. Für u wird ein zufälliger Startwert verwendet.

Das Ergebnis der Glättung der verrauschten Ursprungsfunktion aus Abbildung 2.2 mit beiden Ansätzen ψ_{diffusiv} und ψ_{TV} für verschiedene Parameter α ist jeweils in Abbildung 2.3(a) bzw. Abbildung 2.3(b) zu sehen. Deutlich zeigt sich, dass eine Regularisierung mit ψ_{TV} den Sprung in der Funktion bei gleichzeitiger Glättung der „Plateaus“ gut abbildet, während eine diffusive Regularisierung eine gleichzeitige Glättung der konstanten Bereiche und Erhaltung des Sprunges nicht erreichen kann.

2.3 Diskretisierung

Die numerische Lösung des Optimierungsproblems (2.1) geschieht in dieser Arbeit nach dem *Discretize-Then-Optimize* Schema [15], d.h. aus den kontinuierlichen Formulierungen der Zielfunktion werden zunächst an diskreten Stellen ausgewertete Terme abgeleitet, wobei finite Differenzen eingesetzt werden. Diese werden anschließend mit numerischen

Optimierungsverfahren minimiert. Daher werden im Folgenden diskrete Ausdrücke der bisher vorgestellten Komponenten der Zielfunktion formuliert.

2.3.1 Gitter

Die diskreten Auswertungsstellen werden auf Gittern organisiert. Sei $\Omega_{\mathcal{R}} = (\omega_1, \omega_2) \times \dots \times (\omega_{2d-1}, \omega_{2d}) \subset \mathbb{R}^d$ im Kontext von Abschnitt 2.1 ein rechteckiges, zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand mit $\partial\Omega_{\mathcal{R}}$ bezeichnet wird. Dieses Gebiet wird in ein regelmäßiges Gitter äquidistanter Punkte der Anzahl m_1, \dots, m_d sowie Größe h_1, \dots, h_d in jeder Richtung eingeteilt, wobei die Abkürzungen

$$\tilde{h} := \prod_{j=1}^d h_j, \quad \tilde{m} := \prod_{j=1}^d m_j$$

für das Zellvolumen und die Gesamtanzahl der Zellen gelten. Die Punkte des Gitters liegen jeweils in den Zellenmitten, was als *Cell-Centered-Gitter* bezeichnet wird. Mit $x_{k,j} \in \mathbb{R}$ werden die Koordinaten eines Punktes $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,d})$, $k = 1, \dots, \tilde{m}$ dann durch

$$x_{k,j} = \omega_{2j-1} + (k - 0.5)h_j, \quad k = 1, \dots, \tilde{m}$$

definiert und das gesamte Gitter mit der Abkürzung

$$X = (\mathbf{x}_k)_{k=1, \dots, \tilde{m}} = (x_{k,j})_{\substack{k=1, \dots, \tilde{m} \\ j=1, \dots, d}}$$

bezeichnet.

Die Auswertung der Interpolante eines Bildes mit einem Gitter X als Argument, z.B. $\mathcal{R}(X)$ bedeutet dann die Auswertung von \mathcal{R} an allen Punkten des Gitters mit $\mathcal{R}(X) : \mathbb{R}^{\tilde{m} \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{m}}$. Analog dazu gilt $u(X) : \mathbb{R}^{\tilde{m} \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{d\tilde{m} \times 1}$ mit

$$\mathbf{u} = u(X) = \begin{pmatrix} u_1(X) \\ u_2(X) \\ \vdots \\ u_d(X) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Hieraus lassen sich diskretisierte Versionen von Abstandsmaß und Regularisierer herleiten.

2.3.2 Abstandsmaß

Damit das Abstandsmaß an diskreten Punkten ausgewertet werden kann, wird das Integral des kontinuierlichen Ausdrucks $\mathcal{D}(\varphi)$ mit Hilfe numerischer Quadratur durch die Mittelpunktsregel [19] approximiert und so eine Diskretisierung $D(\varphi)$ hergeleitet. Mit

dem Vektor $\mathbf{1}_{\tilde{m}} = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ gilt

$$\mathcal{D}(\varphi) \approx D(\varphi) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top (\mathcal{R}(X) - \mathcal{T}(\varphi(X)))^2$$

sowie für den später benötigten Gradienten nach der Kettenregel

$$\nabla D(\varphi) = \tilde{h} (\mathcal{R}(X) - \mathcal{T}(\varphi(X))) \mathcal{JT}(\varphi(X)),$$

wobei $\mathcal{JT}(\varphi(X)) \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times \tilde{m}d}$ die Jacobimatrix der Interpolationsfunktion der kubischen B-Spline-Interpolation bezüglich aller Punkte auf X bezeichnet. Damit kann die ebenfalls für das Optimierungsverfahren benötigte Hessematrix durch Weglassen von höheren Ableitungen mit

$$\nabla^2 D(\varphi) \approx \tilde{h} \mathcal{JT}(\varphi(X))^\top \mathcal{JT}(\varphi(X)) \quad (2.7)$$

approximiert werden. Diese Art der Approximation nach einem Gauß-Newton-Schema [17] umgeht die aufwändige Berechnung zweiter Ableitungen der Interpolante des Templatebildes und ist aufgrund des konvexen Terms gut zu optimieren. Sie wird in Abschnitt 2.4.2 noch einmal näher betrachtet.

2.3.3 Regularisierer

Für die spätere Verwendung im Optimierungsalgorithmus muss zusätzlich noch $\mathcal{S}(u)$ diskretisiert werden.

Mit den Auswertungen der Gradienten des Deformationsfeldes auf einem Gitter

$$\nabla \mathbf{u}_i = \nabla u_i(X) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial u_i}{\partial x_d}(X) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}_1) & \dots & \frac{\partial u_i}{\partial x_d}(\mathbf{x}_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}_{\tilde{m}}) & \dots & \frac{\partial u_i}{\partial x_d}(\mathbf{x}_{\tilde{m}}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times d}$$

kann für deren Norm

$$\|\nabla \mathbf{u}_i\|_2^2 = \left(\sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(X) \right)^2 \right) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_1) \right)^2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_{\tilde{m}}) \right)^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$$

formuliert werden. Für eine Auswertung als Argument der Funktion ψ gilt dann

$$\psi \left(\sum_{i=1}^d \|\nabla \mathbf{u}_i\|_2^2 \right) = \begin{pmatrix} \psi \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_1) \right)^2 \right) \\ \vdots \\ \psi \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_{\tilde{m}}) \right)^2 \right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}},$$

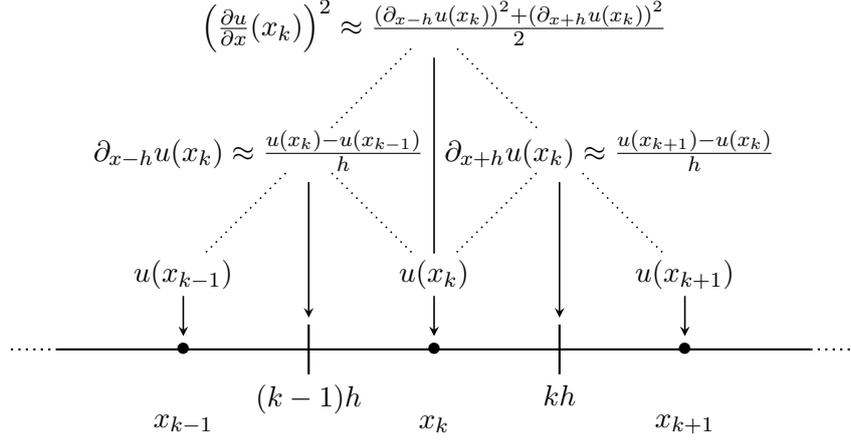


Abbildung 2.4: Approximation der Ableitungen mit finiten Differenzen auf einem Cell-Centered-Gitter im Eindimensionalen

womit sich, analog zur Diskretisierung des Abstandsmaßes aus dem vorherigen Abschnitt, mit der Mittelpunktsregel für den Regularisierer

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(u) &\approx S(\mathbf{u}) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\sum_{i=1}^d \|\nabla \mathbf{u}_i\|_2^2 \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(X) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

schreiben lässt. In diesem Ausdruck müssen zusätzlich noch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ an den Punkten des Gitters X diskretisiert werden. Mit Hilfe der Abkürzung

$$u_i(x_{k,j} \pm h_j) = u_i(x_{k,1}, \dots, x_{k,j} \pm h_j, \dots, x_{k,d})$$

wird zunächst mit finiten Differenzen eine Approximation der Richtungsableitung in Richtung j durch Rückwärtsdifferenzen mit

$$\partial_{x_{j+h}} u_i(\mathbf{x}_k) := \frac{u_i(x_{k,j} + h_j) - u_i(x_{k,j})}{h_j}$$

und Vorwärtsdifferenzen mit

$$\partial_{x_{j-h}} u_i(\mathbf{x}_k) := \frac{u_i(x_{k,j}) - u_i(x_{k,j} - h_j)}{h_j}$$

beschrieben. Diese Approximation liefert, wie in Abbildung 2.4 gezeigt, Werte der Ableitungen zwischen den Gitterpunkten.

Um die diskreten Ableitungen auf ganzzahligen Gitterpunkten abfragen zu können, wird

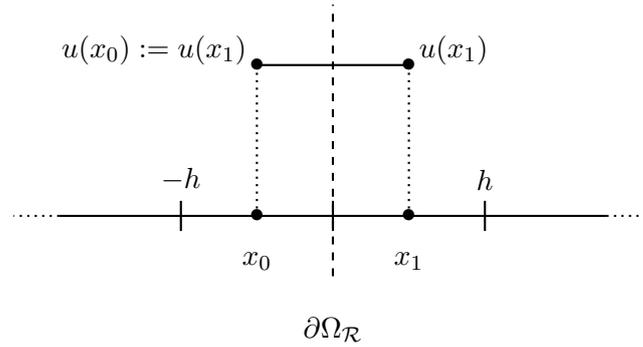


Abbildung 2.5: Neumann-Null-Randbedingungen im Eindimensionalen

mit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_k) \right)^2 &\approx \frac{\left(\partial_{x_{j-h}} u_i(\mathbf{x}_k) \right)^2 + \left(\partial_{x_{j+h}} u_i(\mathbf{x}_k) \right)^2}{2} \\ &\approx \frac{\left(u_i(x_{k,j} + h_j) - u_i(x_{k,j}) \right)^2 + \left(u_i(x_{k,j}) - u_i(x_{k,j} - h_j) \right)^2}{2h_j^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

zusätzlich zwischen den Vorwärtsdifferenzen gemittelt. Dies ist ebenfalls in Abbildung 2.4 dargestellt. Dabei werden die Werte zunächst quadriert, wodurch ein zusätzlicher Kern des sonst entstehenden zentralen Differenzenquotienten, z.B. bei Sinusfunktionen der Periode $2h$, vermieden wird.

Als Randbedingungen werden bei der Diskretisierung Neumann-Null-Randbedingungen verwendet, d.h. am Rand des Gebiets $\partial\Omega_{\mathcal{R}}$ gilt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_{\mathcal{R}}.$$

Da die Werte auf einem Cell-Centered-Gitter betrachtet werden, liegt der Rand des Gebiets zwischen dem ersten Punkt des Gitters innerhalb von $\Omega_{\mathcal{R}}$ und einem gedachten nächsten Gitterpunkt außerhalb des Gebiets. Die Randbedingungen werden daher bei Punkten außerhalb des Gebiets durch eine Spiegelung der Werte von u an den Gebietsgrenzen modelliert, so dass u am Rand konstant ist. Dies ist am Beispiel für den eindimensionalen Fall in Abbildung 2.5 dargestellt.

Hiermit liegen nun alle für die Registrierung benötigten Terme in diskretisierter Version vor. Um den Regularisierer im Optimierungsverfahren zu verwenden, werden zusätzlich, genau wie beim Abstandsmaß, dessen Ableitungen benötigt. Diese werden im nächsten Abschnitt, zusammen mit einer kompakten Formulierung des Regularisierers selbst, in Matrixschreibweise hergeleitet.

2.3.4 Matrixschreibweise

Zunächst werden die Matrizen

$$\hat{D}_m = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times m}, \quad \hat{M}_m = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (m-1)}$$

zur Bestimmung der Vorwärtsdifferenzen und der Mittelwerte im Eindimensionalen aufgestellt. Diese Matrizen beinhalten dabei auch die im vorherigen Abschnitt vorgestellten Neumann-Null-Randbedingungen. Mit dem Diagonalmatrix-Operator $\text{diag} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$, $k \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^k$ mit

$$\text{diag}(\mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & & & \\ & \mathbf{v}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{v}_k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi(\mathbf{v}) := \begin{pmatrix} \psi(\mathbf{v}_1) \\ \vdots \\ \psi(\mathbf{v}_k) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

lässt sich der eindimensionale Regularisierer als

$$S^{1D}(\mathbf{u}) = \frac{h_1}{2} \mathbf{1}_{m_1}^\top \psi \left(\frac{1}{h_1^2} \hat{M}_{m_1} \text{diag}(\hat{D}_{m_1} \mathbf{u}) \hat{D}_{m_1} \mathbf{u} \right) \quad (2.10)$$

schreiben. Im Zweidimensionalen lassen sich mit Hilfe des Kroneckerprodukts \otimes [11] und der Einheitsmatrix

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

dann Ableitungsmatrizen für jede Raumrichtung

$$D_1 = E_{m_2} \otimes \hat{D}_{m_1} \in \mathbb{R}^{(m_1-1)m_2 \times \tilde{m}} \quad \text{und} \quad D_2 = \hat{D}_{m_2} \otimes E_{m_1} \in \mathbb{R}^{m_1(m_2-1) \times \tilde{m}}$$

sowie Mittelungsmatrizen

$$M_1 = E_{m_2} \otimes \hat{M}_{m_1} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times (m_1-1)m_2} \quad \text{und} \quad M_2 = \hat{M}_{m_2} \otimes E_{m_1} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times m_1(m_2-1)}$$

berechnen.

Dabei muss für die Jacobimatrix von u jede der in (2.6) untereinander geschriebenen Komponentenfunktionen des Deformationsfeldes nach allen Raumvariablen abgeleitet werden. Dies wird mit den Hilfsmatrizen

$$\mathbf{D}_i = E_d \otimes D_i \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_i = \mathbf{1}_d^\top \otimes M_i, \quad i = 1, 2$$

bei einer Größe von $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}d}$ schließlich durch die Blockmatrizen

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \mathbf{D}_1 \\ \frac{1}{h_2} \mathbf{D}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d(m_1-1)m_2+dm_1(m_2-1)) \times d\tilde{m}} \quad \text{sowie}$$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times (d(m_1-1)m_2+dm_1(m_2-1))}$$

ausgedrückt.

Der diskretisierte Regularisierer im Zweidimensionalen lässt sich dann mit Hilfe dieser Matrizen analog zu (2.10) als

$$S^{2D}(\mathbf{u}) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi(\mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D}\mathbf{u})$$

formulieren. Durch die Matrix \mathbf{D} werden zunächst die finiten Differenzen gebildet, diese dann mit Hilfe des Diagonalmatrix-Operators quadriert und schließlich die Mittelwerte der Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen durch die Matrix \mathbf{M} berechnet. Nach Auswertung der Funktion ψ summiert der Vektor $\mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top$ die entstandenen Werte dann als Diskretisierung des Integrals mit der Mittelpunktsregel auf.

Für das Optimierungsverfahren werden zusätzlich noch die ersten beiden Ableitungen benötigt. In Matrixschreibweise ist der Gradient $\nabla S^{2D} \in \mathbb{R}^{1 \times \tilde{m}d}$ des Regularisierers mit der analog zu (2.9) definierten Abkürzung $\psi' := \psi'(\mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D}\mathbf{u})$ und mit der Kettenregel durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} \nabla S^{2D}(\mathbf{u}) &= \tilde{h} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top J\psi \mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D} \\ &= \tilde{h} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \operatorname{diag}(\psi') \mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D} \\ &= \tilde{h} (\psi')^\top \mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D} \end{aligned}$$

beschrieben. Nach demselben Schema kann mit $\psi'' := \psi''(\mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D}\mathbf{u})$ und $(\psi')^\top \mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u}) = (\operatorname{diag}((\psi')^\top \mathbf{M})\mathbf{D}\mathbf{u})^\top$ sowie der Produkt- und Kettenregel mit

$$\begin{aligned} \nabla^2 S^{2D}(\mathbf{u}) &= \left((J\psi' 2\mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{D})^\top \mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u}) + \left(\operatorname{diag}((\psi')^\top \mathbf{M}) \mathbf{D} \right)^\top \right) \tilde{h} \mathbf{D} \\ &= \left(2\mathbf{D}^\top \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{M}^\top \operatorname{diag}(\psi'') \mathbf{M} \operatorname{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u}) + \mathbf{D}^\top \operatorname{diag}(\mathbf{M}^\top \psi') \right) \tilde{h} \mathbf{D} \quad (2.11) \end{aligned}$$

ein Ausdruck für die Hessematrix $\nabla^2 S^{2D} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}d \times \tilde{m}d}$ formuliert werden. Auch diese Hessematrix wird, genau wie die des Abstandsmaßes in (2.7), durch Weglassen der Terme höherer Ordnung als

$$\nabla^2 S^{2D}(\mathbf{u}) \approx \tilde{h} \mathbf{D}^\top \operatorname{diag}(\mathbf{M}^\top \psi') \mathbf{D}$$

approximiert, was bei den im Folgenden beschriebenen numerischen Optimierungsverfahren von Vorteil ist und in Abschnitt 2.4.2 begründet wird.

Im Fall des diffusiven Regularisierers mit $\psi_{\text{diffusiv}}(x) = x$ verschwinden die zweiten Ableitungen ψ'' und approximierte und exakte Version fallen zusammen.

Für eine Regularisierung mit Totalvariation gilt für die Ableitungen von $\psi_{\text{TV}}(x)$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \varepsilon^2}} \quad (2.12)$$

$$\psi''(x) = -\frac{1}{4(x + \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.13)$$

Matrixschreibweisen für eine Diskretisierung von höherdimensionalen Problemen lassen sich analog zu den oben beschriebenen herleiten, die verwendeten Matrizen bleiben dabei stets zweidimensional.

2.4 Optimierung

Die diskretisierte Zielfunktion mit den in den letzten Abschnitten beschriebenen Termen kann nun numerisch minimiert werden. Dazu wird ein Optimierungsverfahren verwendet, das auf dem Newton-Verfahren [19] basiert. Als Lösung des Registrierungsproblems ergibt sich ein Deformationsfeld, mit dem das Templatebild transformiert wird.

2.4.1 Gauß-Newton-Verfahren

Mit der Notation $\varphi(X) = u(X) + X = \mathbf{u} + X$ kann die diskretisierte Zielfunktion als

$$J(\varphi(X)) = D(\mathcal{R}(X), \mathcal{T}(\varphi(X))) + \alpha S(u(X))$$

formuliert werden. In einem iterativen Verfahren durch Lösen der Newtongleichung

$$\nabla^2 J(\varphi_{(k)}(X)) \mathbf{s}_{(k)} = -\nabla J(\varphi_{(k)}(X)) \quad (2.14)$$

nach der Suchrichtung $\mathbf{s}_{(k)}$ wird die Zielfunktion im Schritt k minimiert. Die Ableitungen der Zielfunktion setzen sich dabei aus Abstandsmaß und Regularisierer als

$$\begin{aligned} \nabla J(\varphi(X)) &= \nabla D(\varphi(X)) + \alpha \nabla S(u(X)) \\ \nabla^2 J(\varphi(X)) &= \nabla^2 D(\varphi(X)) + \alpha \nabla^2 S(u(X)) \end{aligned}$$

zusammen, die Terme in $\nabla^2 J$ sind entsprechend Abschnitt 2.3.4 nach einem Gauß-Newton-Schema approximiert. Als Update-Schritt ergibt sich

$$\mathbf{u}_{(k+1)} = \mathbf{u}_{(k)} + \gamma \mathbf{s}_{(k)},$$

wobei die Schrittweite γ durch Armijo-Liniensuche [17] bestimmt wird.

Das Verfahren bricht ab, wenn die von Gill, Murray und Wright in [10] vorgeschlagenen und ebenfalls in [13] verwendeten Abbruchbedingungen erfüllt sind.

2.4.2 Hessematrix des Regularisierers

Wie am Ende von Abschnitt 2.3.4 angedeutet, kann die Hessematrix des Regularisierers durch Weglassen von Termen höherer Ordnung approximiert werden. Bei der Regularisierung mit Totalvariation ist diese Approximation sogar für eine Abstiegsrichtung des Optimierungsverfahrens erforderlich, was im Folgenden gezeigt wird.

Gilt im Newton-Verfahren

$$\mathbf{s}_{(k)}^\top \nabla J \leq 0,$$

dann ist die Suchrichtung $\mathbf{s}_{(k)}$ eine Abstiegsrichtung [17]. Diese Ungleichung kann durch Einsetzen der Newtongleichung (2.14) zu

$$-\mathbf{s}_{(k)}^\top \nabla^2 J \mathbf{s}_{(k)} \leq 0$$

umgeformt werden. Für die Hessematrix des Regularisierers mit Totalvariation aus (2.11) ist der Ausdruck dann

$$-\mathbf{s}_{(k)} \left(\left(2\mathbf{D}^\top \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u}) \mathbf{M}^\top \text{diag}(\psi'') \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u}) + \mathbf{D}^\top \text{diag}(\mathbf{M}^\top \psi') \right) \tilde{h} \mathbf{D} \right) \mathbf{s}_{(k)} \stackrel{!}{\leq} 0,$$

was der Definition von „ $\nabla^2 J$ ist positiv semidefinit“ entspricht. Werden die beiden Summanden der Hessematrix getrennt betrachtet, gilt für den zweiten Summanden

$$-\mathbf{s}_{(k)} \left(\tilde{h} \mathbf{D}^\top \text{diag}(\mathbf{M}^\top \psi') \mathbf{D} \right) \mathbf{s}_{(k)} \leq 0, \quad (2.15)$$

da nach (2.12) für alle $x \geq 0$ gilt $\psi'(x) \geq 0$ und \mathbf{M} nur positive Elemente enthält. Für den ersten Summanden ist jedoch

$$-\mathbf{s}_{(k)} \left(2\tilde{h} \mathbf{D}^\top \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u}) \mathbf{M}^\top \text{diag}(\psi'') \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{D}\mathbf{u}) \mathbf{D} \right) \mathbf{s}_{(k)} \geq 0,$$

da nach (2.13) für alle $x \geq 0$ gilt $\psi''(x) \leq 0$. Damit kann eine Abstiegsrichtung des Newton-Verfahrens nicht mehr garantiert werden, weshalb in dieser Arbeit Terme der Struktur von $\nabla^2 J$ immer nach Art von (2.15) durch Weglassen höherer Ableitungen approximiert werden.

3 Registrierung von Bildsequenzen

Der im vorherigen Kapitel vorgestellte Ansatz ermöglicht es, zwei Bilder aufeinander zu registrieren. Moderne Methoden der medizinischen Bildgebung wie Magnetresonanz- oder Computertomographie sind jedoch in der Lage, eine zeitliche Folge von Bildern aufzunehmen. Diese Bildsequenz besteht dann aus $(T + 1)$ verschiedenen Bildern $\mathcal{I}^{(t)}$, $t = 0, \dots, T$ der Dimension d , die in der Regel zu äquidistanten Zeitpunkten aufgenommen wurden.

Entsprechend dem Ansatz, dass jedes Bild auf ein anderes registriert werden soll, ergeben sich daraus T Registrierungsprobleme, die es zu lösen gilt.

In diesem Kapitel werden eine Erweiterung des Registrierungsansatzes auf Bildsequenzen und die daraus resultierenden Fragestellungen sowie Lösungsansätze beschrieben. Zunächst wird in Abschnitt 3.1 der Übergang von einem d -dimensionalen Problem auf T d -dimensionale Probleme betrachtet. Anschließend wird in mehreren Schritten die Verwendung von zusätzlichen Informationen in Zeitrichtung behandelt. In Abschnitt 3.2 findet zunächst eine mathematische Formulierung zur Modellierung eines zeitlichen Regularisierers sowie dessen Diskretisierung statt. Danach werden in Abschnitt 3.3 iterative Schemata zur Lösung des räumlich-zeitlichen Registrierungsproblems beschrieben. Abschließend werden in Abschnitt 3.4 und 3.5 zwei weitere Ansätze zur Modellierung zeitlicher Regularisierung aufgestellt und deren Vor- und Nachteile diskutiert.

3.1 Erweiterung des Registrierungsproblems

Um die Bewegung zu bestimmen, die zwischen Aufnahmen zu zwei Zeitpunkten stattgefunden hat, wird jedes Bild auf seinen zeitlichen Vorgänger registriert. Die Bildfolge und die aus jeweils zwei aufeinanderfolgenden Bildern resultierenden Transformationen $\varphi^{(t)}$ und die zugehörigen Vektorfelder $u^{(t)}$ zum Zeitpunkt $t = 1, \dots, T$ sind schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt. Diese Betrachtung hat den Vorteil, dass aus der ermittelten

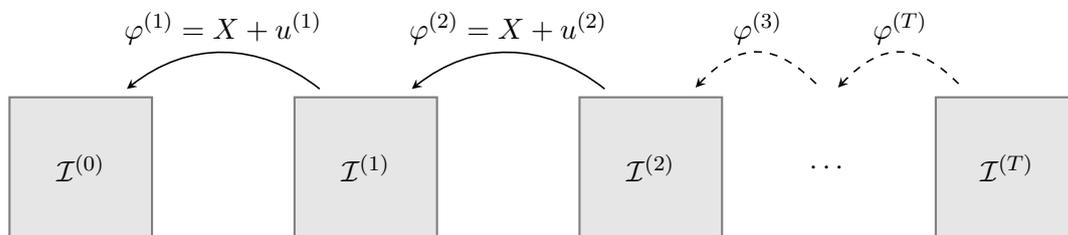


Abbildung 3.1: Erweitertes Registrierungsproblem

Bewegung auf den Bewegungsverlauf über die gesamte Bildsequenz geschlossen werden kann. Die Einzelbilder der Sequenz bleiben dabei als Zwischenergebnisse erhalten.

Ein anderer Ansatz registriert jedes Bild auf das erste Bild $\mathcal{I}^{(0)}$ der Sequenz, was es ermöglicht, die berechnete Bewegung der Objekte im Bild aus der Sequenz zu eliminieren. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 3.5 betrachtet. Alternativ lässt sich das um die Zeit erweiterte Problem anstatt als eine Folge von Bildern auch als ein kontinuierliches System der Dimension $(d+1)$ auffassen. Dies ist ein Ansatz, der z.B. bei Methoden des optischen Flusses [23] verwendet, hier aber nicht weiter verfolgt wird.

3.1.1 Gesamtsystem

Eine Möglichkeit zur Modellierung des in Abbildung 3.1 dargestellten Registrierungsansatzes ist die Betrachtung aller Registrierungsprobleme in einem gemeinsamen System, das dann analog zum Standardfall aus Kapitel 2 gelöst wird.

In dem hier gewählten Ansatz werden für das Abstandsmaß immer zwei aufeinanderfolgende Bilder der Zeitschritte t und $(t+1)$ betrachtet. Die Zielfunktion setzt sich für diskrete, äquidistante Zeitschritte aus der Summe der einzelnen Registrierungsprobleme als

$$\mathcal{J}(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(T)}) = \sum_{t=1}^T \mathcal{D}(\mathcal{I}^{(t-1)}, \mathcal{I}^{(t)}(\varphi^{(t)})) + \alpha \sum_{t=1}^T \mathcal{S}(u^{(t)}) \quad (3.1)$$

zusammen, eine Modellierung die ähnlich zu der in [16] verwendeten ist, mit dem Unterschied, dass hier das Referenzbild als fest betrachtet wird.

Analog dazu kann mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2 eine diskretisierte Zielfunktion

$$J(\varphi^{(1)}(X), \dots, \varphi^{(T)}(X)) = \sum_{t=1}^T D(\mathcal{I}^{(t-1)}(X), \mathcal{I}^{(t)}(\varphi^{(t)}(X))) + \alpha \sum_{t=1}^T S(u^{(t)}(X))$$

formuliert werden, die mit dem in Abschnitt 2.4 beschriebenen Algorithmus minimiert werden kann. Bei dieser Betrachtung erhöht sich abhängig von der Anzahl der Zeitschritte der Aufwand und Speicherbedarf, der zur Minimierung der Zielfunktion benötigt wird.

In diesem Fall sind die Variablen der einzelnen Zeitschritte aufgrund des als fest betrachteten Referenzbildes unabhängig voneinander, daher können sie sowohl in einem System gemeinsam als auch in beliebiger Reihenfolge einzeln optimiert werden. Deutlich wird dies bei Betrachtung der Matrix des Gleichungssystems im Optimierungsverfahren, d.h. der Approximation der Hessematrix der Zielfunktion $\nabla^2 J$, dargestellt in Abbildung 3.2(a). Die Variablen in der Abbildung sind untereinander in einer Reihenfolge angeordnet, bei der zunächst alle Punkte des Gitters, dann alle Zeitschritte und zuletzt alle Komponentenfunktionen durchlaufen werden; auf diese Diskretisierung wird in Abschnitt 3.2.3 noch näher eingegangen. An der Blockstruktur lässt sich die Unabhängigkeit der einzelnen Variablen für verschiedene Zeitschritte erkennen, die Nebendiagonalen koppeln lediglich die einzelnen Komponentenfunktionen für denselben Zeitschritt miteinander.

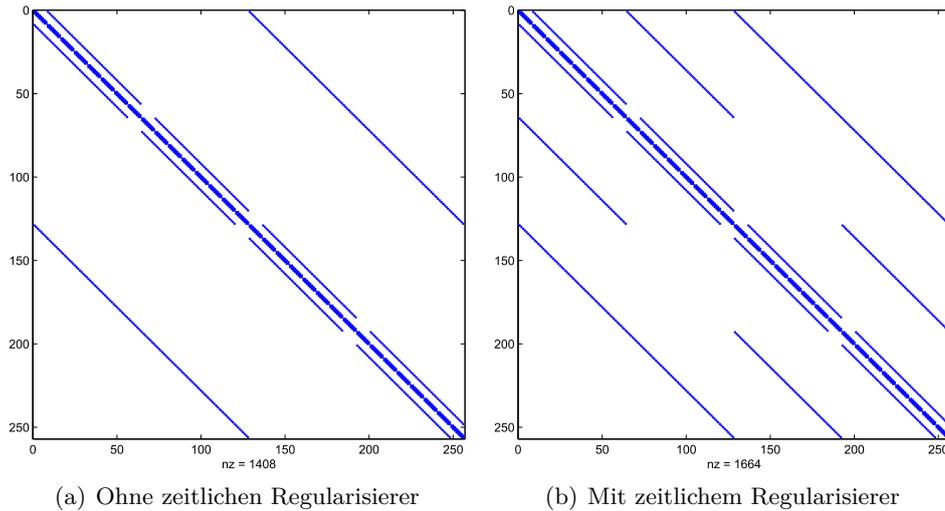


Abbildung 3.2: Hessematrizen der Zielfunktion mit und ohne zeitlichen Regularisierer, Registrierung von Sequenzen der Größe 8×8 mit $T = 3$, also zwei Registrierungsproblemen

3.2 Zeitlicher Regularisierer

Eine Bildsequenz enthält gegenüber einem einfachen Registrierungsproblem mit zwei Bildern zusätzlich zeitliche Informationen. Diese Informationen beschreiben den Verlauf und die Veränderung der Bewegung von aufgenommenen Strukturen über die Zeit. Das ermöglicht es, ähnlich wie die bisherige Regularisierung, zusätzliche Forderungen an den zeitlichen Verlauf der berechneten Deformationen zu stellen.

In diesem Abschnitt werden diese zeitlichen Informationen in Form eines Regularisierers $\mathcal{S}_t(u^{(1)}, \dots, u^{(T)})$ modelliert und in das vorgestellte Registrierungsmodell integriert. Dadurch wird eine Kopplung der Variablen der einzelnen Zeitschritte erreicht, die dazu führt, dass das Problem nur noch als Gesamtsystem gelöst werden kann. Daraus resultiert ein hoher Speicher- und Rechenaufwand, weshalb im nächsten Abschnitt Ansätze zur iterativen und damit weniger speicherintensiven Lösung behandelt werden.

3.2.1 Gesamtsystem

Um in die Zielfunktion (3.1) zusätzlich eine zeitliche Betrachtung der Deformationen einfließen zu lassen, wird der Term um einen Regularisierer $\mathcal{S}_t(u^{(1)}, \dots, u^{(T)})$ zu

$$\mathcal{J}(\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(T)}) = \sum_{t=1}^T \mathcal{D}(\mathcal{I}^{(t-1)}, \mathcal{I}^{(t)}(\varphi^{(t)})) + \alpha \sum_{t=1}^T \mathcal{S}(u^{(t)}) + \beta \mathcal{S}_t(u^{(1)}, \dots, u^{(T)}) \quad (3.2)$$

ergänzt. Dieser misst die zeitliche Änderung von $u^{(t)}$ und wird mit dem Parameter $\beta \in \mathbb{R}_+$ gewichtet.

Der zusätzliche Term muss genau wie der Regularisierer $\mathcal{S}(u^{(t)})$ in Abschnitt 2.2 nicht exakt erfüllt werden, d.h. es muss nicht $\mathcal{S}_t = 0$ für eine zulässige Lösung gelten, sondern \mathcal{S}_t soll lediglich einen „kleinen“ Wert annehmen. Dass diese Modellierung in Bezug auf die hier verwendete zeitliche Regularisierung sinnvoll ist, wird am Ende des nächsten Abschnitts deutlich.

3.2.2 Zeitliche Glattheit

Die Modellierung von \mathcal{S}_t mit ψ_{TV} oder ψ_{diffusiv} ist analog zu der räumlichen Betrachtung aus Kapitel 2 möglich. Die Zeitachse wird als Raumrichtung betrachtet und die einzelnen Zeitschritte als diskretisierte Punkte dieser. Damit lässt sich der Ansatz als eindimensionale Version des räumlichen Regularisierers auf die Zeitachse übertragen.

Dazu werden die Deformationen der einzelnen Zeitschritte als ein erweitertes Vektorfeld

$$u^{(t)}(x) = \begin{pmatrix} u_1^{(t)} \\ u_2^{(t)} \\ \vdots \\ u_d^{(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, \dots, x_d, t) \\ u_2(x_1, \dots, x_d, t) \\ \vdots \\ u_d(x_1, \dots, x_d, t) \end{pmatrix}$$

betrachtet. Die einzelnen Gradienten aus (2.3) werden um die Komponente $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ erweitert und es gilt

$$\nabla u_i^{(t)}(x) = \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_d}, \frac{\partial u_i(x)}{\partial t} \right)^\top \in \mathbb{R}^{(d+1)}, \quad i = 1, \dots, d,$$

wobei die letzte Spalte der Jacobimatrix des um die Zeit erweiterten Vektorfeldes mit

$$\nabla_t u^{(t)}(x) = \left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial u_d(x)}{\partial t} \right)^\top \in \mathbb{R}^d$$

bezeichnet wird. Ähnlich zum räumlichen Regularisierer (2.4) ist der zeitliche Regularisierer dann als

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t(u^{(1)}, \dots, u^{(T)}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \sum_{t=1}^T \psi \left(\left\| \nabla_t u^{(t)}(x) \right\|_2^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \sum_{t=1}^T \psi \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t} \right)^2 \right) dx \end{aligned}$$

definiert. Dabei integriert der Term die zeitliche Ableitung zu allen diskreten Zeitpunkten $t = 1, \dots, T$ über $\Omega_{\mathcal{R}}$.

Der zeitliche Regularisierer misst die Änderung der Deformation, d.h. die Änderung der Bewegung einzelner Punkte über die Zeit. Das bedeutet, dass bei einem geringen Wert des Terms \mathcal{S}_t eine *gleichförmige Bewegung* vorliegt, die in Betrag und Richtung über

die Zeit konstant ist. Diese Bewegung wird daher in dieser Arbeit als „zeitlich glatt“ interpretiert.

Daraus wird deutlich, dass, wie im letzten Abschnitt angedeutet, eine Modellierung als gewichteter Regularisierer sinnvoll ist, denn es werden zwar Sprünge und abrupte Bewegungen verhindert, eine langsame Änderung von Betrag und Richtung der Bewegung ist jedoch möglich. Noch weiter geht eine Verwendung von ψ_{TV} im Regularisierer, also eine Modellierung mit Totalvariation. Analog zum Beispiel in Abbildung 2.3 kann die Bewegung damit auch an einigen Stellen scharfe Kanten enthalten. Sinnvoll erscheint dies z.B. mit Blick auf eine Atembewegung: Ein- und Ausatemphase weichen nur gering von der Forderung nach zeitlicher Glattheit ab, die Bewegung ändert ihre Geschwindigkeit nur langsam und behält ihre Richtung nahezu bei. Am Scheitelpunkt zwischen Ein- und Ausatemphase findet jedoch eine abrupte Umkehr der Bewegungsrichtung statt, welche einer mit Totalvariation zugelassenen Kante entspricht. Diese Überlegung wird später in Kapitel 4 wieder aufgegriffen und anhand von Beispielen verifiziert.

3.2.3 Diskretisierung

Um den im vorherigen Abschnitt modellierten zeitlichen Regularisierer im numerischen Optimierungsverfahren verwenden zu können, muss auch dieser diskretisiert werden. Das Integral des zeitlichen Regularisierers \mathcal{S}_t wird analog zu Abschnitt 2.3 mit der Mittelpunktsregel als

$$\mathcal{S}_t(u^{(1)}(X), \dots, u^{(T)}(X)) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_m^\top \sum_{t=1}^T \psi \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u_i^{(t)}}{\partial t}(X) \right)^2 \right)$$

auf einem Gitter diskretisiert. Die Ableitungen nach der Zeit werden genau wie in (2.8) durch gemittelte Differenzenquotienten

$$\left(\frac{\partial u_i^{(t)}}{\partial t}(\mathbf{x}_k) \right)^2 \approx \frac{(u_i(\mathbf{x}_k, t + \tau) - u_i(\mathbf{x}_k, t))^2 + (u_i(\mathbf{x}_k, t) - u_i(\mathbf{x}_k, t - \tau))^2}{2\tau^2} \quad (3.3)$$

approximiert. Hierbei bezeichnet τ die Zeitschrittweite zwischen den einzelnen Bildern der Sequenz, für Werte außerhalb des betrachteten Gebiets werden wieder Neumann-Null-Randbedingungen verwendet.

Um eine kompakte Form des Regularisierers in Matrixschreibweise auch bei Betrachtung einer Sequenz von Bildern zu ermöglichen, müssen zunächst wieder einige Hilfsgrößen und Abkürzungen definiert werden. Mit der Diskretisierung von u zu allen Zeitpunkten

$t = 1, \dots, T$ auf dem Gitter X als Vektor

$$\mathbf{u}_t = \begin{pmatrix} u_1^{(1)}(X) \\ \vdots \\ u_1^{(T)}(X) \\ u_2^{(1)}(X) \\ \vdots \\ u_2^{(T)}(X) \\ \vdots \\ u_d^{(T)}(X) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}dT},$$

in dem zuerst alle Punkte des Gitters, dann alle Zeitschritte und schließlich alle Komponentenfunktionen durchlaufen werden, und den Hilfsmatrizen

$$\hat{D}_T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(T-1) \times T}, \quad \hat{M}_T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{T \times (T-1)}$$

können die Ausdrücke

$$\mathbf{D}_t = E_d \otimes \hat{D}_T \otimes E_{\tilde{m}} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}d(T-1) \times \tilde{m}dT} \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{1}_d^\top \otimes \hat{M}_T \otimes E_{\tilde{m}} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}T \times \tilde{m}d(T-1)}$$

hergeleitet werden. Mit diesen Bezeichnungen lässt sich der diskretisierte zeitliche Regularisierer als

$$S_t(\mathbf{u}_t) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}T}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{M}_t \text{diag}(\mathbf{D}_t \mathbf{u}_t) \mathbf{D}_t \mathbf{u}_t \right)$$

schreiben. Die Ableitungen werden dann analog zu Abschnitt 2.3.4 gebildet.

Aufgrund der Struktur des Differenzenquotienten (3.3) hängen im Regularisierer die einzelnen $u^{(t)}$ von ihrem jeweiligen zeitlichen Vorgänger $u^{(t-1)}$ und auch Nachfolger $u^{(t+1)}$ ab, die selbst wiederum von Vorgänger und Nachfolger abhängig sind. Dadurch lässt sich das Gleichungssystem nicht mehr in einzelne Unterprobleme aufteilen. Dies wird auch bei Betrachtung der Hessematrix der Zielfunktion $\nabla^2 J$ in Abbildung 3.2(b) deutlich. Durch die neu hinzugekommenen Nebendiagonalen im Vergleich zu Abbildung 3.2(a) werden die Variablen der einzelnen Zeitschritte voneinander abhängig.

3.3 Iterationsverfahren

Die Kopplung der einzelnen Zeitschritte hat den Nachteil, dass das Lösen des Minimierungsproblems im Vergleich zum einzelnen Problem mit nur zwei Bildern einen wesentlich höheren Speicherbedarf aufweist, da die Unterprobleme nicht mehr unabhängig gelöst

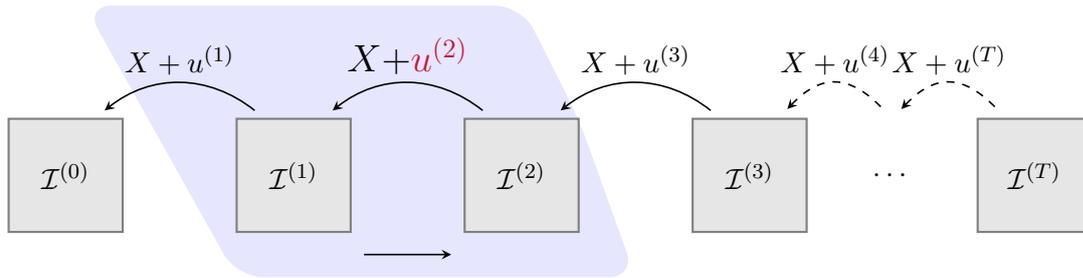


Abbildung 3.3: Iterationsschema Vorwärtsiteration

werden können. Dies ist bei höherdimensionalen Bildern, z.B. Bildsequenzen von dreidimensionalen Bildern oder langen Sequenzen, aufgrund des großen Gleichungssystems problematisch.

Um dieses Problem zu lösen, wird in dieser Arbeit ein iterativer Ansatz zur Registrierung von Bildsequenzen modelliert, bei dem in jedem Schritt nur jeweils eine Untermenge der zu optimierenden Variablen betrachtet wird. Dies ist schematisch in Abbildung 3.3 dargestellt. Nur die rot eingefärbten Terme werden als Variablen behandelt und in einem System betrachtet, welches aus den Komponenten in dem farbig hinterlegten Bereich besteht. Schrittweise wird dieses System dann über die gesamte Bildsequenz verschoben. Dieser Ansatz wird in den folgenden Abschnitten ausführlich beschrieben.

Entsprechend der Zielfunktion (3.2) lassen sich das Abstandsmaß und der räumliche Regularisierer leicht in einzelne Summanden aufspalten. Bei der Aufspaltung des zeitlichen Regularisierers $\mathcal{S}_t(u^{(1)}, \dots, u^{(T)})$ in Terme $\mathcal{S}_t(u^{(t)})$, $t = 1, \dots, T$ bieten sich mehrere Möglichkeiten zur Diskretisierung der zeitlichen Ableitungen $\nabla_t u^{(t)}$, welche im Folgenden näher beschrieben werden.

Generell wird die Zielfunktion (3.2) dabei in Funktionen der Gestalt

$$\mathcal{J}(u^{(t)}) = \mathcal{D}(\mathcal{I}^{(t-1)}, \mathcal{I}^{(t)}(X + u^{(t)})) + \alpha \mathcal{S}(u^{(t)}) + \beta \mathcal{S}_t(u^{(t)}) \quad (3.4)$$

zerlegt, die einzeln für $t = 1, \dots, T$ diskretisiert und optimiert werden.

3.3.1 Asymmetrischer Ansatz

Für die Zerlegung des Regularisierers $\mathcal{S}_t(u^{(1)}, \dots, u^{(T)})$ wird die Approximation der zeitlichen Ableitungen mit einem asymmetrischen Schema, d.h. unter Verwendung von Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzenquotienten, betrachtet, die nur jeweils einen Wert aus vorherigen oder nachfolgenden Zeitschritten verwenden. Daraus ergeben sich entsprechend zwei verschiedene Modellierungen.

Vorwärtsiteration

Die einzelnen Komponenten des zeitlichen Gradienten $\nabla_t u^{(t)}$ zum Zeitpunkt t werden durch Rückwärtsdifferenzen approximiert. Dabei ist

$$\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t} \approx \frac{u_i^{(t)}(x) - u_i^{(t-1)}(x)}{\tau}, \quad i = 1, \dots, d; \quad t = 1, \dots, T \quad (3.5)$$

und als Regularisierer $\mathcal{S}_t(u^{(t)})$ eines einzelnen Iterationsschritts kann

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t(u^{(t)}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t} \right)^2 \right) dx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{u_i^{(t)}(x) - u_i^{(t-1)}(x)}{\tau} \right)^2 \right) dx \end{aligned}$$

formuliert werden. Dieser hängt also neben der Variable $u^{(t)}$ noch von $u^{(t-1)}$ ab. Die Deformation $u^{(t-1)}$ aus dem vorherigen Schritt ist in diesem Schritt konstant und eine Optimierung findet nur über $u^{(t)}$ statt, was bei der folgenden Diskretisierung deutlich wird.

Die diskrete Version des Regularisierers \mathcal{S}_t wird wieder mit Hilfe der Mittelpunktsregel hergeleitet. Mit dem Vektor $\mathbf{u}^{(t)} := u^{(t)}(X) \in \mathbb{R}^{\tilde{m}d}$ und dem als konstant betrachteten Wert

$$\mathbf{k} := \mathbf{u}^{(t-1)}$$

sowie der Hilfsmatrix

$$\mathbf{G}_{d\tilde{m}} = \mathbf{1}_d^\top \otimes E_{\tilde{m}} \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times d\tilde{m}} \quad (3.6)$$

zur Summation der einzelnen Komponentenfunktionen ist dann eine Matrixschreibweise möglich. Diese Hilfsmatrix übernimmt die Funktion der vorher verwendeten Matrix \mathbf{M} , ohne allerdings zwischen Werten zu mitteln. Dadurch wird auch für das Iterationsschema, wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, Rotationsinvarianz sichergestellt.

Der zeitliche Regularisierer in einem Iterationsschritt ist damit durch

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \psi \left(\sum_{i=0}^{d-1} \left(\frac{\mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t)} - \mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t-1)}}{\tau} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \sum_{i=0}^{d-1} \left(\mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t)} - \mathbf{k}_{j+i\tilde{m}} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag}(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}) (\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}) \right) \end{aligned}$$

definiert. Für die Ableitungen des diskretisierten Regularisierers ergibt sich mit $\psi' :=$

$\psi' \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \right) \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} \nabla S_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \text{diag} \left(\psi' \right) \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \left(\psi' \right)^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \end{aligned}$$

für den Gradienten und mit $\psi'' := \psi'' \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \right) \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ sowie $\left(\psi' \right)^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) = \left(\text{diag} \left(\left(\psi' \right)^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \right) \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \right)^\top$ der Term

$$\begin{aligned} \nabla^2 S_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \left(\text{diag} \left(\left(\psi' \right)^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi'' \frac{2}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k} \right) \right) \end{aligned}$$

für die Hessematrix. Hierbei ist zu beachten, dass genau wie beim räumlichen Regularisierer die Hessematrix für eine Regularisierung mit Totalvariation exakt berechnet werden kann. Allerdings weist die exakte Formulierung, wie in Abschnitt 2.4.2 beschrieben, ungünstige Eigenschaften für eine numerische Optimierung auf, weshalb auch hier die Hessematrix mit

$$\nabla^2 S_t(\mathbf{u}^{(t)}) \approx \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \text{diag} \left(\left(\psi' \right)^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \right)$$

approximiert wird.

Bei der Vorwärtsiteration wird die Zielfunktion (3.4) für die Schritte $t = 1, \dots, T$ minimiert. Dies entspricht einer Bewegung des betrachteten Systems in Richtung des Pfeils, der in Abbildung 3.3 im farbig hinterlegten Bereich eingezeichnet ist. Die Iteration wird also vom Anfang der Bildsequenz in Richtung des letzten Bildes durchgeführt.

Für den ersten Schritt des Iterationsverfahrens ist $\mathbf{k} = \mathbf{u}^{(0)}$. Wird dieser Wert, wie vorher mit Neumann-Null-Randbedingungen als $\mathbf{u}^{(0)} := \mathbf{u}^{(1)}$ modelliert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S_t(\mathbf{u}^{(1)}) &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)} \right) \left(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)} \right) \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)} \right) \left(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(1)} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Zielfunktion des ersten Iterationsschritts entspricht also einer Registrierung ohne zeitliche Glattheit.

In den weiteren Schritten wird entsprechend (3.5) nur die Differenz zum vorherigen Deformationsfeld betrachtet, wodurch Informationen über die zeitliche Änderung der Deformation vom Anfang der Sequenz zum Ende transportiert werden, was dazu führt, dass das erste Deformationsfeld $u^{(1)}$ die Bewegung bestimmt, zu der alle folgenden Bewegungsfelder ähnlich sein sollen. Dies ist z.B. problematisch, wenn das erste Bewegungsfeld bereits Rauschen oder Störungen enthält, die nicht dem Verlauf der restlichen Sequenz entsprechen. Diese Störungen setzen sich dann in allen weiteren Bewegungsfeldern fort, weshalb

im nächsten Abschnitt eine analoge Iteration mit Vorwärtsdifferenzen formuliert wird.

Rückwärtsiteration

Das Deformationsfeld soll nicht nur zu seinem Vorgänger ähnlich sein, sondern auch zu seinem Nachfolger, und Informationen über den zeitlichen Verlauf der Deformation sollen auch vom Ende der Sequenz zu deren Anfang transportiert werden. Daher wird die Vorwärtsiteration um eine entsprechende Rückwärtsiteration ergänzt. Im Gegensatz zur Verschiebung des betrachteten Systems aus Abbildung 3.3 vom Anfang der Bildsequenz in Richtung deren Ende, wird dabei ein Schema betrachtet, das neben $u^{(t)}$ noch von $u^{(t+1)}$, also von späteren Werten der Bildsequenz abhängt. Dadurch ergibt sich eine Spiegelung der Rückwärtsiteration. Dies kehrt auch die Richtung der Iteration um, die nun vom Ende der Bildsequenz in Richtung deren Anfang stattfindet und schematisch in Abbildung 3.4 dargestellt ist.

Modelliert wird dieser Ansatz, indem der Rückwärtsdifferenzenquotient aus (3.5) durch einen Vorwärtsdifferenzenquotienten mit

$$\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t} \approx \frac{u_i^{(t+1)}(x) - u_i^{(t)}(x)}{\tau}, \quad i = 1, \dots, d$$

ersetzt wird. Entsprechend wird nun im Vergleich zur Vorwärtsiteration der Wert zum Zeitschritt $(t + 1)$ mit

$$\mathbf{k} := \mathbf{u}^{(t+1)}$$

als konstant betrachtet. Daraus ergibt sich dann

$$\begin{aligned} S_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \sum_{i=0}^{d-1} \left(\mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t+1)} - \mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t)} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{k} - \mathbf{u}^{(t)} \right) \left(\mathbf{k} - \mathbf{u}^{(t)} \right) \right) \end{aligned}$$

für die Diskretisierung des zeitlichen Regularisierers in Matrixschreibweise. In den Ableitungen heben sich die negativen Vorzeichen, die durch die Ableitung der Differenz $(\mathbf{k} - \mathbf{u}^{(t)})$ entstehen, auf, so dass deren Formulierung analog zur Vorwärtsiteration ist.

Vorwärts- und Rückwärtsiteration können nun nacheinander im Wechsel ausgeführt werden. Die während der Rückwärtsiteration im Schritt t benötigten Werte aus dem Zeitschritt $(t + 1)$ sind dann aus der vorangegangenen Vorwärtsiteration bereits bekannt. Als Ausgangswert für das zu optimierende Deformationsfeld $u^{(t)}$ wird für jeden Zeitschritt der Wert aus der vorherigen Iteration verwendet; ein Wert aus der Vorwärtsiteration wird im späteren Verlauf also durch die Rückwärtsiteration „korrigiert“ und umgekehrt.

Aus diesem Grund ist bei der Rückwärtsiteration auch eine Modellierung von Randbedingungen am Ende der Sequenz wie bei der Vorwärtsiteration in (3.7) nicht notwendig und der erste Schritt der Rückwärtsiteration zur Berechnung von $u^{(T)}$ muss übersprungen werden. Hier würde der zeitliche Regularisierer verschwinden und die Registrierung die

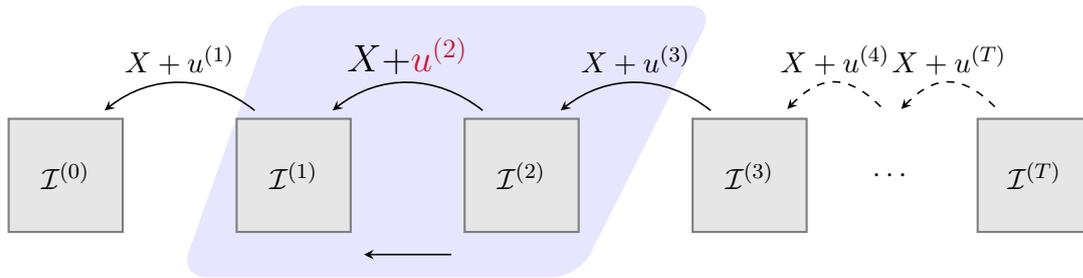


Abbildung 3.4: Iterationsschema Rückwärtsiteration

vorher ermittelten Bewegungsfelder nicht berücksichtigen, d.h. in jeder Iteration dasselbe Resultat liefern. Dies betrifft auch den ersten Schritt der Vorwärtsiteration. Sobald im allerersten Schritt des Algorithmus ein Startwert mit den Randbedingungen aus (3.7) bestimmt wurde, muss auch dieser Schritt in den folgenden Iterationen übersprungen werden, so dass der Wert $u^{(1)}$ nur in der Rückwärtsiteration und $u^{(T)}$ nur in der Vorwärtsiteration bestimmt wird.

Ein Problem, das hierbei entstehen kann, ist, dass Vorwärts- und Rückwärtsiteration gegen unterschiedliche Werte laufen und sich die „Korrekturen“ der beiden Iterationsrichtungen gegenseitig rückgängig machen. Dadurch werden die Abbruchkriterien nicht erreicht und das Verfahren terminiert nicht oder nur nach einer hohen Anzahl von Iterationen.

3.3.2 Symmetrischer Ansatz

Die unterschiedlichen Endwerte der Vorwärts- und Rückwärtsiteration können durch Verwendung eines symmetrischen Schemas, das die beiden Ansätze kombiniert, vermieden werden.

Während vorher die zeitlichen Ableitungen durch kurze Differenzen asymmetrisch um den jeweiligen Zeitschritt approximiert wurden, wird nun wie in (3.3) das Quadrat der zeitlichen Ableitung von $u^{(t)}$ durch

$$\left(\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t}\right)^2 \approx \frac{1}{2} \left(\left(\frac{u_i^{(t)}(x) - u_i^{(t-1)}(x)}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{u_i^{(t+1)}(x) - u_i^{(t)}(x)}{\tau}\right)^2 \right)$$

auf einem zeitlichen Cell-Centered-Gitter genau an den Punkten $t = 1, \dots, T$ diskretisiert. Im Vergleich zu den vorherigen Ansätzen bedeutet dies, dass ein weiterer als fest betrachteter Wert in das jeweilige System hinzukommt, was entsprechend in Abbildung 3.5 dargestellt ist. Für den zeitlichen Regularisierer ergibt sich dann mit

$$\mathbf{k}^{(-1)} := \mathbf{u}^{(t-1)}, \quad \mathbf{k}^{(1)} := \mathbf{u}^{(t+1)}$$

der Term

$$\begin{aligned}
 S_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \psi \left(\frac{1}{2\tau^2} \sum_{i=0}^{d-1} \left((\mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t)} - \mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t-1)})^2 + (\mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t+1)} - \mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t)})^2 \right) \right) \\
 &= \frac{\tilde{h}}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \psi \left(\frac{1}{2\tau^2} \sum_{i=0}^{d-1} \left((\mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t)} - \mathbf{k}_{j+i\tilde{m}}^{(-1)})^2 + (\mathbf{k}_{j+i\tilde{m}}^{(1)} - \mathbf{u}_{j+i\tilde{m}}^{(t)})^2 \right) \right) \\
 &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}^\top \psi \left(\frac{1}{2\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \left(\text{diag}(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)}) (\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \text{diag}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)}) (\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)}) \right) \right)
 \end{aligned}$$

für die symmetrische Diskretisierung. Für den Gradienten gilt dann mit der Abkürzung

$$\psi' := \psi' \left(\frac{1}{2\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \left((\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)})^2 + (\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)})^2 \right) \right)$$

die Formulierung

$$\begin{aligned}
 \nabla S_t &= \frac{\tilde{h}}{2\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \left(\text{diag}(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)}) - \text{diag}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)}) \right) \\
 &= \frac{\tilde{h}}{2\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag}(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)}) - \frac{\tilde{h}}{2\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)})
 \end{aligned}$$

und mit $\psi'' := \psi'' \left(\frac{1}{2\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \left((\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)})^2 + (\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)})^2 \right) \right)$ für die Hessematrix

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 S_t &= \frac{\tilde{h}}{2\tau^2} \left(\text{diag} \left((\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \right) + \text{diag}(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)}) \right. \\
 &\quad \left. \mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \text{diag}(\psi'') \frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \left(\text{diag}(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)}) - \text{diag}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)}) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\text{diag} \left((\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \right) + \text{diag}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)}) \right) \right. \\
 &\quad \left. \mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \text{diag}(\psi'') \frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \left(\text{diag}(\mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}^{(-1)}) - \text{diag}(\mathbf{k}^{(1)} - \mathbf{u}^{(t)}) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Durch Weglassen von Termen höherer Ordnung lässt sich $\nabla^2 S_t$ dann entsprechend Abschnitt 2.4.2 wieder als

$$\nabla^2 S_t \approx \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi' \right)$$

approximieren.

Die Randbedingungen in diesem Ansatz lassen sich analog zu (3.7) modellieren, ohne dass, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, Iterationsschritte am Rand übersprungen werden müssen. Durch die Formulierung des Regularisierers entspricht der symmetrische Term zum Zeitschritt $t = 1$ genau der Vorwärtsiteration und zum Zeitschritt $t = T$ genau der Rückwärtsiteration.

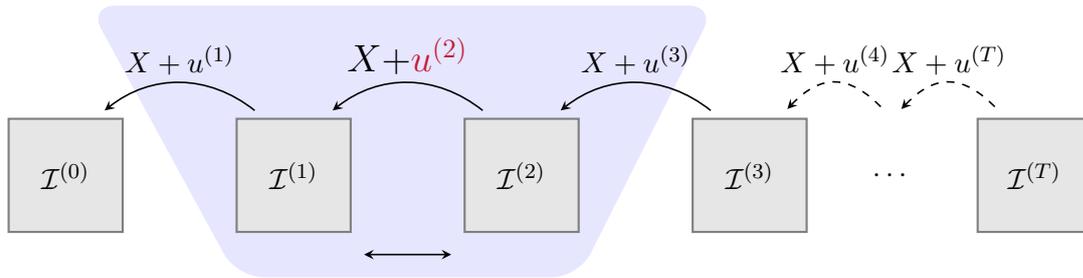


Abbildung 3.5: Iterationsschema symmetrisch

Obwohl die Iterationsrichtung aufgrund der Symmetrie nicht mehr vorgegeben ist, hat sie dennoch Auswirkungen auf das Ergebnis, da hierdurch auch die Reihenfolge der Optimierung der einzelnen Zielfunktionen bestimmt wird; diese Auswirkungen werden in Kapitel 4 untersucht

Anfangswerte

Der symmetrische Ansatz umgeht zwar das Problem der unterschiedlichen Endwerte von Vorwärts- bzw. Rückwärtsiteration, da nun keine bestimmte Iterationsrichtung mehr vorgegeben ist, dafür tritt jedoch ein neues Problem bei der Wahl des Startwerts auf. Vorher wurde das Iterationsschema mittels Randbedingungen so modelliert, dass der erste Wert $u^{(1)}$ direkt ermittelt werden kann und in weiteren Schritten immer ein Wert aus einem benachbarten Schritt verfügbar ist.

Bei dem symmetrischen Schema werden dagegen zwei benachbarte Werte benötigt, so dass am Anfang der Iteration mindestens einer dieser Werte unbekannt ist und als Startwert vorher festgelegt werden muss. Wählt man dafür den Ansatz $u^{(t)} = 0$, hat dies zur Folge, dass das berechnete Deformationsfeld zunächst kleinere Werte annimmt, da damit Ähnlichkeit zur Null-Deformation gefordert wird und daher mehr Schritte iteriert werden müssen.

Algorithmisch können die beschriebenen Probleme der beiden Ansätze durch die Verwendung eines hybriden Schemas umgangen werden. Zunächst werden für alle $u^{(t)}$ Anfangswerte mit einer Vorwärtsiteration oder jeweils einer Vorwärts- und Rückwärtsiteration bestimmt. Danach wird mit diesen Anfangswerten eine symmetrische Iteration durchgeführt. So tritt weder das Problem der alternierenden Endwerte noch das Problem der fehlenden Anfangswerte auf.

3.3.3 Reihenfolge der Iterationen

Bei den vorgestellten Iterationsverfahren finden im Wesentlichen zwei verschiedene Iterationen statt. Zum einen die Iteration zur Berechnung des zeitlichen Regularisierers über $t = 1, \dots, T$, zum anderen die Iteration des Netwon-Verfahrens aus Abschnitt 2.4, welche beide in folgendem Algorithmus dargestellt sind.

```
for  $k = 1 \rightarrow k_{\max}$  do  
  for  $t = 1 \rightarrow T$  do  
  
    if stop-conditions then  
      break  
    end if  
  
     $\mathbf{s}_{(k)}^{(t)} \leftarrow \text{solve} \left( \nabla^2 J(\varphi_{(k)}^{(t)}) \mathbf{s}_{(k)}^{(t)} = -\nabla J(\varphi_{(k)}^{(t)}) \right)$   
     $\mathbf{u}_{(k+1)}^{(t)} \leftarrow \mathbf{u}_{(k)}^{(t)} + \gamma \mathbf{s}_{(k)}^{(t)}$   
     $\varphi_{(k+1)}^{(t)} \leftarrow X + \mathbf{u}_{(k+1)}^{(t)}$   
  
  end for  
end for
```

Die Reihenfolge der Iterationen kann dabei vertauscht werden, d.h. entweder wird für alle Zeitschritte – wie dargestellt – jeweils nur ein Schritt des Optimierungsverfahrens durchgeführt, oder für jeden Zeitschritt das Minimum der Zielfunktion bis zur Erfüllung der Abbruchbedingungen gesucht; dabei wären die Iterationen im Algorithmus gegenüber der obigen Darstellung vertauscht.

Wird die globale Einhaltung zeitlicher Glattheit über die gesamte Bildsequenz betrachtet, so ist es sinnvoll, zunächst über alle Zeitschritte mit nur einem Optimierungsschritt zu iterieren, d.h. wie abgebildet für jeden Schritt k über alle $t = 1, \dots, T$. Dadurch wird das vorzeitige Annehmen lokaler Minima der einzelnen Deformationen verhindert, denn die Zielfunktion wird nur „grob“ minimiert. Die Optimierungsverfahren der einzelnen Zielfunktionen können so besser auf die sich mit jedem Iterationsschritt verändernden Minima des zeitlichen Regularisierers reagieren. Aus diesem Grund wird hier für die weitere Betrachtung dieser Ansatz gewählt.

Die Abbruchbedingungen werden für jeden Zeitschritt separat evaluiert. Der Algorithmus terminiert, wenn für alle Zeitschritte die Abbruchbedingungen erfüllt sind.

3.4 Interpolierter Lagrange-Ansatz

Ein Problem der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Ansätze ist die räumliche Betrachtung der Deformation nach einem sogenannten Euler-Ansatz [14]. Dabei handelt es sich um ein räumliches Bezugssystem. Es wird für alle Schritte stets derselbe feste Punkt im Raum betrachtet und der Regularisierer auf diesen angewandt. Deshalb ist es nicht möglich, die Bewegung von Objekten durch den Raum zu verfolgen, wodurch gleichförmige Bewegungen bestraft werden. Diese Situation ist an einem einfachen Beispiel in Abbildung 3.6 dargestellt.

Da die gleichförmige Bewegung eines Objektes, d.h. ohne Änderung von Betrag und Richtung jedoch mit dem Verständnis von zeitlicher Glattheit aus Abschnitt 3.2.2 übereinstimmt, werden in diesem Abschnitt Ansätze vorgestellt, die anstatt einer festen räumlichen Betrachtung im Euler'schen Sinne eine Lagrange-Sichtweise [14] modellieren. In der

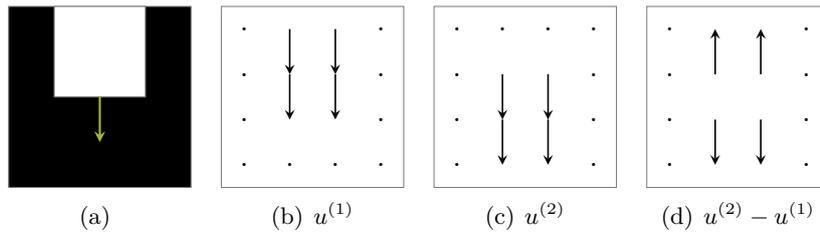


Abbildung 3.6: Vektorfelder gleichförmiger Abwärtsbewegung eines einzelnen Quadrats (a) zu zwei Zeitschritten (b) und (c), (d) Differenz von (b) und (c), die bei Euler-Betrachtung bestraft werden würde.

Lagrange-Sichtweise wird derselbe Punkt über die Zeit durch den Raum verfolgt, anstatt einen fixen Ort zu beobachten.

3.4.1 Iterativ

Ein Weg, die bisher betrachteten Algorithmen mit einer Lagrange-Sichtweise zu modellieren, ist das direkte Verfolgen eines Punktes durch Interpolation. Ist das Bewegungsfeld im ersten Schritt $u^{(1)}$, so muss das Bewegungsfeld im nächsten Schritt an der Stelle $x + u^{(1)}(x)$ ausgewertet werden; anstatt $u^{(t)}(x)$ wird also $u^{(t)}(x + u^{(t-1)}(x))$ betrachtet. Es wird dabei das Prinzip der Bildregistrierung von Template- und Referenzbild auf die Deformationsfelder angewandt. Dadurch wird schließlich die Bewegung kompensiert und dieselben Punkte liegen übereinander. Das macht es möglich, diese Bewegungsfelder wieder im vorher modellierten zeitlichen Regularisierer zu betrachten.

In Bezug auf die Vorwärts- und Rückwärtsiteration aus Abschnitt 3.3.1 ergeben sich zwei Fälle:

Vorwärtsiteration (Rückwärtsdifferenzen):

$$\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t} \approx \frac{u_i^{(t)}(x + u_i^{(t-1)}(x)) - u_i^{(t-1)}(x)}{\tau} = \frac{u_i^{(t)}(x + k_i(x)) - k_i(x)}{\tau}$$

Rückwärtsiteration (Vorwärtsdifferenzen):

$$\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t} \approx \frac{u_i^{(t+1)}(x + u_i^{(t)}(x)) - u_i^{(t)}(x)}{\tau} = \frac{k_i(x + u_i^{(t)}(x)) - u_i^{(t)}(x)}{\tau},$$

wobei k_i wieder das Deformationsfeld bezeichnet, das im jeweiligen Schritt als konstant angenommen wird. Das numerische Optimierungsverfahren liefert jedoch nur die diskreten Werte $\mathbf{u}^{(t)}$, daher muss Interpolation zur Auswertung der Bewegungsfelder an einem beliebigen Punkt verwendet werden.

Die Wahl der Interpolationsfunktion ist dabei kritisch. Je nach Fall müssen für die Optimierung der Zielfunktion verschiedene Ableitungen der Interpolationsfunktion bestimmt

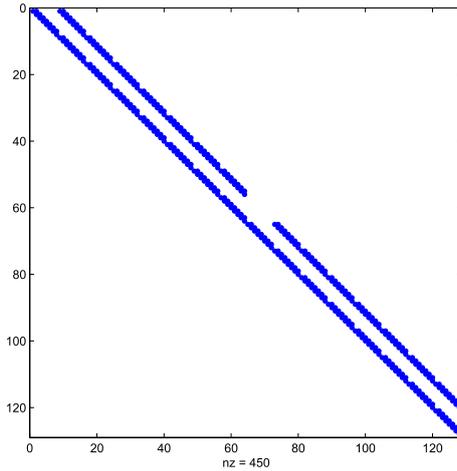


Abbildung 3.7: Matrix der Bi-Linearen Interpolation für ein Vektorfeld der Größe 8×8 mit Neumann-Randbedingungen

werden, nach dem Interpolationsort oder nach den zu interpolierenden Datenpunkten. Dies wird im Folgenden deutlich.

Vorwärtsiteration

Der diskretisierte Regularisierer der Vorwärtsiteration lässt sich mit den oben genannten Formulierungen als

$$\begin{aligned} S_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(u^{(t)}(X + \mathbf{k}) - \mathbf{k} \right) \left(u^{(t)}(X + \mathbf{k}) - \mathbf{k} \right) \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{k}) - \mathbf{k} \right) \left(I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{k}) - \mathbf{k} \right) \right), \end{aligned}$$

schreiben, wobei $I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{k})$ die Interpolante von $\mathbf{u}^{(t)}$ an der Stelle $X + \mathbf{k}$ bezeichnet. Für den Gradienten

$$\nabla S_t(\mathbf{u}^{(t)}) = \frac{\tilde{h}}{\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{k}) - \mathbf{k} \right) \frac{\partial I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{k})}{\partial \mathbf{u}^{(t)}} \quad (3.8)$$

muss also die Ableitung der Interpolante **nach den Datenpunkten** berechnet werden.

Bisher wurde in dieser Arbeit zur Interpolation von Bildern die in Abschnitt 2.1 genannte kubische B-Spline-Interpolation verwendet. Die Ableitung dieser Interpolationsfunktion nach den Datenpunkten gestaltet sich kompliziert, da dazu u.a. für jeden Summanden der Interpolationsfunktion das Inverse der Matrix zur Berechnung der Spline-Koeffizienten bekannt sein muss.

Eine einfachere Möglichkeit bietet sich bei der Verwendung von d -dimensionaler linearer Interpolation [15]. Der Wert des Deformationsfeldes $\mathbf{u}^{(t)}$ an einer beliebigen Stelle x wird

aus der gewichteten Summe seiner nächsten Nachbarn berechnet, was im zweidimensionalen Fall als

$$I(\mathbf{u}^{(t)}, x) = \kappa_k \mathbf{u}_k^{(t)} + \kappa_{k+1} \mathbf{u}_{k+1}^{(t)} + \kappa_{k+\tilde{m}} \mathbf{u}_{k+\tilde{m}}^{(t)} + \kappa_{k+\tilde{m}+1} \mathbf{u}_{k+\tilde{m}+1}^{(t)}$$

geschrieben werden kann. Die Werte κ werden dabei als Interpolations-Gewichte oder Koeffizienten bezeichnet und der Index k gibt die Gitterzelle an, in der der zu interpolierende Punkt x liegt.

Die lineare Interpolation an der Stelle $X + \mathbf{k}$ kann dann als

$$I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{k}) = \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})} \mathbf{u}^{(t)} \quad (3.9)$$

geschrieben werden, wobei $\mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})}$ eine Matrix mit den jeweiligen Interpolationskoeffizienten zur Interpolation an den Punkten $X + \mathbf{k}$ bezeichnet. Bei der zweidimensionalen Interpolation in einer Vierer-Nachbarschaft enthält jede Zeile der Matrix also maximal vier Nicht-Null-Einträge. Die Struktur einer solchen Matrix zur Interpolation der beiden Komponentenfunktionen $\mathbf{u}^{(t)} = (u_1^{(t)}(X), u_2^{(t)}(X))^\top$ ist in Abbildung 3.7 dargestellt.

Es gilt also mit der Abkürzung

$$\frac{\partial I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{k})}{\partial \mathbf{u}^{(t)}} = \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})}$$

eingesetzt in (3.8) für den Gradienten des zeitlichen Regularisierers

$$\nabla S_t(\mathbf{u}^{(t)}) = \frac{\tilde{h}}{\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag}(\mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})} \mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}) \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})}$$

und

$$\begin{aligned} \nabla^2 S_t &= \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})}^\top \text{diag}(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi') \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})} \\ &\quad + \frac{2\tilde{h}}{\tau^2} \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})}^\top \text{diag}(\mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})} \mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}) \mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \text{diag}(\psi'') \\ &\quad \quad \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag}(\mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})} \mathbf{u}^{(t)} - \mathbf{k}) \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})} \\ &\approx \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})}^\top \text{diag}(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi') \mathbf{I}_{(X+\mathbf{k})} \end{aligned}$$

für die Hessematrix. Mit der linearen Interpolation lassen sich die Vorwärtsiteration und deren Ableitungen also durch zusätzliche Matrixmultiplikationen mit der Interpolationsmatrix berechnen.

Rückwärtsiteration

Analog dazu kann für die Rückwärtsiteration

$$\begin{aligned} S_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{k} \left(X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - \mathbf{u}^{(t)} \right) \left(\mathbf{k} \left(X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - \mathbf{u}^{(t)} \right) \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - \mathbf{u}^{(t)} \right) \left(I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - \mathbf{u}^{(t)} \right) \right) \end{aligned}$$

und

$$\nabla S_t(\mathbf{u}^{(t)}) = \frac{\tilde{h}}{\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - \mathbf{u}^{(t)} \right) \left(\frac{\partial I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right)}{\partial (X + \mathbf{u}^{(t)})} - E_{d\tilde{m}} \right)$$

geschrieben werden. Hier tritt im Gegensatz zur Betrachtung im vorherigen Abschnitt die Ableitung der Interpolante nach dem Ort $(X + \mathbf{u}^{(t)})$ auf. Dies setzt voraus, dass die Interpolante differenzierbar ist, was bei der linearen Interpolation der Vorwärtsiteration nicht der Fall ist.

Daher wird hier als Interpolationsfunktion die kubische B-Spline-Interpolation gewählt, die aufgrund ihrer Differenzierbarkeit in allen Punkten schon bei der Interpolation der Templatebilder in Kapitel 2 verwendet wurde. Es gilt wie in Abschnitt 2.3.2

$$JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) = \frac{\partial I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right)}{\partial (X + \mathbf{u}^{(t)})}$$

für die Jacobimatrix der Interpolationsfunktion und damit

$$\nabla S_t(\mathbf{u}^{(t)}) = \frac{\tilde{h}}{\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - \mathbf{u}^{(t)} \right) \left(JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - E_{d\tilde{m}} \right)$$

für den Gradienten des zeitlichen Regularisierers. In der Hessematrix

$$\begin{aligned} \nabla^2 S_t(\mathbf{u}^{(t)}) &= \frac{2\tilde{h}}{\tau^2} \left(JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - E_{d\tilde{m}} \right)^\top \text{diag} \left(I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) \right) \mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \text{diag} (\psi'') \\ &\quad \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) \right) \left(JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - E_{d\tilde{m}} \right) \\ &\quad + \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \left(JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - E_{d\tilde{m}} \right)^\top \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi' \right) \left(JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - E_{d\tilde{m}} \right) \\ &\quad + \frac{\tilde{h}}{\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - \mathbf{u}^{(t)} \right) \frac{\partial^2 I \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right)}{\partial (X + \mathbf{u}^{(t)})^2} \end{aligned}$$

erscheinen zusätzlich zweite Ableitungen der Interpolationsfunktion. Daher wird wieder eine Approximation nach dem Gauß-Newton-Schema durch Vernachlässigen von Termen höherer Ordnung mit

$$\nabla^2 S_t(\mathbf{u}^{(t)}) \approx \frac{\tilde{h}}{\tau^2} \left(JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - E_{d\tilde{m}} \right)^\top \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi' \right) \left(JI \left(\mathbf{k}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) - E_{d\tilde{m}} \right)$$

verwendet. Dadurch, dass nicht nur die Terme wegfallen, die ψ'' enthalten, sondern auch die zweite Ableitung der Interpolationsfunktion, ist die Hessematrix dieses Ansatzes auch bei einer Modellierung mit ψ_{diffusiv} nicht mehr exakt.

Analog zu der hier aufgeführten Vorwärts- und Rückwärtsiteration kann natürlich auch ein symmetrisches Schema wie in 3.3.2 hergeleitet werden. Da dieses nur aus einer Kombination der bereits gezeigten Terme besteht, wird hier auf eine Formulierung verzichtet.

3.4.2 Gesamtsystem

Eine Lagrange-Sichtweise des zeitlichen Regularisierers ist für das Registrierungsproblem auch unabhängig von iterativen Schemata interessant, weshalb der Ansatz zusätzlich wie in Abschnitt 3.2.1 als Gesamtsystem modelliert wird. Hierbei ergibt sich die Schwierigkeit, dass im Vergleich zum vorherigen Abschnitt kein Teil der zeitlichen Ableitung als Konstante behandelt werden kann, sondern die vollständigen Terme mit

$$\left(\frac{\partial u_i^{(t)}(x)}{\partial t}\right)^2 \approx \frac{1}{2} \left(\left(\frac{u_i^{(t)}(x + u_i^{(t-1)}(x)) - u_i^{(t-1)}(x)}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{u_i^{(t+1)}(x + u_i^{(t)}(x)) - u_i^{(t)}(x)}{\tau} \right)^2 \right)$$

betrachtet werden müssen. Dabei ist es unerheblich, ob nur Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzen alleine oder ein symmetrisches Schema betrachtet wird. Bei der Lösung als Gesamtsystem sind die Gründe für einen asymmetrischen Ansatz, nämlich unbekannt benachbarte Werte, nicht gegeben, da alle Variablen gleichzeitig berechnet werden. Deshalb wird hier der vollständige symmetrische Ansatz modelliert.

Mit dem Vektor \mathbf{u}_t , wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben, der Deformationsfelder zu allen Zeitschritten enthält, wird der Regularisierer als

$$S_t(\mathbf{u}_t) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \sum_{t=1}^T \psi \left(\frac{1}{2} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \left(\left(\frac{I(\mathbf{u}^{(t)}, X + \mathbf{u}^{(t-1)}) - \mathbf{u}^{(t-1)}}{\tau} \right)^2 + \left(\frac{I(\mathbf{u}^{(t+1)}, X + \mathbf{u}^{(t)}) - \mathbf{u}^{(t)}}{\tau} \right)^2 \right) \right)$$

diskretisiert. Bestimmt man die Ableitung dieses Terms, muss jede Interpolationsfunktion sowohl nach dem Interpolationsort als auch nach den Datenpunkten abgeleitet werden. Die vorher ausgewählten Interpolationsarten lineare und kubische B-Spline-Interpolation sind daher problematisch, denn sie sind jeweils nach einem der beiden nicht oder nur schwierig differenzierbar.

Ein Lösungsansatz kann die sogenannte linear glatte Interpolation [20] sein, die in einer Umgebung um die Datenpunkte quadratisch und sonst linear interpoliert. Sie ist daher

überall nach dem Ort differenzierbar, gleichzeitig ist ihre Ableitung nach den Datenpunkten einfach zu bestimmen. In der Praxis konnte für kleine Umgebungen der quadratischen Interpolation kein Unterschied zu einer linearen Interpolation festgestellt werden, bei der die Ableitungen nach dem Interpolationsort an den Datenpunkten durch den Wert der Ableitung des jeweils nächsten Punktes mit niedrigerer Koordinate approximiert werden. Daher wird diese Interpolationsart verwendet.

Ableitungen in Matrixschreibweise

Im Gegensatz zur Diskretisierung des Gesamtansatzes aus 3.2.3 kommt im Regularisierer jedes $u^{(t)}$ jeweils ausgewertet an X sowie interpoliert an der Stelle $X + u^{(t-1)}$ vor, eine analoge Matrixschreibweise ist daher nicht möglich.

Um die Ableitung mit Vorwärtsdifferenzen in $S_t(\mathbf{u}_t)$ zu bestimmen, wird zunächst eine Hilfsmatrix

$$D_{+1} = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & 0 & \dots & 0 & 1 \\ & & & 1 & \dots & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 1 \end{matrix}}^{\tilde{m}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\tilde{m}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}T \times \tilde{m}T}$$

mit Einsen auf der $(\tilde{m} + 1)$ -ten Diagonale definiert, welche bei Multiplikation mit einem Vektor dessen Einträge um \tilde{m} Stellen nach vorne verschiebt. Diese Matrix wird zur Differenzenbildung zwischen benachbarten Zeitschritten benötigt. Die Einsen im letzten Teil der Hauptdiagonale führen zu einer Wiederholung der letzten \tilde{m} Einträge, was den vorher beschriebenen Neumann-Null-Randbedingungen mit Spiegelung der Werte an den Gebietsgrenzen entspricht. Mit dieser Hilfsmatrix kann dann

$$\mathbf{D}_{+1} = E_d \otimes D_{+1} \tag{3.10}$$

definiert werden. Die Matrix \mathbf{D}_{+1} verschiebt bei Multiplikation mit dem Vektor \mathbf{u}_t dessen Werte also um genau einen Zeitschritt nach vorne und berücksichtigt dabei mit dem Kroneckerprodukt die einzelnen Komponentenfunktionen.

Analog zu (3.10) kann für die Rückwärtsdifferenzen eine Matrix \mathbf{D}_{-1} definiert werden, die \mathbf{u}_t entsprechend um einen Zeitschritt nach hinten verschiebt.

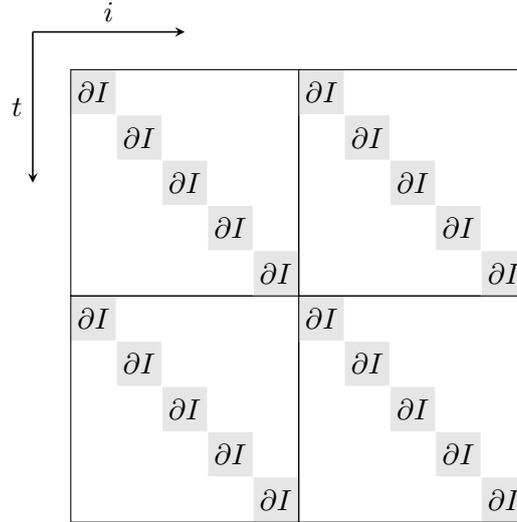


Abbildung 3.8: Blockmatrix-Struktur der Ableitungsmatrix für alle Zeitschritte mit $T = 5$ und $d = 2$

Die Interpolationsfunktion der linearen Interpolation kann wie in (3.9) als die Multiplikation der Datenpunkte mit einer Matrix $\mathbf{I}_{(X+\mathbf{u}^{(t)})}$ geschrieben werden, wobei die Matrix von den Orten abhängt, an denen die Interpolante ausgewertet werden soll. Mit der vorher verwendeten Schreibweise für eine Interpolationsfunktion gilt dann

$$\mathbf{I}_{(X+\mathbf{u}^{(t)})} \mathbf{u}^{(t+1)} = I(\mathbf{u}^{(t+1)}, X + \mathbf{u}^{(t)})$$

für die Interpolation von $\mathbf{u}^{(t+1)}$ an den Punkten $X + \mathbf{u}^{(t)}$. Die Matrix $\mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)}$ zur Interpolation aller Komponentenfunktionen zu allen Zeitschritten ist dann eine Blockdiagonalmatrix mit $(\mathbf{I}_{(X+\mathbf{u}^{(t)})})_{t=1, \dots, T}$ auf der Hauptdiagonale, d -mal wiederholt, also

$$\mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} := E_d \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(X+\mathbf{u}^{(1)})} & & & & \\ & \mathbf{I}_{(X+\mathbf{u}^{(2)})} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{I}_{(X+\mathbf{u}^{(T)})} \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Abkürzungen kann S_t als

$$S_t(\mathbf{u}_t) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}T}^\top \psi \left(\frac{1}{2\tau^2} \mathbf{G}_{d(\tilde{m}T)} \left(\text{diag} \left(\mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{u}_t - \mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t \right) \left(\mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{u}_t - \mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \text{diag} \left(\mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1}\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t \right) \left(\mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1}\mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t \right) \right) \right)$$

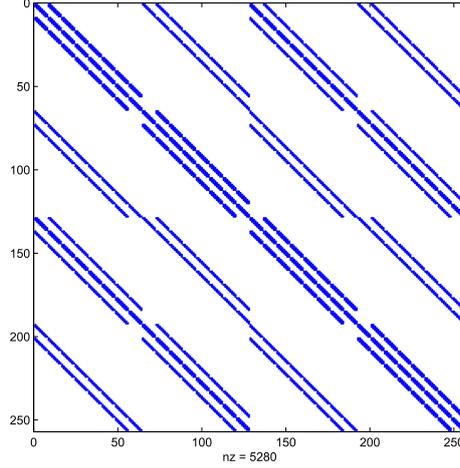


Abbildung 3.9: Hessematrix der Zielfunktion mit zeitlichem Regularisierer in interpolierter Lagrange-Sichtweise, Registrierung von Sequenzen der Größe 8×8 mit $T = 3$, also zwei Registrierungsproblemen

geschrieben werden und für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} \nabla S_t(\mathbf{u}_t) = & \frac{\tilde{h}}{2\tau^2} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d(\tilde{m}T)} \left(\text{diag} \left(\mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{u}_t - \mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{u}_t}{\partial (\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{-1} + \mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} - \mathbf{D}_{-1} \right) + \text{diag} \left(\mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{u}_t} + \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} - E_{\tilde{m}dT} \right) \right). \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{u}_t}$ steht dabei für die Matrix der Ableitungen nach dem Interpolationsort aller einzelnen Interpolationsfunktionen. Sie besteht aus den Jacobimatrizen der Interpolationsfunktionen der einzelnen Komponentenfunktionen und lässt sich, da jede Komponentenfunktion unabhängig von den anderen ist, auch in Blockdiagonalgestalt als

$$\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{u}_t} = \begin{pmatrix} \text{diag} \left(\left(\mathbf{J} \mathbf{I} \left(\mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_1^{(t)}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) \right)_{t=1, \dots, T} \right)_{i=1, \dots, d} \\ \vdots \\ \text{diag} \left(\left(\mathbf{J} \mathbf{I} \left(\mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_d^{(t)}, X + \mathbf{u}^{(t)} \right) \right)_{t=1, \dots, T} \right)_{i=1, \dots, d} \end{pmatrix}$$

schreiben. Der Index $i = 1, \dots, d$ baut dabei einen Zeilenvektor aus Matrizen auf. Es ist zu beachten, dass jede der einzelnen Ableitungen der Interpolationsfunktion selbst eine Matrix darstellt. Der Aufbau dieser Matrix ist zur Verdeutlichung in Abbildung 3.8 dargestellt. Da jede Komponentenfunktion von d Variablen abhängig ist, befinden sich in jeder Zeile der oben dargestellten Blockmatrix jedoch höchstens d Einträge.

Als Approximation der zweiten Ableitung ergibt sich mit der Produktregel

$$\begin{aligned} \nabla^2 S_t(\mathbf{u}_t) \approx & \frac{\tilde{h}}{2\tau^2} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{u}_t}{\partial (\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{-1} + \mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} - \mathbf{D}_{-1} \right)^\top \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d(\tilde{m}T)}^\top \psi' \right) \\ & \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{u}_t}{\partial (\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{-1} + \mathbf{I}_{(\mathbf{D}_{-1}\mathbf{u}_t)} - \mathbf{D}_{-1} \right) \\ & + \frac{\tilde{h}}{2\tau^2} \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{u}_t} + \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} - E_{\tilde{m}dT} \right)^\top \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d(\tilde{m}T)}^\top \psi' \right) \\ & \left(\frac{\partial \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} \mathbf{u}_t}{\partial \mathbf{u}_t} + \mathbf{I}_{(\mathbf{u}_t)} \mathbf{D}_{+1} - E_{\tilde{m}dT} \right), \end{aligned}$$

auch hier durch Weglassen aller Terme mit höheren Ableitungen.

Mit diesem Verfahren wurde ein Ansatz zur zeitlichen Regularisierung modelliert, der alle bisher geforderten Eigenschaften erfüllt. Durch die Lagrange-Betrachtung wird eine gleichförmige Bewegung nicht bestraft. Gleichzeitig kann dieser Ansatz sowohl als Gesamtsystem als auch mit iterativen Methoden formuliert werden und passt ins vorher gezeigte Registrierungschema.

Ein Problem dieses Ansatzes ist die Interpolation auf u . Das Berechnen der Ableitungen mit verschiedenen Interpolationsarten sorgt für zusätzliche Ungenauigkeiten und Komplexität, was auch beim Vergleich der Hessematrix der Zielfunktion in Abbildung 3.9 mit den vorherigen Modellierungen in Abbildung 3.2 deutlich wird. Die Hessematrix enthält aufgrund der Abhängigkeiten interpolierter und nicht interpolierter Funktionen zu verschiedenen Zeitschritten deutlich mehr Nicht-Null-Elemente, wodurch das Gleichungssystem aufwändiger zu lösen ist.

3.5 Direkter Lagrange-Ansatz

In diesem Abschnitt wird eine direkte Betrachtung der Lagrange-Sichtweise ohne Verwendung von Interpolation auf den Bewegungsfeldern vorgestellt. Dieser Ansatz vermeidet die im vorherigen Abschnitt formulierten Probleme, benötigt dafür jedoch eine Umformulierung des Registrierungsansatzes. Anstatt jedes Bild auf seinen zeitlichen Vorgänger zu registrieren, wird in jedem Schritt die Deformation in Bezug auf das erste Bild ermittelt. Dieser Ansatz ist schematisch in Abbildung 3.10 dargestellt. Um den Wechsel des Bezugssystems deutlich zu machen, werden die Transformationen und Deformationsfelder dieses Ansatzes mit $\hat{\varphi}$ und \hat{u} bezeichnet.

Entsprechend der Abbildung lassen sich aus den Gesamttransformationen $\hat{\varphi}^{(t)}$ durch finite Differenzen die Änderungen in Bezug auf die Vorgängertransformation als

$$\frac{\partial \hat{\varphi}^{(t)}(x)}{\partial t} \approx \frac{\hat{\varphi}^{(t)}(x) - \hat{\varphi}^{(t-1)}(x)}{\tau} = \frac{\hat{u}^{(t)}(x) - \hat{u}^{(t-1)}(x)}{\tau} = w^{(t)}(x)$$

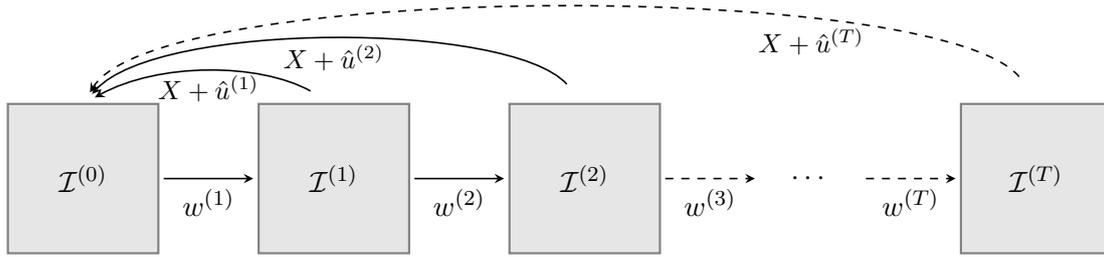


Abbildung 3.10: Registrierungsschema bei Verwendung des direkten Lagrange-Ansatzes, jedes Bild wird auf $\mathcal{I}^{(0)}$ registriert

definieren. Für die einzelnen Zeitschritte ergibt sich das Schema

$$\begin{aligned}
 w^{(1)}(x) &= \frac{x + \hat{u}^{(1)}(x) - x}{\tau} = \frac{\hat{u}^{(1)}(x)}{\tau} \\
 w^{(2)}(x) &= \frac{x + \hat{u}^{(2)}(x) - (x + \hat{u}^{(1)}(x))}{\tau} = \frac{\hat{u}^{(2)}(x) - \hat{u}^{(1)}(x)}{\tau} \\
 w^{(3)}(x) &= \frac{x + \hat{u}^{(3)}(x) - (x + \hat{u}^{(2)}(x))}{\tau} = \frac{\hat{u}^{(3)}(x) - \hat{u}^{(2)}(x)}{\tau} \\
 &\vdots \\
 w^{(T)}(x) &= \frac{x + \hat{u}^{(T)}(x) - (x + \hat{u}^{(T-1)}(x))}{\tau} = \frac{\hat{u}^{(T)}(x) - \hat{u}^{(T-1)}(x)}{\tau},
 \end{aligned}$$

womit sich durch Umformen $\hat{u}^{(t)}$ als Summe der einzelnen $w^{(t)}$

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{(1)}(x) &= \tau \left(w^{(1)}(x) \right) \\
 \hat{u}^{(2)}(x) &= \tau \left(w^{(1)}(x) + w^{(2)}(x) \right) \\
 \hat{u}^{(3)}(x) &= \tau \left(w^{(1)}(x) + w^{(2)}(x) + w^{(3)}(x) \right) \\
 &\vdots \\
 \hat{u}^{(T)}(x) &= \tau \left(\sum_{t=1}^T w^{(t)}(x) \right)
 \end{aligned}$$

schreiben lässt. Aus dieser Schreibweise wird deutlich, dass nun die Bewegung eines Punktes durch Summation der einzelnen $w^{(t)}$ über alle Zeitschritte direkt ohne Interpolation verfolgt werden kann, da diese Größen alle die Transformation auf $\mathcal{I}^{(0)}$ als Bezugssystem verwenden.

Für eine zeitliche Regularisierung der Bewegung nach bisherigem Schema wird die Ände-

rung der Deformationen zwischen den Zeitschritten bestimmt. Dafür werden mit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w^{(t)}(x)}{\partial t} &\approx \frac{w^{(t)}(x) - w^{(t-1)}(x)}{\tau} \\
 &= \frac{(\hat{u}^{(t)}(x) - \hat{u}^{(t-1)}(x)) - (\hat{u}^{(t-1)}(x) - \hat{u}^{(t-2)}(x))}{\tau^2} \\
 &= \frac{\hat{u}^{(t)}(x) - 2\hat{u}^{(t-1)}(x) + \hat{u}^{(t-2)}(x)}{\tau^2}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

die Ableitungen der Bewegungsfelder $w^{(t)}$ formuliert. Die Betrachtung der zeitlichen Ableitungen findet damit nicht mehr nach dem Euler-Ansatz an einem fixen Ort, sondern bezüglich desselben beweglichen Punktes statt. Anstatt die erste Ableitung der Deformation zu betrachten, wird aufgrund des Wechsels des Bezugssystems die zweite Ableitung des Bewegungsfeldes berechnet. Der Regularisierer kann hiermit im bekannten Schema als

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{S}}_t(\hat{u}^{(t)}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{\partial w_i^{(t)}(x)}{\partial t} \right)^2 \right) dx \\
 &\approx \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{w_i^{(t)}(x) - w_i^{(t-1)}(x)}{\tau} \right)^2 \right) dx \\
 &\approx \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\mathcal{R}}} \psi \left(\sum_{i=1}^d \left(\frac{\hat{u}_i^{(t)} - 2\hat{u}_i^{(t-1)} + \hat{u}_i^{(t-2)}}{\tau^2} \right)^2 \right) dx
 \end{aligned}$$

geschrieben werden. Dabei ist zu beachten, dass nun statt eines Wertes aus dem Zeitschritt $(t-1)$, wie vorher beim Euler-Ansatz mit Rückwärtsdifferenzen, zwei Werte aus den Zeitschritten $(t-2)$ und $(t-1)$ benötigt werden.

Entsprechend müssen die Randbedingungen modelliert werden, daher sind die Werte für Zeitschritte vor $t=1$ als

$$\hat{u}^{(0)} := \hat{u}^{(1)} \quad \text{und} \quad \hat{u}^{(-1)} := \hat{u}^{(1)}$$

definiert, denn damit gilt bei $t=1$ für w am Rand mit Neumann-Null-Randbedingungen

$$\frac{\partial w^{(1)}(x)}{\partial t} \approx \frac{\hat{u}^{(1)}(x) - 2\hat{u}_i^{(0)}(x) + \hat{u}^{(-1)}(x)}{\tau^2} = \frac{\hat{u}^{(1)}(x) - 2\hat{u}^{(1)}(x) + \hat{u}^{(1)}(x)}{\tau^2} = 0.$$

Diese Modellierung bedeutet jedoch für $t=2$

$$\frac{\partial w^{(2)}(x)}{\partial t} \approx \frac{\hat{u}^{(2)}(x) - \hat{u}^{(1)}(x)}{\tau^2} = w^{(2)}(x) \rightarrow \min,$$

anstatt der Ableitung von $w^{(2)}$ würde also der Wert selbst minimiert. Daher wird ent-

sprechend der vorherigen Definitionen für diesen Fall

$$\frac{\partial w^{(2)}(x)}{\partial t} \approx \frac{w^{(2)}(x) - w^{(1)}(x)}{\tau} = \frac{\hat{u}^{(2)}(x) - \hat{u}^{(1)}(x) - \hat{u}^{(1)}(x)}{\tau^2} = \frac{\hat{u}^{(2)}(x) - 2\hat{u}^{(1)}(x)}{\tau^2}$$

gewählt.

Die Modellierung der direkten Lagrange-Sichtweise muss für die Verwendung im Optimierungsalgorithmus diskretisiert werden. Dabei kann mit den oben definierten Größen auf die bereits in den vorherigen Abschnitten dieser Arbeit verwendete Art und Weise vorgegangen werden. Die Werte aus zurückliegenden Zeitschritten werden als konstant betrachtet mit

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^{(-1)} &:= \hat{\mathbf{u}}^{(t-1)} \\ \mathbf{k}^{(-2)} &:= \hat{\mathbf{u}}^{(t-2)}, \end{aligned}$$

woraus sich für die Diskretisierung des zeitlichen Regularisierers nach dem direkten Lagrange-Ansatz

$$\begin{aligned} \hat{S}_t(\hat{\mathbf{u}}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{2} \sum_{j=1}^{\tilde{m}} \psi \left(\frac{1}{\tau^4} \sum_{i=0}^{d-1} \left(\hat{\mathbf{u}}_{j+i\tilde{m}}^{(t)} - 2\mathbf{k}_{j+i\tilde{m}}^{(-1)} + \mathbf{k}_{j+i\tilde{m}}^{(-2)} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_{\tilde{m}}^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^4} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\hat{\mathbf{u}}^{(t)} - 2\mathbf{k}^{(-1)} + \mathbf{k}^{(-2)} \right) \left(\hat{\mathbf{u}}^{(t)} - 2\mathbf{k}^{(-1)} + \mathbf{k}^{(-2)} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ergibt. Analog zu vorher sind dann die Ableitungen mit

$$\begin{aligned} \nabla \hat{S}_t(\hat{\mathbf{u}}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{\tau^4} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\hat{\mathbf{u}}^{(t)} - 2\mathbf{k}^{(-1)} + \mathbf{k}^{(-2)} \right), \\ \nabla^2 \hat{S}_t(\hat{\mathbf{u}}^{(t)}) &= \frac{\tilde{h}}{\tau^4} \left(\text{diag} \left(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi' \right) + \text{diag} \left(\hat{\mathbf{u}}^{(t)} - 2\mathbf{k}^{(-1)} + \mathbf{k}^{(-2)} \right) \right. \\ &\quad \left. \mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \text{diag} (\psi'') \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \frac{2}{\tau^4} \text{diag} \left(\hat{\mathbf{u}}^{(t)} - 2\mathbf{k}^{(-1)} + \mathbf{k}^{(-2)} \right) \right) \\ &\approx \frac{\tilde{h}}{\tau^4} \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi' \right) \end{aligned}$$

definiert.

Besonders zu beachten ist bei diesem Ansatz die Gesamtdeformation. Da jedes Bild stets auf das erste Bild der Sequenz $\mathcal{I}^{(0)}$ registriert wird, kann die Deformation $\hat{u}^{(t)}$ abhängig vom Verlauf der Bildsequenz „groß“ werden. Dies ist problematisch, wenn die Deformation so groß ist, dass das Registrierungsverfahren diese Deformation nicht erreichen kann, z.B. wenn in einem Schritt t Objekte registriert werden sollen, die in Bild $\mathcal{I}^{(0)}$ und $\mathcal{I}^{(t)}$ nicht mehr überlappen. Bei den vorher betrachteten Ansätzen stellt dies kein Problem dar, da stets nur die Unterschiede zwischen zwei aufeinanderfolgenden Bildern betrachtet werden.

Dieses Problem kann umgangen werden, indem für die Registrierung im Schritt t die Transformation $\hat{\varphi}^{(t-1)}$ aus dem vorherigen Zeitschritt als Startwert verwendet wird und

so wieder nur die Differenz der beiden aufeinanderfolgenden Zeitschritte ermittelt werden muss. Nachteil dieses Ansatzes ist jedoch, dass durch Verwenden der Deformation aus dem vorherigen Schritt $\hat{\varphi}^{(t-1)}$ alle Werte, die in eventuellen vorherigen Iterationen für $\hat{\varphi}^{(t)}$ ermittelt wurden, verworfen werden müssen. Daher ist diese Modellierung nur für eine Reihenfolge der Iterationen geeignet, bei der für jeden Zeitschritt immer alle Iterationen des Optimierungsverfahrens durchgeführt werden. Wie in Abschnitt 3.3.3 beschrieben, ist dieses Verfahren ungeeignet für eine Verwendung mit einem iterativen zeitlichen Regularisierer und auch eine Rückwärtsiteration kann damit nicht sinnvoll formuliert werden. Daher wird hier auf den Startwert verzichtet. Die Auswirkungen dieser Entscheidung werden im nächsten Kapitel anhand von Beispielen genauer analysiert. Sie ermöglicht es jedoch nun zusätzlich zur oben modellierten Vorwärtsiteration entsprechend eine Rückwärtsiteration mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^{(t)}(x)}{\partial t} &\approx \frac{w^{(t+1)}(x) - w^{(t)}(x)}{\tau} \\ &= \frac{\hat{u}^{(t+1)}(x) - 2\hat{u}^{(t)}(x) + \hat{u}^{(t-1)}(x)}{\tau^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

zu formulieren. Der entstandene Term ist symmetrisch um $\hat{u}^{(t)}$ aufgebaut, was durch die Definition von $w^{(t)}(x) = \frac{1}{\tau}(\hat{u}^{(t)}(x) - \hat{u}^{(t-1)}(x))$ als Differenz der Transformation zwischen zwei Zeitschritten begründet ist. Eine Modellierung von $w^{(t)}$ als Vorwärtsdifferenz hätte zwar einen zu (3.11) analogen Term mit Abhängigkeiten von zwei zukünftigen Zeitschritten zur Folge, würde aber lediglich die Bedeutung von $w^{(t)}$ um einen Zeitschritt verschieben. Dieser Ansatz ist daher hier nicht sinnvoll und für die Rückwärtsiteration wird (3.13) verwendet.

Durch die symmetrische Differenz weichen auch die Ableitungen des Regularisierers vom bisher formulierten Schema ab. Für die Diskretisierung ist analog zu (3.12) zunächst

$$\hat{S}_t(\hat{\mathbf{u}}^{(t)}) = \frac{\tilde{h}}{2} \mathbf{1}_m^\top \psi \left(\frac{1}{\tau^4} \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{k}^{(1)} - 2\hat{\mathbf{u}}^{(t)} + \mathbf{k}^{(-1)} \right) \left(\mathbf{k}^{(1)} - 2\hat{\mathbf{u}}^{(t)} + \mathbf{k}^{(-1)} \right) \right),$$

woraus dann für die Ableitungen

$$\begin{aligned} \nabla \hat{S}_t(\hat{\mathbf{u}}^{(t)}) &= -\frac{2\tilde{h}}{\tau^4} (\psi')^\top \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \text{diag} \left(\mathbf{k}^{(1)} - 2\hat{\mathbf{u}}^{(t)} + \mathbf{k}^{(-1)} \right), \\ \nabla^2 \hat{S}_t(\hat{\mathbf{u}}^{(t)}) &= -\frac{2\tilde{h}}{\tau^4} \left(-2 \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi' \right) - \text{diag} \left(\mathbf{k}^{(1)} - 2\hat{\mathbf{u}}^{(t)} + \mathbf{k}^{(-1)} \right) \right. \\ &\quad \left. \mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \text{diag} \left(\psi'' \right) \mathbf{G}_{d\tilde{m}} \frac{4}{\tau^4} \text{diag} \left(\mathbf{k}^{(1)} - 2\hat{\mathbf{u}}^{(t)} + \mathbf{k}^{(-1)} \right) \right) \\ &\approx \frac{4\tilde{h}}{\tau^4} \text{diag} \left(\mathbf{G}_{d\tilde{m}}^\top \psi' \right) \end{aligned}$$

folgt. Mit diesen Termen lässt sich ebenfalls wieder eine symmetrische Iteration aufstellen.

Diese Modellierung des Registrierungsverfahrens mit einem direkten Lagrange-Ansatz zeigt eine weitere Möglichkeit auf, eine zeitliche Regularisierung zu nutzen. Im Gegensatz zu den vorherigen Ansätzen wird hier ein Registrierungschema verwendet, das jedes Bild

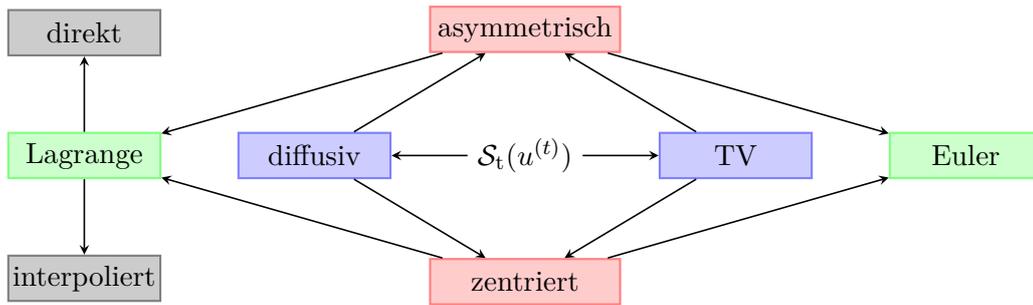


Abbildung 3.11: Verschiedene Regularisierer-Optionen des iterativen Schemas

auf das erste Bild der Sequenz registriert. Dadurch ist es möglich, die Bewegung einzelner Punkte direkt und ohne Interpolation in einer Lagrange-Sichtweise zu verfolgen. Dieser Ansatz erfüllt also genau wie der interpolierte Lagrange-Ansatz die Anforderung, dass gleichförmige Bewegung nicht bestraft wird. Eine Lagrange-Betrachtung der Punktbe-
wegung kann hier jedoch ohne Interpolation auf den Bewegungsfeldern erfolgen.

3.6 Fazit

In diesem Kapitel wurde das klassische Registrierungsproblem mit zwei Bildern auf die Registrierung von Bildsequenzen erweitert. Diese Registrierung der Sequenz ist zunächst als Gesamt-Zielfunktion formuliert worden. Zusätzlich dazu wurde das Konzept eines zeitlichen Regularisierers aufgestellt und in das bestehende Schema integriert. Der dabei entstehende hohe Aufwand zum Lösen des Gesamt-Gleichungssystems bot einen Anlass iterative Schemata zu entwickeln, die das Sequenz-Registrierungsproblem mit zeitlicher Regularisierung lösen.

Hierbei wurde das Gleichungssystem in mehrere Untersysteme unterteilt, die sequentiell minimiert werden. Ausgehend von verschiedenen Möglichkeiten zur Diskretisierung fand zunächst eine Modellierung asymmetrischer Iterationsverfahren sowie eines Verfahrens mit zentrierten Differenzen statt, wobei auf verschiedene Probleme der Modellierung eingegangen worden ist. Es wurde festgestellt, dass beim asymmetrischen Schema in Form von Vorwärts- und Rückwärtsiteration das Erreichen eines gemeinsamen Endwerts in beiden Iterationen problematisch ist, bei dem symmetrischen Ansatz mit zentrierten Differenzen dagegen der Startwert für längere Laufzeiten des Algorithmus sorgen kann. Als Lösungsansatz folgte die Formulierung eines hybriden Schemas, bei dem die Vorwärts- und Rückwärtsiteration Startwerte für das symmetrische Schema erzeugen.

Zusätzlich zur iterativen Unterteilung des Gleichungssystems wurden zwei verschiedene Ansätze zur Betrachtung der zeitlichen Regularisierung der Deformationsfelder in Lagrange-Sichtweise entwickelt. Diese haben die Eigenschaft, dass eine gleichförmige Bewegung vom Regularisierer nicht bestraft wird. Im ersten Ansatz wurde diese Betrachtung nach Lagrange durch Kompensierung der Punktbe-
wegung zwischen zwei Bewegungsfeldern mittels Interpolation modelliert, zu Vergleichszwecken ist diese neue Betrachtungsweise zusätzlich für ein Gesamt-Gleichungssystem aufgestellt worden. Dieser Ansatz ist

verträglich mit dem vorher aufgestellten Schema und lässt sich leicht darin integrieren. Dies hat jedoch den Nachteil einer hohen Komplexität durch verschiedene Interpolationsschemata und damit eines dichter besetzten Gleichungssystems. Daher ist in einem zweiten Ansatz durch Umformulierung des Registrierungsschemas eine direkte Lagrange-Betrachtung aufgestellt worden, bei der jedes Bild auf das erste Bild der Sequenz registriert und so durch Differenzenbildung eine direkte Lagrange-Betrachtung der Deformation ermöglicht wird.

Aus diesen Ansätzen ergeben sich verschiedene Kombinationen von Modellierungen und Eigenschaften eines zeitlichen Regularisierers, die anhand eines Diagramms in Abbildung 3.11 dargestellt sind und deren Verhalten bei einer Registrierung von Bildsequenzen im nächsten Kapitel mit Hilfe von Beispielen analysiert wird.

4 Ergebnisse und Evaluation

In diesem Kapitel werden die entwickelten Methoden in diskretisierter Form und unter Verwendung der beschriebenen numerischen Optimierungsverfahren anhand von akademischen Beispielen auf ihre theoretisch entwickelten Eigenschaften überprüft und evaluiert. Anschließend werden die Registrierungsverfahren auf klinische Daten angewandt, um die Eignung in der Praxis zu beurteilen.

Die entwickelten Algorithmen wurden mit Hilfe der aufgestellten Matrixschreibweise in MATLAB implementiert. Die Lösung des Gleichungssystems des Newton-Verfahrens findet dabei mit dem Backslash-Operator statt und die benötigten Parameter α und β werden manuell gewählt. Die Bilder werden vor der Registrierung mit einem diskreten Gauß-Kern mit Standardabweichung $\sigma = 1$ geglättet, um unerwünschte hohe Frequenzen zu eliminieren.

4.1 Iterationsverfahren

Zunächst werden die grundlegenden Eigenschaften des zeitlichen Regularisierers überprüft. Dies geschieht mit Hilfe einer einfachen Sequenz, die in Abbildung 4.1 dargestellt ist und mit *Testsequenz 1* bezeichnet wird. Die Sequenz zeigt ein weißes Quadrat auf schwarzem Hintergrund, das sich in sechs Zeitschritten gleichförmig mit einer Geschwindigkeit von zwei Pixeln pro Zeitschritt abwärtsbewegt. Um unerwünschte Effekte wie eine Bewegung des gesamten Hintergrundes oder nur der Kanten des Quadrates zu vermeiden, wurden Quadrat und Hintergrund mit einer Textur, erzeugt durch gleichverteiltes Rauschen, belegt.

Damit eine Verwendung des zeitlichen Regularisierers im Vergleich zur Registrierung ohne zeitlichen Term sinnvoll ist, wird eine Situation getestet, in der eine Abweichung von der gleichförmigen Bewegung vorliegt. In Testsequenz 1 wurde daher im ersten Bild eine Verschiebung des Quadrats um zwei Pixel nach rechts eingefügt, die eine Störung der



Abbildung 4.1: Testsequenz 1 mit gleichförmiger Abwärtsbewegung eines texturierten Quadrats mit $T = 5, m_1 = m_2 = 64$, Reihenfolge von links nach rechts, im ersten Bild ist eine Störung in Form einer Verschiebung nach links eingefügt

Aufnahme simulieren soll. Diese wurde am Anfang der Sequenz eingefügt, da so anhand dieses Beispiels ebenfalls die Wirkung der Rückwärtsiteration geprüft werden kann, was später deutlich wird.

Als erster Test wurde zur Referenz eine Registrierung der Sequenz ohne zeitlichen Regularisierer durchgeführt. Als räumlicher Regularisierer wurde Totalvariation verwendet, um die Kanten des Quadrats gut abbilden zu können.

Für die Darstellung der Testergebnisse sind die resultierenden Vektorfelder für die einzelnen Komponentenfunktionen getrennt als farbige Bilder dargestellt. Die Farbe codiert dabei entsprechend der Legende die Stärke der Deformation in die jeweilige Richtung. Die Bewegungsfelder des Ergebnisses sind in Abbildung 4.2(a) dargestellt, wobei für einen Zeitschritt jeweils die Vektorfelder $u_1^{(t)}$ und $u_2^{(t)}$ nebeneinander dargestellt sind. Die verschiedenen Zeitschritte sind von oben nach unten in der Reihenfolge $t = 1, \dots, 5$ vertikal angeordnet.

In $u_2^{(1)}$ ist die eingebrachte Störung deutlich erkennbar, in den anderen Bewegungsfeldern ist wie erwartet keine Bewegung in x_2 -Richtung zu sehen.

In Abbildung 4.2(b) und 4.2(c) ist das Ergebnis einer Registrierung wie oben, jedoch zusätzlich mit zeitlichem diffusiven Regularisierer, für verschiedene Iterationsschemata abgebildet.

Zunächst wurde ein iteratives Schema mit einer Vorwärtsiteration verwendet, wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben. Hier lässt sich erkennen, dass zur Modellierung der zeitlichen Glattheit nur der vorangegangene Zeitschritt berücksichtigt wird. Daraus resultiert eine Projektion der Störung auf die folgenden Bewegungsfelder, obwohl diese Bewegung dort nicht mehr vorhanden ist, was jeweils in $u_2^{(t)}$, $t = 2, \dots, 5$ deutlich sichtbar wird.

Eine Vorwärts- und Rückwärtsiteration wurde in Abbildung 4.2(c) durchgeführt. Gut zu erkennen ist, dass die Störung aus $u_2^{(1)}$ fast vollständig verschwunden und nur die Bewegung des Quadrats in vertikaler Richtung vorhanden ist. Zusätzlich ist zu beobachten, dass aufgrund der Euler-Betrachtungsweise der Deformation das Bewegungsfeld eine länglichere Form angenommen hat. Diese deckt die Bewegung des Quadrates über alle Zeitschritte ab, da das Deformationsfeld mit jedem Zeitschritt verschoben werden müsste, was jedoch entsprechend dem Beispiel in Abbildung 3.6 bestraft wird. Daher wird eine gemeinsame Deformation aller Zeitschritte ermittelt.

Diese Ergebnisse belegen zunächst die Funktion des zeitlichen Regularisierers. Es ist möglich, Bedingungen an den zeitlichen Verlauf zu stellen, die auch im Test nachvollzogen werden können und im Falle einer Störung wie in Testsequenz 1 sinnvoll sind. Gleichzeitig wird am Beispiel die Notwendigkeit einer Iteration in beide Richtungen, also Vorwärts- und Rückwärtsiteration, belegt, da sonst Störungen zu Beginn der Bildsequenz auf den restlichen Bewegungsverlauf projiziert werden.

In Abbildung 4.3 sind, ebenfalls für Testsequenz 1, Registrierungsergebnisse mit dem symmetrischen und hybriden Schema aus Abschnitt 3.3.2 sowie als Referenz mit der Modellierung als Gesamtsystem aus Abschnitt 3.2.1 abgebildet. Bei der Registrierung mit dem symmetrischen Schema lässt sich eine starke Ähnlichkeit der Form der Bewegungsfelder zu den Bewegungsfeldern der Vorwärts-/Rückwärtsiteration aus Abbildung

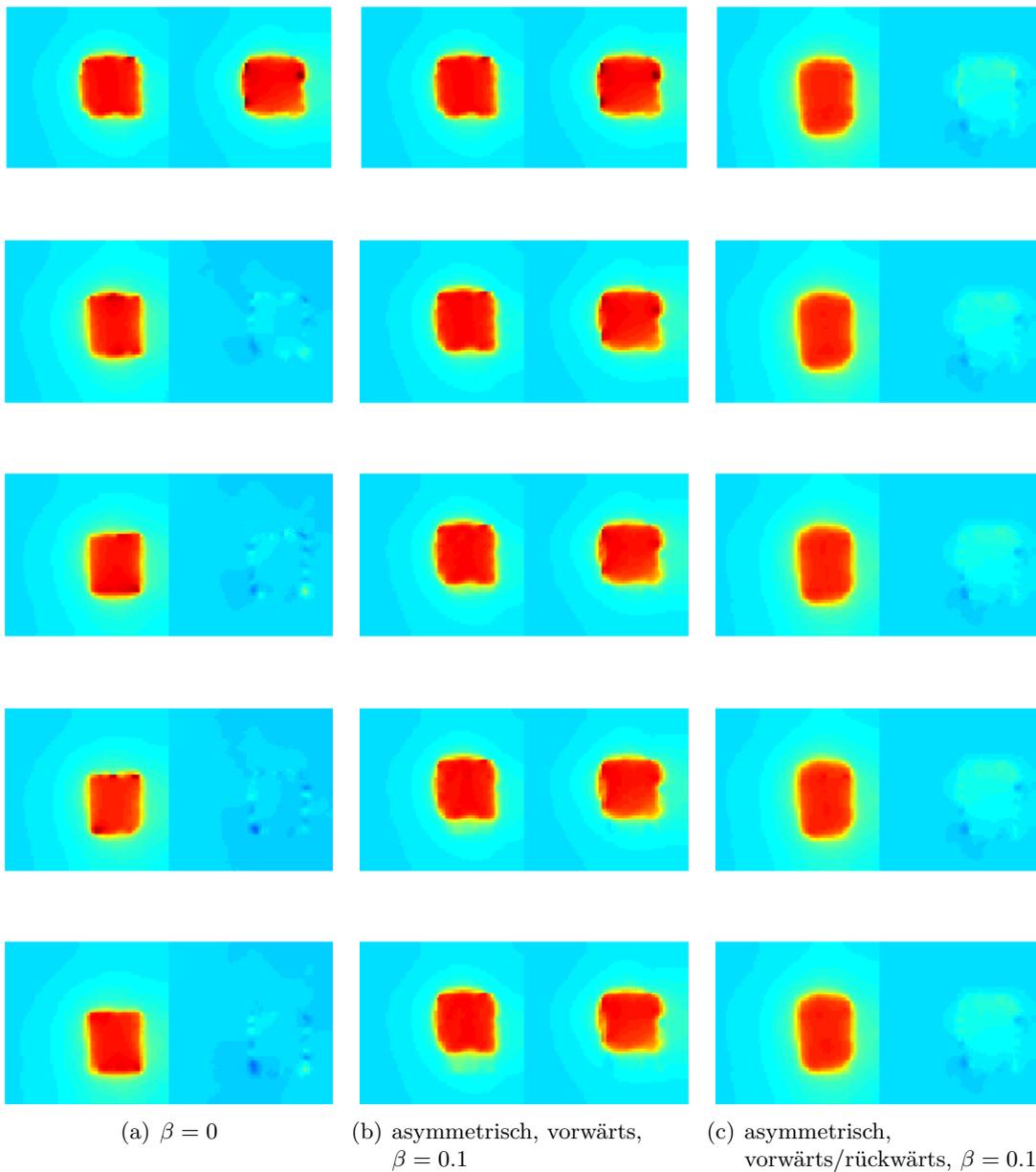


Abbildung 4.2: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 1, Regularisierung räumlich mit Totalvariation und $\alpha = 0.004$, zeitlich diffusiv, verschiedene Zeitschritte vertikal von $t = 1$ (oberste Zeile) bis $t = 5$ (unterste Zeile) angeordnet, die Vektorfelder $u_1^{(t)}$ und $u_2^{(t)}$ sind für jeden Schritt separat nebeneinander dargestellt

4.2(c) feststellen, was aufgrund der Modellierung aus den Einzeltermen des asymmetrischen Schemas auch plausibel ist. Zusätzlich werden jedoch bei dem symmetrischen und hybriden Iterationsschema die Abbruchkriterien erreicht. Das asymmetrische Verfahren dagegen erreicht selbst bei einer hohen maximalen Iterationsanzahl von $k_{\max} = 500$ die Abbruchkriterien nicht und terminiert nach Erreichen von k_{\max} . Die Resultate des hybriden Ansatzes sind nahezu identisch mit denen des symmetrischen Schemas, wobei der hybride Ansatz wie erwartet eine geringere Iterationsanzahl des Optimierungsverfahrens bis zum Erreichen der Abbruchkriterien benötigt. Eine Vermeidung lokaler Minima durch den im Vergleich zum symmetrischen Schema verbesserten Startwert ist in diesem Beispiel jedoch nicht zu beobachten.

Auch bei dem symmetrischen Schema lassen sich trotz einer Verwendung von Deformationsfeldern aus vorherigen und nachfolgenden Zeitschritten unterschiedliche Iterationsreihenfolgen festlegen. Genau wie bei den asymmetrischen Ansätzen kann entweder stets vom Anfang zum Ende iteriert oder, am Ende angekommen, in umgekehrter Reihenfolge zum Anfang iteriert werden. Obwohl sich in der Reihenfolge für den Regularisierer selbst kein Unterschied ergibt, sind dennoch Differenzen in den Ergebnissen sichtbar, die in Tabelle 4.1 dargestellt sind. Dies ist vor allem durch die unterschiedliche Reihenfolge der Minimierung der einzelnen Zielfunktionen begründet. Zu erkennen ist, dass die symmetrischen und hybriden Testfälle mit Vorwärts-/Rückwärts-Richtung mehr Iterationsschritte benötigen. Dafür liefern diese Verfahren Ergebnisse, deren Maxima des Deformationsfeldes näher an der wirklichen Verschiebung des Quadrats liegen.

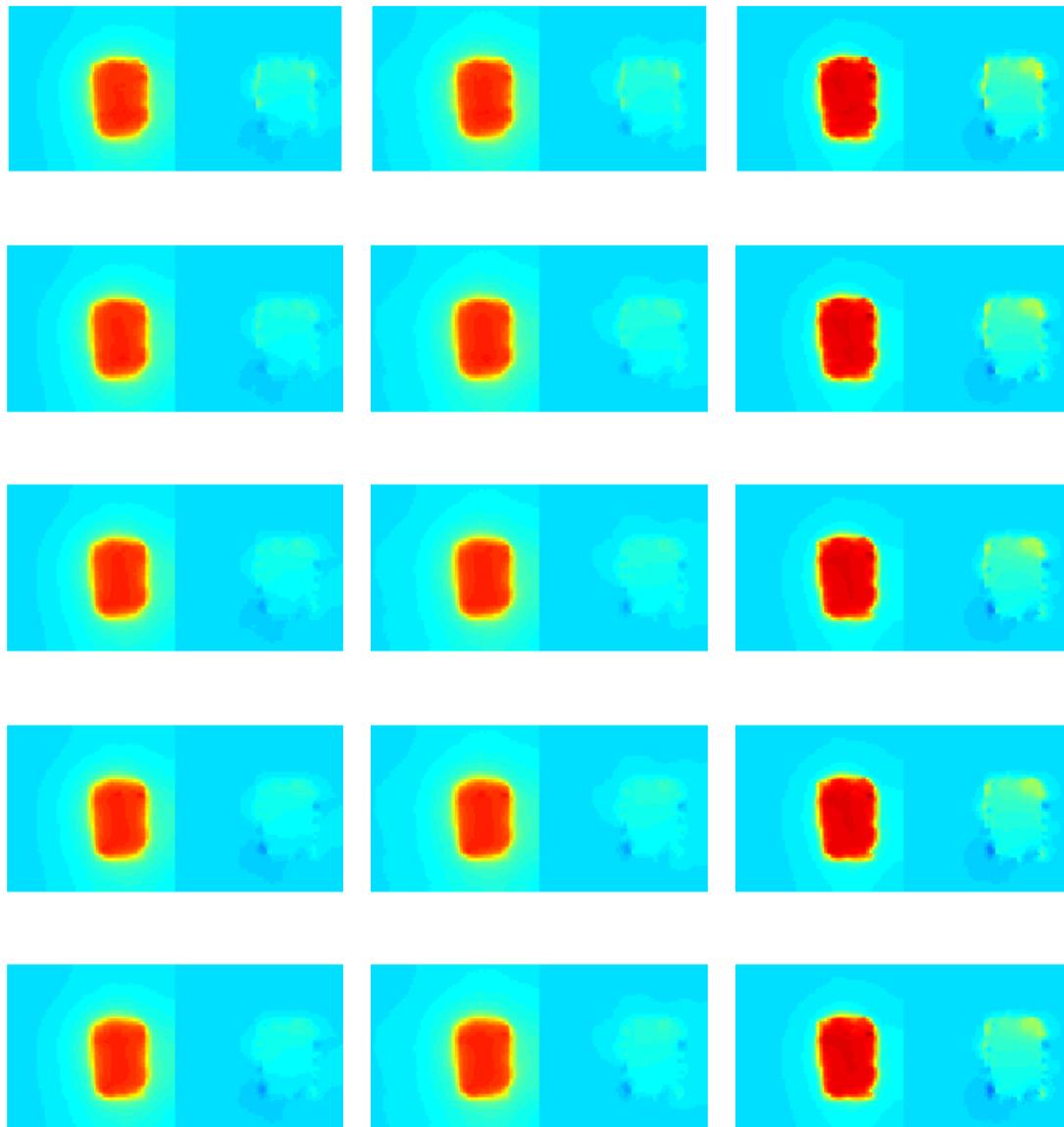
Als Referenzergebnis sind in Abbildung 4.3(c) die Deformationsfelder der Registrierung mit zeitlichem Regularisierer als Gesamtsystem dargestellt. Hiermit kann überprüft werden, wie ähnlich die Ergebnisse der iterativen Ansätze zu diesem Schema sind und damit wie gut sich die Lösung des Gesamtsystems durch ein iteratives Schema approximieren lässt. Im Vergleich zu den Ergebnissen in Abbildung 4.2, 4.3(a) und 4.3(b) fällt der Betrag des Bewegungsfeldes größer aus. Verglichen mit der Geschwindigkeit des Quadrats von zwei Pixeln pro Zeitschritt erreicht dieser Ansatz mit einer maximalen Deformation von $\max(\mathbf{u}_t) = 2.01$ am ehesten die abgebildete Transformation. Abgesehen davon ist die äußere Form der Bewegungsfelder der iterativen Ansätze der Form der Bewegungsfelder des Gesamtansatzes jedoch sehr ähnlich, so dass die Vorwärts-/Rückwärtsiteration aus Abbildung 4.2(c) aufgrund des größten maximalen Betrags des Deformationsfeldes unter den iterativen Verfahren die besten Resultate liefert.

4.2 Lagrange-Ansatz

Die Bilder aus Testsequenz 1 lassen sich auch nutzen, um daran die Funktionsweise der Lagrange-Betrachtung zu überprüfen. Dies hat den Vorteil, dass die Ergebnisse mit denen der vorher getesteten Verfahren verglichen werden können.

4.2.1 Interpolierter Lagrange-Ansatz

Wie in Abschnitt 4.1 bereits erwähnt, wird bei einer Euler-Betrachtung des zeitlichen Regularisierers eine gemeinsame Deformation aller Zeitschritte ermittelt, da eine Ver-



(a) symmetrisch,
vorwärts/rückwärts, $\beta = 0.1$

(b) hybrid, vorwärts/rückwärts,
 $\beta = 0.1$

(c) Gesamtsystem, $\beta = 0.1$

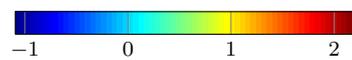


Abbildung 4.3: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 1, Regularisierung räumlich mit Totalvariation und $\alpha = 0.004$, zeitlich diffusiv, Aufteilung wie Abbildung 4.2

| Iterationsschema | β | vorwärts/rückwärts | k | $\max(\mathbf{u}_t)$ | $\min(\mathbf{u}_t)$ |
|------------------|---------|--------------------|------------|----------------------|----------------------|
| Gesamtsystem | 0.0 | v | 17 | 2.22 | -0.39 |
| asymm. | 0.1 | v | 18 | 2.22 | 0.02 |
| asymm. | 0.1 | v/r | k_{\max} | 1.76 | -0.20 |
| symm. | 0.1 | v | 162 | 1.71 | -0.23 |
| symm. | 0.1 | v/r | 210 | 1.74 | -0.22 |
| hybrid | 0.1 | v | 144 | 1.72 | -0.19 |
| hybrid | 0.1 | v/r | 202 | 1.75 | -0.20 |
| asymm. Lagrange | 0.1 | v/r | k_{\max} | 2.07 | -1.09 |
| symm. Lagrange | 0.1 | v/r | 224 | 1.77 | -0.14 |
| hybrid Lagrange | 0.1 | v/r | 180 | 1.77 | -0.13 |
| Gesamtsystem | 0.1 | – | 30 | 2.01 | -0.35 |
| Ges. Lagrange | 0.1 | – | 36 | 1.79 | -0.21 |

Tabelle 4.1: Numerische Ergebnisse für Testsequenz 1 mit S : TV, $\alpha = 0.004$, S_t : diffusiv, $k_{\max} = 500$

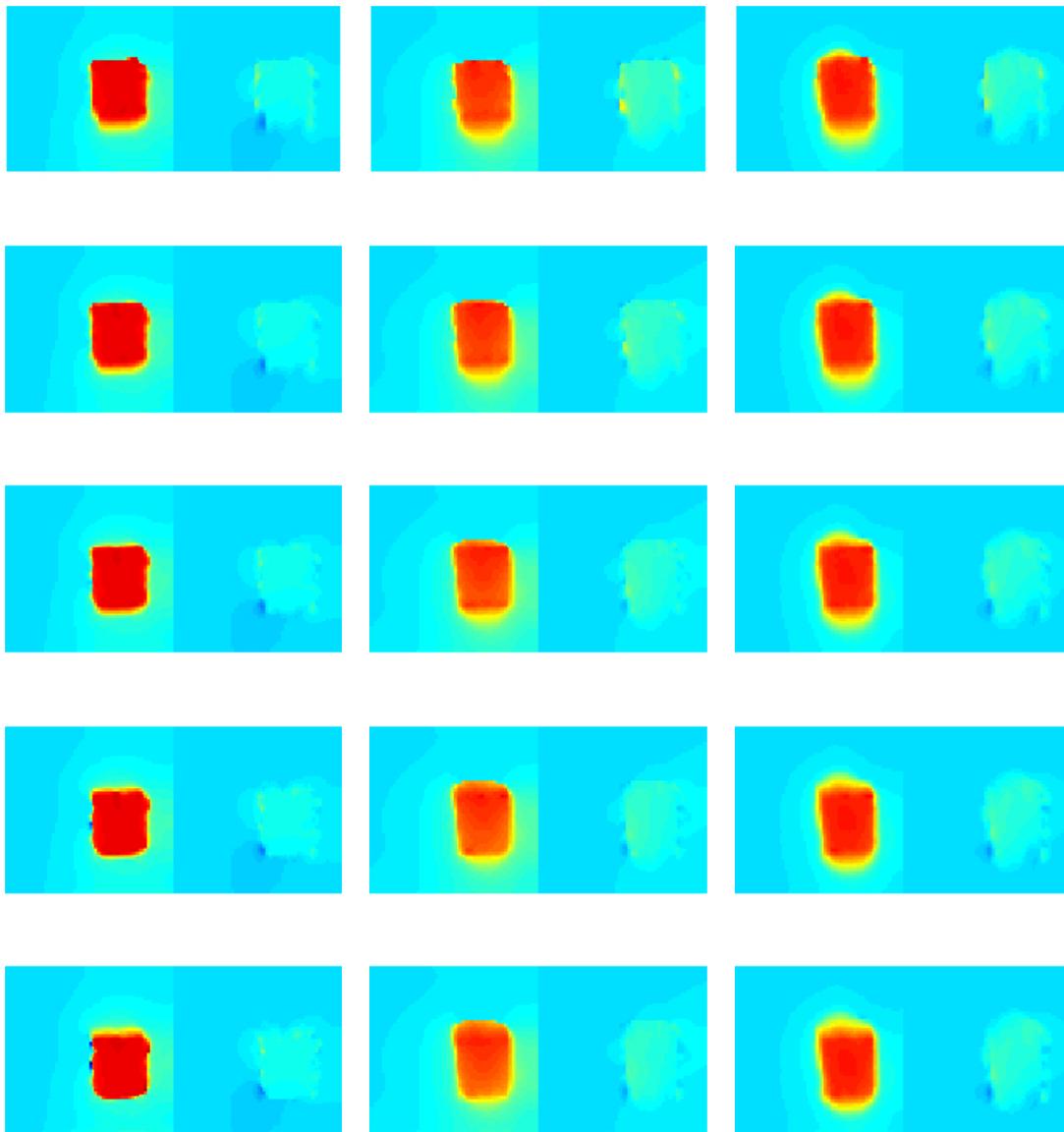
schiebung des Bewegungsfeldes bestraft wird. Es lassen sich die Ergebnisse der Iteration mit Euler-Sichtweise aus Abbildung 4.2(c), 4.3(a) und 4.3(b) nun mit den Resultaten der interpolierten Lagrange-Betrachtung aus Abschnitt 3.4.1 vergleichen. Dabei werden für die Tests dieselben Iterationsschemata verwendet wie beim Euler-Ansatz. Die Resultate der Tests sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Erkennbar ist, dass nun auch das Deformationsfeld in Richtung des Quadrates bewegt wird und daher in der Form ähnlicher zu den Bewegungsfeldern ohne zeitliche Regularisierung aus Abbildung 4.2(a) ist. Diese Bewegung lässt sich anhand des Differenzbildes von Abbildung 4.2(c) und 4.4(a), d.h. je einer Registrierung mit Euler- und Lagrange-Sichtweise, dargestellt in Abbildung 4.5, nachvollziehen. Dadurch, dass diese Bewegung des Deformationsfeldes nun zulässig ist, fällt auch das Maximum höher aus als bei der Euler-Betrachtung. So ergibt sich beispielsweise bei Verwendung des asymmetrischen Schemas für die Lagrange-Betrachtung nach Tabelle 4.1 ein Maximum von $\max(\mathbf{u}_t) = 2.07$ gegenüber einem Wert von $\max(\mathbf{u}_t) = 1.76$ beim Euler-Ansatz.

Bei Betrachtung der Resultate weiterer Tests in Tabelle 4.1 zeigt sich erneut das Problem der Abbruchkriterien. Vorwärts- und Rückwärtsiteration streben gegen unterschiedliche Werte und das asymmetrische Schema terminiert nur durch Erreichen der maximalen Iterationsanzahl. Die Ergebnisse des symmetrischen Ansatzes, der die Abbruchkriterien erfüllt, weisen dagegen eine geringere maximale Stärke des Deformationsfeldes auf.

Als Referenz ist in Abbildung 4.4(c) das Ergebnis der Registrierung als Gesamtansatz mit interpolierter Lagrange-Sichtweise aus Abschnitt 3.4.2 gezeigt. Im Vergleich mit den iterativen Verfahren ist hier in Betrag und Form eine deutliche Ähnlichkeit erkennbar.

4.2.2 Direkter Lagrange-Ansatz

Das direkte Lagrange-Schema nimmt aufgrund seines Algorithmus, der jedes Bild auf $\mathcal{I}^{(0)}$ registriert, eine Sonderstellung ein. Da die Deformationen nicht zwischen den einzelnen Bildern der Sequenz, sondern in Bezug auf das erste Sequenzbild ermittelt werden, lassen



(a) asymmetrisch,
vorwärts/rückwärts, $\beta = 0.1$

(b) hybrid, vorwärts/rückwärts,
 $\beta = 0.1$

(c) Gesamtsystem, $\beta = 0.1$



Abbildung 4.4: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 1, Regularisierung räumlich mit Totalvariation und $\alpha = 0.004$, zeitlich diffusiv mit interpolierter Lagrange-Sichtweise, Aufteilung wie Abbildung 4.2

sich die Resultate dieses Ansatzes nicht ohne Weiteres mit den vorherigen Ergebnissen vergleichen. Zusätzlich zeigt Testsequenz 1 aufgrund der Störung in Bild $\mathcal{I}^{(0)}$, auf das alle Bilder registriert werden, andere als die bisher betrachteten Effekte. Um einen Vergleich mit den vorherigen Resultaten zu ermöglichen, wird daher hier eine weitere Testsequenz, *Testsequenz 2* genannt, verwendet. Bei dieser wurde die Störung nicht in $\mathcal{I}^{(0)}$, sondern in $\mathcal{I}^{(1)}$ eingebracht. Ansonsten sind die beiden Sequenzen identisch. Die neue Testsequenz erzeugt bei der Registrierung mit dem direkten Lagrange-Ansatz ein Erscheinungsbild, das mit den vorherigen Ergebnissen vergleichbar ist, wie anhand der folgenden Testfälle deutlich wird.

Zusätzlich werden anstatt der Deformationsfelder $\hat{u}^{(t)}$ die Differenzen $w^{(t)}$ gezeigt. Bei deren Darstellung als Farbbilder ergibt sich das Problem, dass diese Vektorfelder – entsprechend der Lagrange-Sichtweise – nicht auf einem regelmäßigen Gitter gegeben sind. Zu Visualisierungszwecken werden die Differenzen $w^{(t)}$ daher an äquidistanten Stellen linear interpoliert, wodurch eine zu den vorherigen Testfällen vergleichbare Darstellung erreicht wird. Dieser Interpolationsschritt kann in der praktischen Anwendung natürlich je nach Aufgabenstellung entfallen.

Um die Problematik des direkten Lagrange-Ansatzes bei zu großen Bewegungen im Verlauf der Sequenz zu veranschaulichen, sind in Abbildung 4.6(a) und 4.6(b) Ergebnisse einer Registrierung ohne Verwendung eines Startwerts aus dem vorherigen Schritt und eine Registrierung mit diesem Startwert abgebildet. Zur Nutzung des Startwerts wurde, wie in Abschnitt 3.5 beschrieben, umgekehrt zu der sonst verwendeten Iterationsreihenfolge für jeden Zeitschritt zuerst das vollständige Optimierungsverfahren und dann die Iteration über die Zeit durchgeführt. Zu erkennen ist, dass die Deformation der Testsequenz in den letzten beiden Zeitschritten so groß ist, dass sie ohne Startwert nicht erreicht werden kann.

Nun wird ein Iterationsverfahren mit der normalen Iterationsreihenfolge und mit zeitlichem Regularisierer verwendet, dessen Resultate in Abbildung 4.7 gezeigt sind. Bei diesem Schema kann ein Startwert aus dem vorherigen Schritt nicht verwendet werden. Es ist zu erkennen, dass die Deformation auch für die beiden letzten Bilder der Sequenzen gute Werte liefert. Die Verwendung von zeitlicher Glattheit sorgt also nicht nur für eine gleichförmige Bewegung über die Zeit, sie ermöglicht auch eine Registrierung von großen Bewegungen mit iterativen Ansätzen.

Im Vergleich von Abbildung 4.7(a) und 4.7(b) bestätigen sich die vorherigen Beobachtungen bezüglich der Iterationsrichtung. Wird nur eine Vorwärtsiteration verwendet, kommt es zu einer Projektion des Bewegungsfeldes des ersten Schritts auf alle folgenden. Bei Verwendung der Vorwärts- und Rückwärtsiteration ist die Störung im Bewegungsfeld dagegen fast nicht mehr erkennbar.

4.3 Zeitliche Regularisierung mit Totalvariation

Die bisher gezeigten Ergebnisse wurden zeitlich mit einem diffusiven Ansatz regularisiert. Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben, kann in Sequenzen mit einer Umkehr der Bewegungsrichtung eine Modellierung des zeitlichen Regularisierers mit Totalvariation sinnvoll sein.

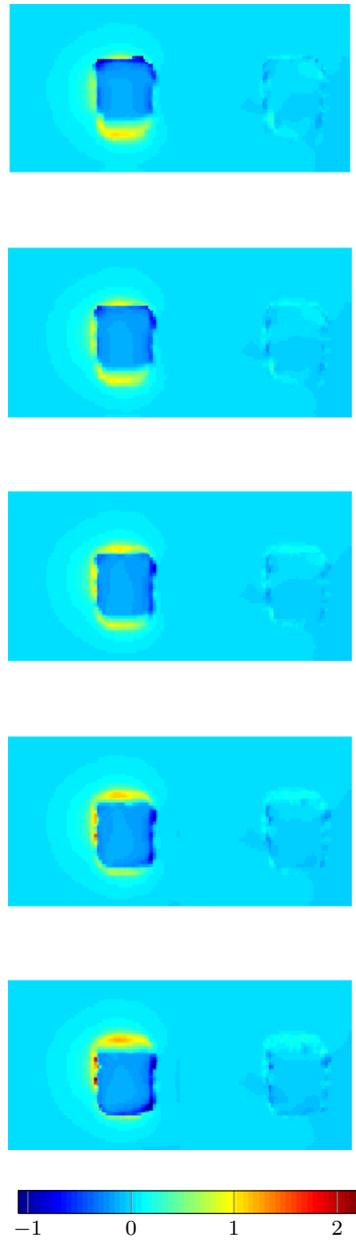


Abbildung 4.5: Differenzbild von Abbildung 4.2(c) und 4.4(a), Aufteilung wie Abbildung 4.2

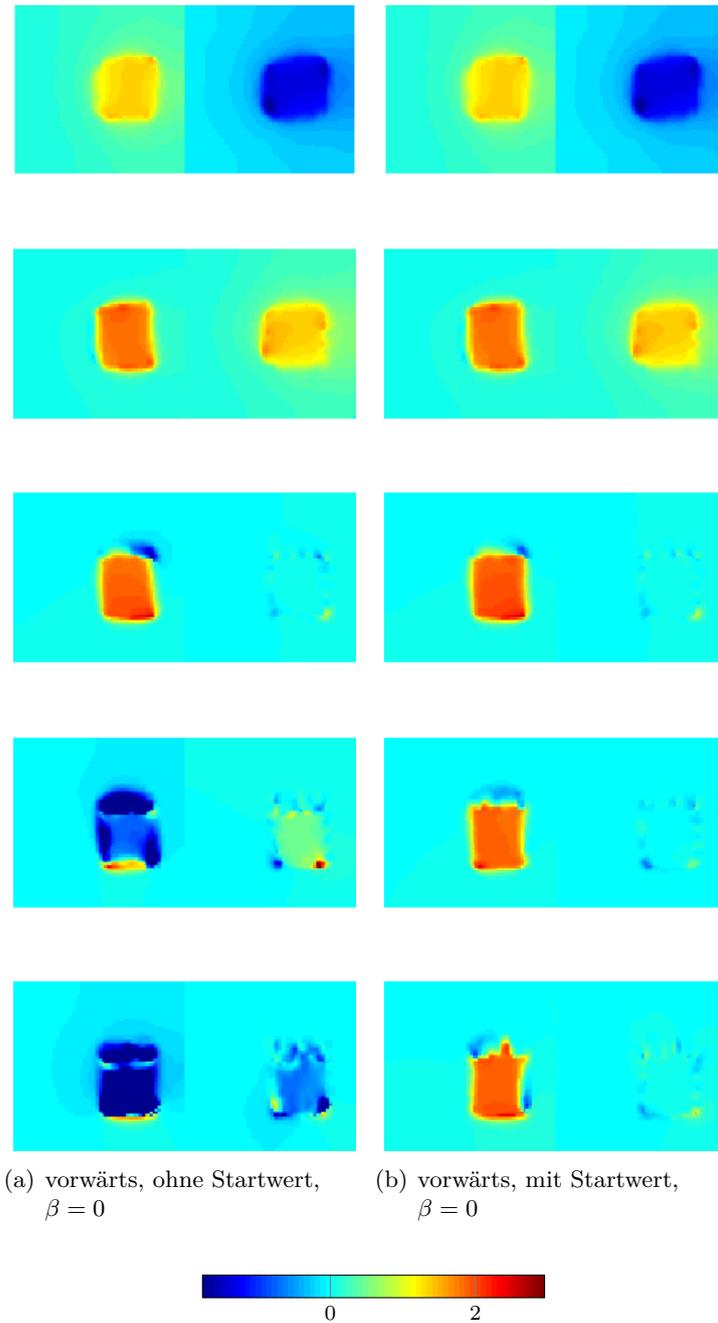


Abbildung 4.6: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 2, Regularisierung räumlich mit Totalvariation und $\alpha = 0.01$, zeitlich ohne Regularisierung, Registrierungsmodell wie bei direktem Lagrange-Ansatz, Aufteilung wie Abbildung 4.2

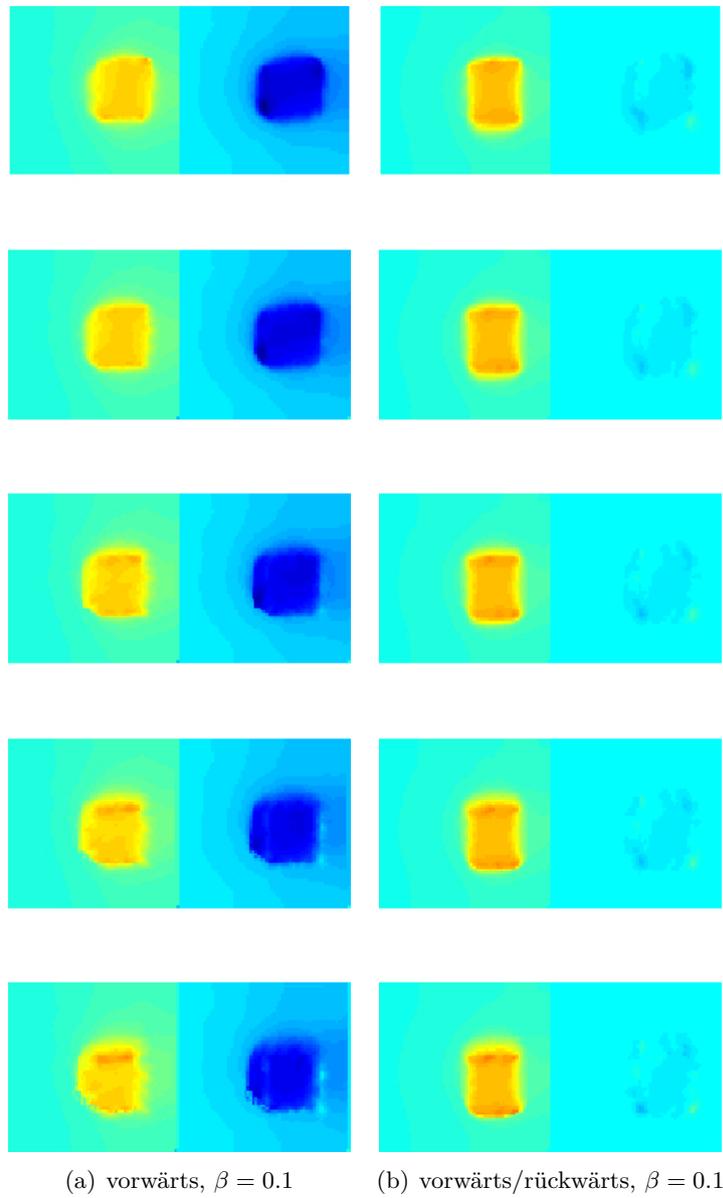


Abbildung 4.7: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 2, Regularisierung räumlich mit Totalvariation und $\alpha = 0.01$, zeitlich diffusiv mit direktem Lagrange-Ansatz, Aufteilung wie Abbildung 4.2.

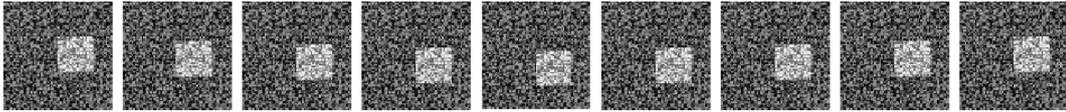


Abbildung 4.8: Testsequenz 3, gleichförmige Abwärts- und anschließende Aufwärtsbewegung eines texturierten Quadrats mit $T = 8$, $m_1 = m_2 = 64$, Reihenfolge von links nach rechts. Im zweiten Bild ist eine Störung in Form einer Verschiebung nach links eingefügt.

Zur Simulation einer solchen Situation wird die bisherige Testsequenz erweitert und zeigt nun neben der Abwärtsbewegung des Quadrats und der Störung im zweiten Bild eine Umkehr der Bewegungsrichtung und anschließende Aufwärtsbewegung. Die mit *Testsequenz 3* bezeichnete Bildfolge ist in Abbildung 4.8 gezeigt. Zunächst sind Ergebnisse ohne zeitliche Regularisierung, mit zeitlich diffusiver Regularisierung und zeitlicher Regularisierung mit Totalvariation unter Verwendung eines asymmetrischen Schemas in Abbildung 4.9 gezeigt. In Abbildung 4.9(a) ist ohne zeitliche Regularisierung die Umkehr der Bewegung ab $t = 5$ sowie die Störung im zweiten Bild, die eine negative Bewegung in $u_2^{(1)}$ sowie eine positive Bewegung in $u_2^{(2)}$ verursacht, zu erkennen. Durch zeitliche Regularisierung soll nun die Bewegung in u_2 , die durch die Störung verursacht wurde, verschwinden. Die scharfe Umkehr der Bewegungsrichtung soll jedoch erhalten bleiben.

In Abbildung 4.9(b) und 4.9(c) sind Ergebnisse von Registrierungen mit zeitlicher Regularisierung unter der Verwendung des diffusiven und des Totalvariationsansatzes dargestellt. Das erste Bild zeigt, dass die Störung bei diffusiver Regularisierung deutlich geringer ausfällt als ohne zeitliche Regularisierung. Zusätzlich wird die Umkehr der Bewegungsrichtung aber nicht korrekt wiedergegeben. Die Bewegung vor und nach der Umkehr wird abgeschwächt, so dass ein glatterer Übergang stattfindet. Das zweite Bild mit einem zeitlich TV-regularisierten Ansatz zeigt dagegen die beiden gewünschten Eigenschaften. Die Störung wurde in ähnlichem Umfang wie beim diffusiven Ansatz verringert, gleichzeitig die Bewegungsumkehr jedoch erhalten. In diesem Beispiel zeigt sich, dass eine Regularisierung mit Totalvariation nicht nur räumlich in der Lage ist, scharfe Kanten zuzulassen, sondern dass sich dieses Prinzip auch auf die plötzliche Bewegungsumkehr übertragen lässt, die mit einer Lungenbewegung in Abschnitt 3.2.2 motiviert wurde. Die gleichen Effekte treten bei einer Registrierung mit symmetrischem und hybridem Schema sowie bei der Verwendung des interpolierten Lagrange-Ansatzes auf. Aufgrund der starken Ähnlichkeit der Ergebnisse zu den bereits dargestellten, werden die Bewegungsfelder hier nicht gezeigt. In Tabelle 4.2 ist jedoch die Anzahl der benötigten Iterationen für verschiedene Iterationsschemata und zeitliche Regularisierer angegeben. Es ist zu erkennen, dass, obwohl wie oben aufgeführt bessere Resultate erzielt werden können, eine Regularisierung mit Totalvariation mehr Iterationsschritte benötigt als eine diffusive Regularisierung.

Der Regularisierungsparameter β wurde im Vergleich zu Testsequenz 1 von 0.1 auf 0.002 verringert, um eine Umkehr der Bewegung zu erlauben, was gleichzeitig in einer weniger starken Reduktion der Störung resultiert. Der Parameter kann also dazu genutzt werden, einen Kompromiss zwischen den beiden gewünschten Eigenschaften zu finden.

Die bisher gezeigten Ergebnisse gelten für alle Regularisierer, die ein Sequenzbild auf

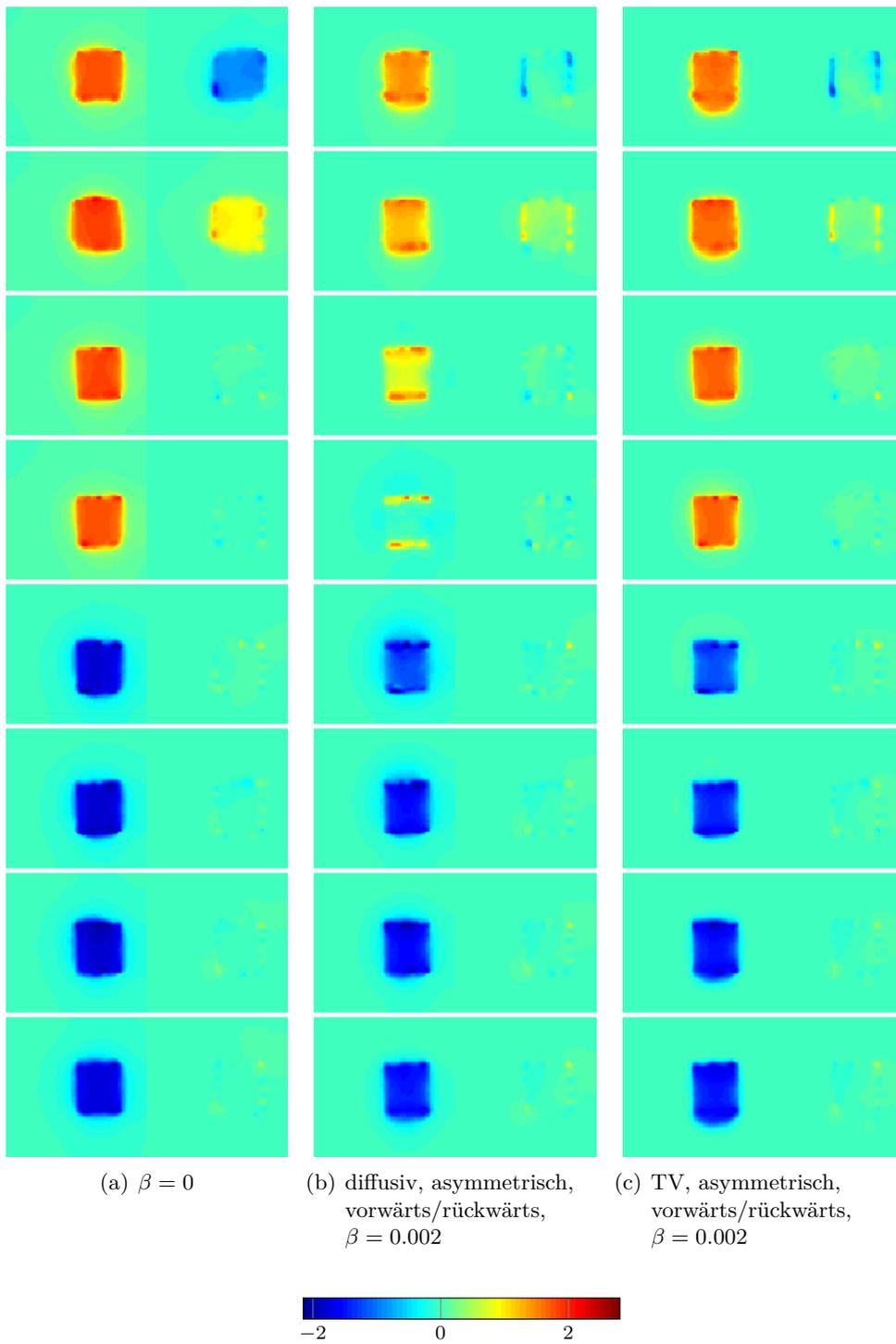


Abbildung 4.9: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 3, Regularisierung räumlich TV mit $\alpha = 0.003$, zeitlich Euler-Ansatz, Aufteilung wie Abbildung 4.2

| Iterationsschema | α | S_t | β | k |
|------------------------|----------|----------|---------|-----|
| Gesamtsystem | 0.003 | – | 0.000 | 22 |
| asymm. | 0.003 | diffusiv | 0.002 | 24 |
| asymm. | 0.003 | TV | 0.002 | 46 |
| asymm. Lagrange direkt | 0.010 | diffusiv | 0.002 | 82 |
| asymm. Lagrange direkt | 0.010 | TV | 0.002 | 134 |
| Ges. Lagrange direkt | 0.010 | – | 0.000 | 190 |

Tabelle 4.2: Numerische Ergebnisse für Testsequenz 3 mit $S : TV$

seinen Vorgänger registrieren. Bei Verwendung des direkten Lagrange-Ansatzes tritt das Problem der Bewegung auf, die im Verlauf der Sequenz zu groß werden kann, um durch eine Registrierung erreicht zu werden, was bereits im vorherigen Abschnitt angesprochen wurde. Bei Betrachtung der in Abbildung 4.10 dargestellten Ergebnisse der Registrierung von Testsequenz 3 ist vor allem die fehlerhafte Registrierung der Sequenz ohne zeitliche Regularisierung auffällig. Aufgrund des anderen Registrierungsansatzes ist hier die Deformation zu den Zeitschritten $t = 3$, $t = 4$ und $t = 5$ zu groß und kann nicht erreicht werden. Verwendet man nun wieder zeitliche Regularisierung, kann diese zu große Deformation, wie schon im letzten Abschnitt gezeigt, überwunden werden. Im Unterschied zu vorher ist hier jedoch die Größe des Regularisierungsparameters β kritisch. Um eine gute Registrierung zu gewährleisten, muss mit $\beta = 0.002$ ein Wert gewählt werden, der negative Auswirkungen auf die Erhaltung der Bewegungsumkehr hat. Dabei liefert die Verwendung von Totalvariation in diesem Punkt immer noch bessere Ergebnisse als die diffusive Regularisierung. Außerdem wird die Störung besser entfernt als bei der zeitlichen Regularisierung mit Euler-Betrachtung.

4.4 Anwendung auf Lungendaten

In den vorherigen Abschnitten wurden die Eigenschaften der entwickelten Regularisierer und Iterationsverfahren an akademischen Beispielen belegt. Um die praktische Relevanz zu beurteilen, werden die vorgestellten Methoden an klinischen Daten evaluiert. Dabei handelt es sich um eine vierdimensionale Bildsequenz – d.h. drei Raumdimensionen plus Zeit – einer Lungenbewegung, aufgenommen mit einem Computertomographen mit den Bilddimensionen $512 \times 512 \times 96$, die mit *Testsequenz 4* bezeichnet wird. Die Sequenz stammt aus dem BMBF-geförderten Projekt DOT-MOBI und wurde am DKFZ in Heidelberg aufgenommen. Sie enthält sechs Zeitschritte, die eine vollständige Atemphase umfassen. Der erste Zeitschritt dieser Sequenz ist als Volumenrendering in Abbildung 4.11 dargestellt. Für die Verwendung mit dem entwickelten Algorithmus wurde für jeden Zeitschritt die zweidimensionale Schicht 278 der Dimension 512×96 in frontaler Schnitttrichtung aus der Sequenz extrahiert, die entstandene Bildsequenz ist in Abbildung 4.12 gezeigt.

In Abbildung 4.13(a) ist zunächst die Registrierung von Testsequenz 4 ohne zeitliche Regularisierung abgebildet, um einen Eindruck von der stattfindenden Bewegung und eine

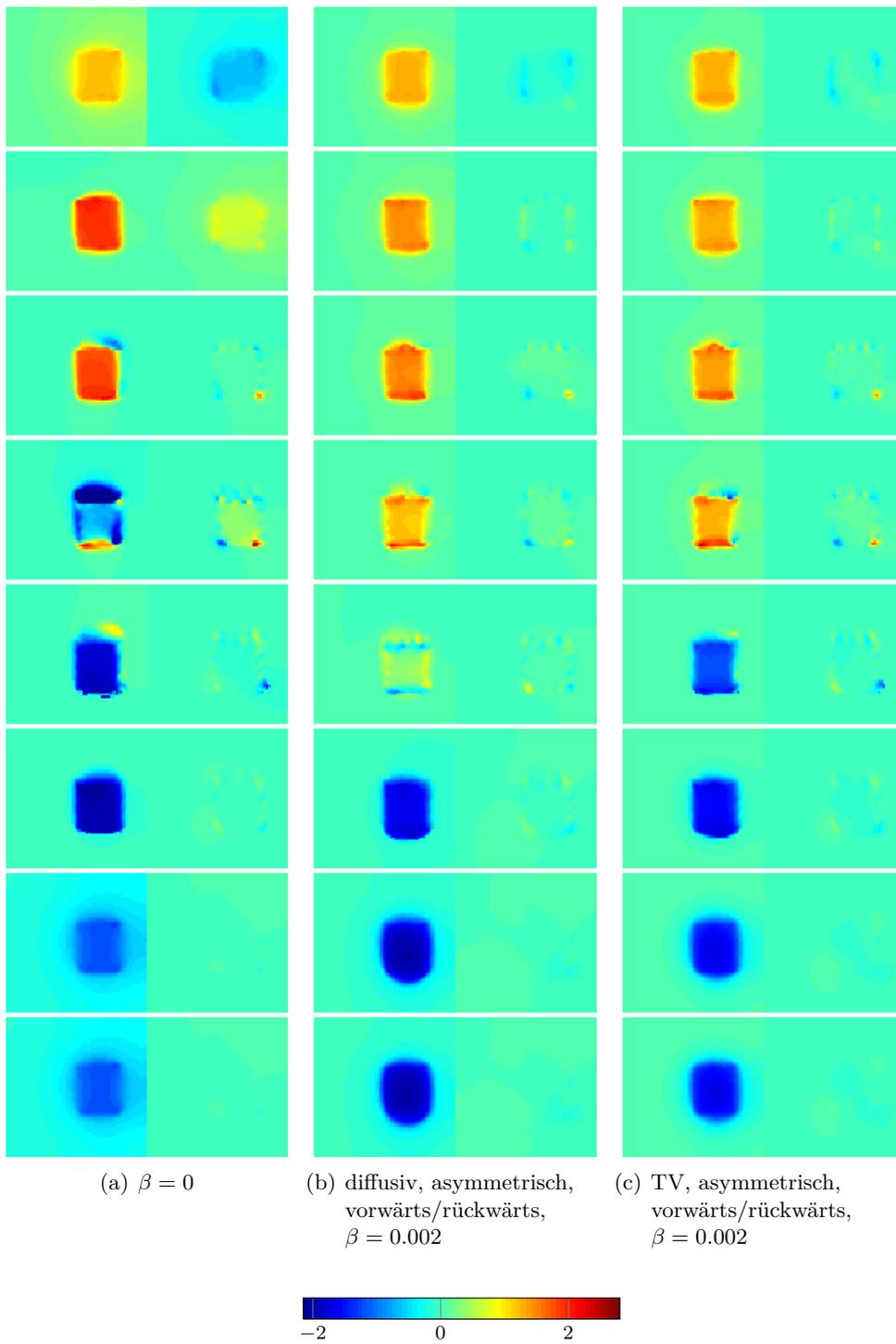


Abbildung 4.10: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 3, Regularisierung räumlich TV mit $\alpha = 0.01$, zeitlich direkter Lagrange-Ansatz, Aufteilung wie Abbildung 4.2

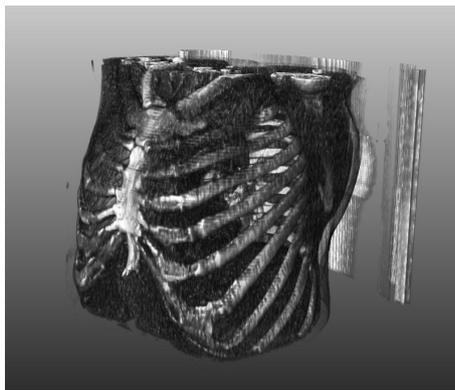


Abbildung 4.11: Volumenrendering der verwendeten Lungendaten zum Zeitschritt $t = 0$, durch entsprechende Fensterung ist nur ein Ausschnitt aus dem Grauwertspektrum dargestellt

Referenz-Deformation zu erhalten, mit der die erzielten Resultate der zeitlichen Regularisierung verglichen werden können. Die Bewegung in x_2 -Richtung ist bei allen Testfällen vernachlässigbar gering, daher werden aus Platzgründen nur die Bewegungsfelder $u_1^{(t)}$ in x_1 -Richtung gezeigt. Es ist erkennbar, dass die Deformationen für unterschiedliche Zeitschritte teilweise sehr unterschiedlich ausfallen, in Schritt $t = 1$ und $t = 2$ wird das gesamte Bild inklusive Hintergrund deformiert. Dennoch lassen sich die Schritte der Atembewegung erkennen, die ersten drei Deformationsfelder können der Inspiration, die letzten drei Deformationsfelder der Expiration zugeordnet werden.

In den benachbarten Abbildungen 4.13(b) und 4.13(c) sind Registrierungsergebnisse mit zeitlicher Regularisierung unter Verwendung eines asymmetrischen iterativen Verfahrens mit Vorwärts- und Rückwärtsiteration dargestellt. Auf diesen ist eine deutliche Veränderung der Deformation gegenüber Abbildung 4.13(a) erkennbar. Die Bewegung ist stärker auf die unteren Enden der Lungenflügel konzentriert. Deformationen wie im unteren Bereich des letzten Deformationsfeldes der zeitlich nicht regularisierten Registrierung, wo nicht nur der Lungenflügel, sondern das gesamte Gewebe bis zum Rand des Bildes verschoben wird, sind nicht mehr vorhanden. Bewegungen des gesamten Hintergrundes treten ebenfalls nicht mehr auf. Zu interpretieren ist dies, wie schon in den vorherigen Testergebnissen gesehen, als eine Glättung von Artefakten und eine gleichförmigere Bewegung.

Im Vergleich von diffusiver zeitlicher Regularisierung und einer Modellierung mit Totalvariation werden ebenfalls die vorherigen Testergebnisse bestätigt. In Abbildung 4.13(a) mit diffusiver Regularisierung ist die Deformation in Richtung Scheitelpunkt der Bewegung

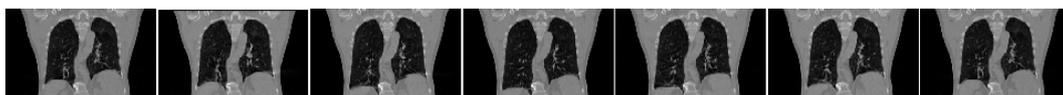


Abbildung 4.12: Testsequenz 4, Lungenbewegung eines Atemzyklus, Schnittbild in frontaler Ebene, aus 4D-CT-Aufnahme extrahiert, $T = 6$, $m_1 = 97$, $m_2 = 512$, Reihenfolge von links nach rechts, originalgetreue Skalierung der Achsen

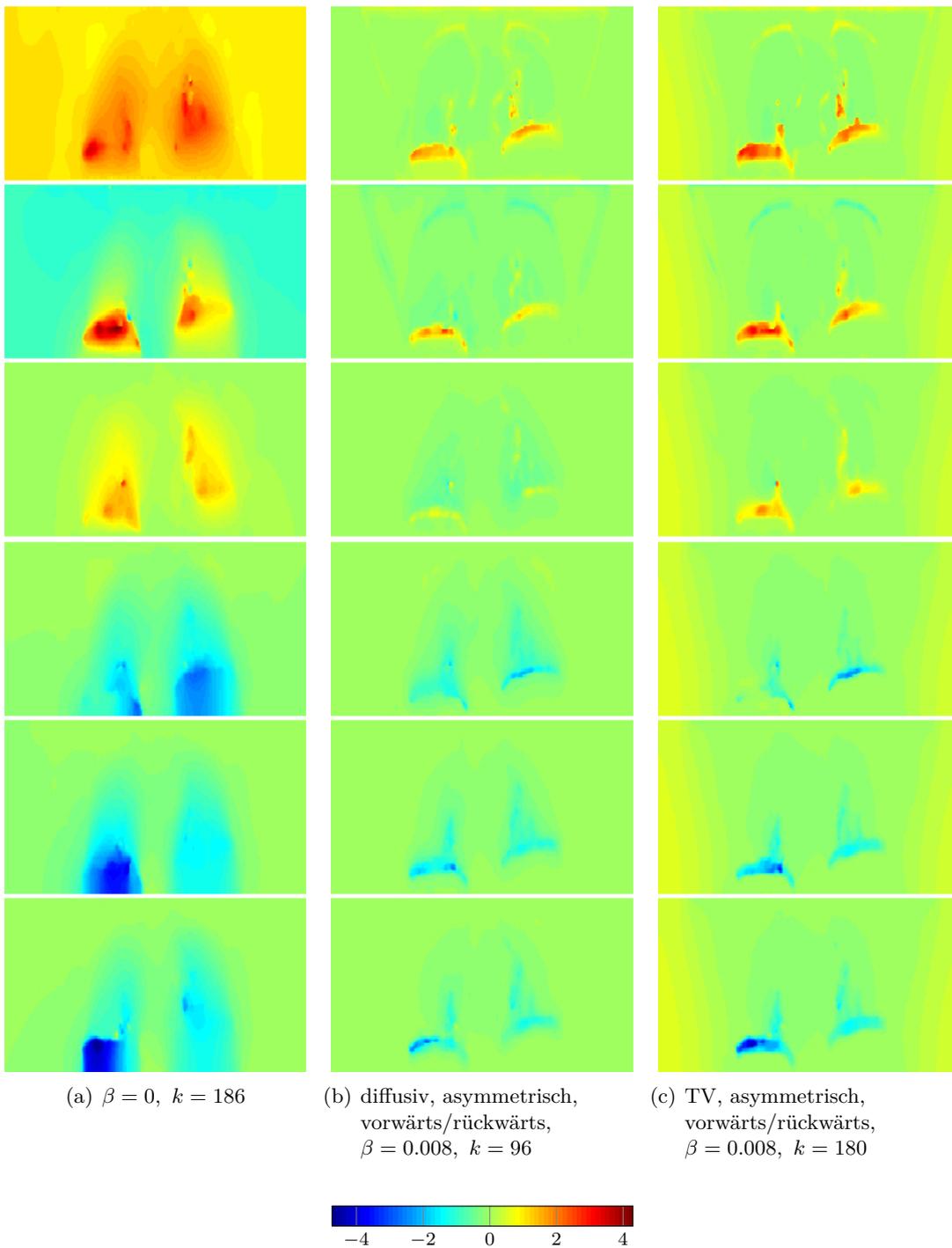


Abbildung 4.13: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 4, Regularisierung räumlich TV mit $\alpha = 0.01$, Gezeigt ist nur das Bewegungsfeld u_1 , Reihenfolge von oben nach unten

verringert, in Abbildung 4.13(b) mit Totalvariation gibt insbesondere das Deformationsfeld $u_1^{(3)}$ die Bewegung deutlich besser wieder. Eine Besonderheit tritt bei diesem Datensatz bei der Registrierung mit einem hybriden Schema auf. Im Gegensatz zu vorherigen Ergebnissen, bei denen die berechnete Deformation mit symmetrischen und hybriden Ansätzen geringer war, sind die in Abbildung 4.14(a) gezeigten Deformationsfelder stärker als die in Abbildung 4.13(b) dargestellten Resultate. Auch hier wird die Bewegungsumkehr jedoch nicht zufriedenstellend abgebildet.

In Abbildung 4.14(b) und 4.14(c) sind Registrierungsergebnisse unter Verwendung des interpolierten Lagrange-Ansatzes dargestellt, die Form der Deformationen ist dabei sehr ähnlich zu den im vorherigen Absatz beschriebenen Resultaten. Aufgrund der zugelassenen Bewegung des Deformationsfeldes hat die Stärke der Bewegung, in Übereinstimmung mit vorherigen Tests dieses Ansatzes, zugenommen.

Die Beobachtung, dass für diese Testsequenz mit einem hybriden Schema bessere Resultate erzielt werden, gilt auch für den direkten Lagrange-Ansatz, dessen Ergebnisse in Abbildung 4.15 dargestellt sind. In Abbildung 4.15(a) sind Deformationsfelder einer Registrierung mit einem asymmetrischen Ansatz und diffusiver Regularisierung gezeigt. Bei einer Verwendung von $\beta = 0.008$ konnte keine zufriedenstellende Darstellung der Bewegungsumkehr erreicht werden. Eine Verringerung des Parameters führt zu zusätzlichen Artefakten im Deformationsfeld. Im Gegensatz dazu wird in Abbildung 4.15(b) unter Verwendung des hybriden Schemas bei diffusiver Regularisierung ein glattes Deformationsfeld mit klar definierten Bewegungen erreicht. Es ist jedoch auffällig, dass die Umkehr der Bewegung in diesem Ansatz nur unzureichend wiedergegeben wird und bereits im dritten Zeitschritt eine Aufwärtsbewegung stattfindet. Ähnlich dazu verhält sich der Ansatz mit Totalvariation, allerdings werden hier mit hybridem und asymmetrischem Schema ähnliche Resultate berechnet, die Deformationsfelder des asymmetrischen Ansatzes sind in Abbildung 4.15(c) dargestellt.

4.5 Fazit

In diesem Kapitel wurden die entwickelten Verfahren und Schemata sowohl an akademischen Beispielen als auch an Daten aus der klinischen Praxis getestet. Die theoretisch motivierten Eigenschaften konnten anhand einfacher Testsequenzen belegt und einzelne Vor- und Nachteile der Verfahren herausgearbeitet werden. Bezüglich der Iterationsrichtungen wurde gezeigt, dass eine kombinierte Vorwärts- und Rückwärtsiteration der Iteration in nur eine Richtung vorzuziehen ist. Ebenfalls untersucht wurden Unterschiede in der Berechnung der finiten Differenzen im zeitlichen Regularisierer. Abhängig von der jeweiligen Sequenz kann entweder der asymmetrische oder der symmetrische Ansatz bessere Resultate liefern.

Die negativen Auswirkungen der Bestrafung von gleichförmigen Bewegungen bei Verwendung einer Euler-Betrachtung konnten im Vergleich mit Ergebnissen, die mit zeitlicher Regularisierung in Lagrange-Sichtweise erzielt wurden, belegt werden. Deformationsfelder, ermittelt mit interpoliertem oder direktem Lagrange-Ansatz, weisen im Vergleich zu solchen mit Euler-Betrachtung eine ähnliche Form aber stärkere Deformationen und damit bessere Resultate auf.

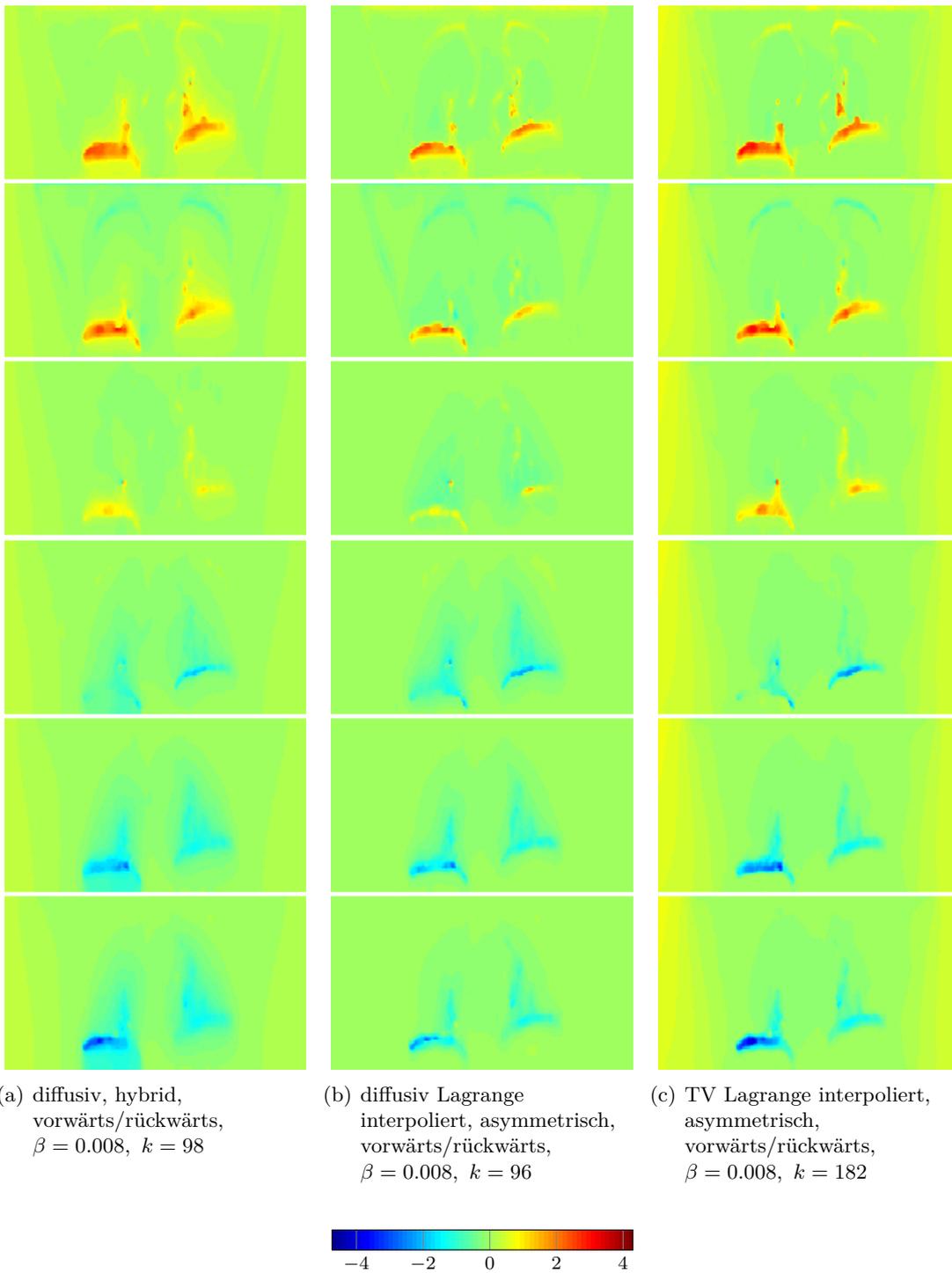
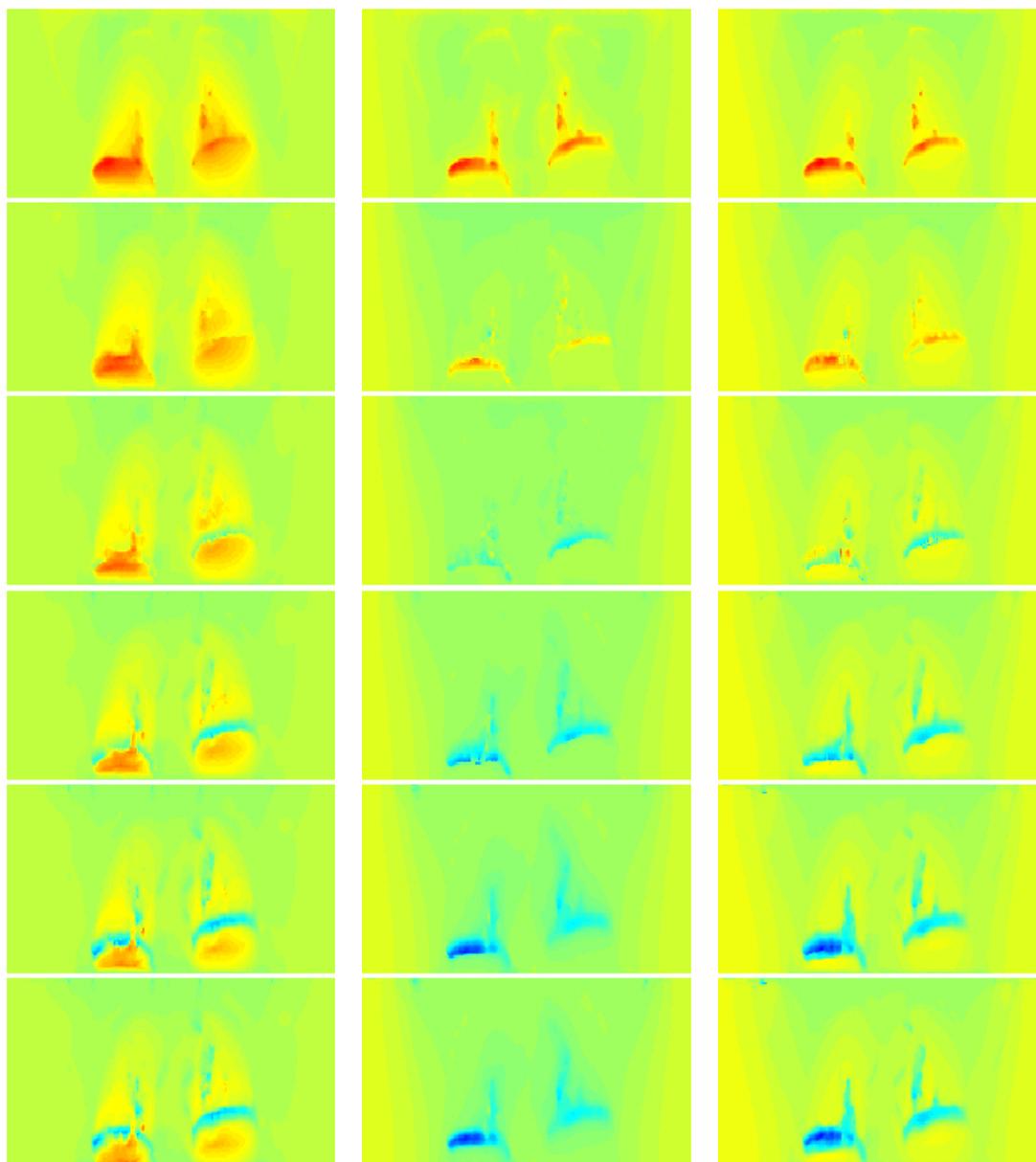


Abbildung 4.14: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 4, Regularisierung räumlich TV mit $\alpha = 0.01$, Aufteilung wie Abbildung 4.13

Mit dem direkten Lagrange-Ansatz lassen sich ähnliche Ergebnisse wie mit der interpolierten Form erzielen, hier kommt es hauptsächlich auf die Fragestellung hinter dem Registrierungsproblem an. Werden die Deformationsfelder zu verschiedenen Zeitschritten auf einem regelmäßigen Gitter benötigt, sind diese nur durch zusätzliche Interpolation der Differenzen $w^{(t)}$ zu erreichen, was einen möglichen Geschwindigkeitsvorteil des direkten Ansatzes zunichtemacht. Anzumerken ist, dass der direkte Lagrange-Ansatz, bei dem jedes Bild auf das erste Bild der Sequenz registriert wird, das Problem, dass bei iterativen Verfahren kein Startwert aus vorherigen Iterationsschritten verwendet werden kann, durch die zeitliche Regularisierung wieder ausgleicht.

Insgesamt konnte mit den entwickelten Verfahren eine deutliche Verbesserung der Resultate gegenüber einer Registrierung ohne zeitliche Regularisierung erzielt werden. Mit den modellierten Schemata stehen verschiedene Ansätze zur Verfügung, die bei unterschiedlichen Anforderungen eingesetzt werden können.



(a) diffusiv Lagrange direkt,
asymmetrisch,
vorwärts/rückwärts
 $\beta = 0.008$, $k = k_{\max}$

(b) diffusiv Lagrange direkt,
hybrid, vorwärts/rückwärts,
 $\beta = 0.008$, $k = k_{\max}$

(c) TV Lagrange direkt,
vorwärts/rückwärts,
 $\beta = 0.008$, $k = k_{\max}$

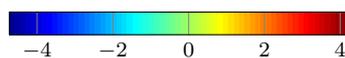


Abbildung 4.15: Bewegungsfelder der Registrierung von Testsequenz 4, Regularisierung räumlich TV mit $\alpha = 0.01$, Aufteilung wie Abbildung 4.13

5 Ausblick

Die entworfenen Ansätze zeigen, dass eine zeitliche Regularisierung bei der Registrierung von Bildsequenzen deutliche Vorteile gegenüber einer Registrierung ohne die Verwendung von zeitlichen Informationen bietet. Bei den vorgestellten Verfahren, deren Funktion im letzten Kapitel demonstriert wurde, ergeben sich verschiedene Ansatzpunkte für weiterführende Arbeiten.

Die Algorithmen wurden bisher nur für zweidimensionale Bilder implementiert. Eine Erweiterung auf drei Bilddimensionen stellt einen logischen Schritt zum Vergleich der Methoden mit Verfahren der klinischen Praxis dar, die theoretischen Grundlagen sollten sich dabei direkt auf höhere Bilddimensionen übertragen lassen. Bei dem Umgang mit 4D-Sequenzen ist dann allein aufgrund der Größe der Daten ein deutlicher Vorteil der iterativen Schemata in Bezug auf Speicherbedarf und Rechenzeit zu erwarten.

Daneben bietet die Modellierung des zeitlichen Regularisierers Raum für Erweiterungen. Durch die generische Formulierung der Terme mit einer Funktion ψ lassen sich neben der Totalvariation andere Ansätze verwenden. Dabei könnten nicht nur bewährte Verfahren aus der räumlichen Regularisierung zum Einsatz kommen, sondern spezielle für die zeitliche Regularisierung angepasste Funktionen verwendet werden.

Durch eine Vorglättung der Bilder, wie am Anfang von Kapitel 4 beschrieben, können – auch in einer Registrierung ohne zeitliche Komponente – durch die Elimination von hohen Frequenzen bessere Resultate mit dem ableitungsbasierten Optimierungsverfahren erzielt werden. Dieses Prinzip lässt sich erweitern und eine wie in [5] vorgeschlagene und dort mit *Spatiotemporal Presmoothing* bezeichnete Vorglättung in Zeitrichtung könnte untersucht werden.

Ein weiterer Ansatz ist die Modellierung zusätzlicher Annahmen über den Verlauf der Bewegung. Bei Bewegungen mit bekanntem Muster, wie Herz- oder Lungenbewegungen, könnte ein Regularisierer aufgestellt werden, der als Idealfall eine Sinusfunktion annimmt und Abweichungen von deren Verlauf bestraft. So wäre es möglich, Verfahren zu entwickeln, die spezifischer auf bestimmte Probleme ausgerichtet sind.

Auch die Abbruchkriterien lassen Raum für weitere Verbesserungen. Bei einer manuellen Evaluation des Iterationsverlaufs von Testfällen, bei denen die Kriterien nicht oder nur sehr spät erreicht werden, zeigt sich, dass sich die Werte der Zielfunktion über lange Zeiträume nur noch minimal ändern. Dies ist vor allem bei asymmetrischen Iterationsverfahren der Fall, wo Vorwärts- und Rückwärtsiteration gegen unterschiedliche Werte streben. Die Differenz dieser Werte ist jedoch im Vergleich zur prozentualen Minimierung der Zielfunktion seit Iterationsbeginn sehr gering. Dennoch werden die Abbruchkriterien nicht erreicht, weshalb hier eine Anpassung zu einer wesentlich geringeren Anzahl an Iterationen führen könnte.

Die entwickelten Verfahren und erwünschten Eigenschaften wurden theoretisch motiviert und aus bestehenden und etablierten Ansätzen abgeleitet. Es wurde an Beispielen gezeigt, dass die mit numerischen Algorithmen behandelten diskretisierten Versionen diese Eigenschaften erfüllen. Weiterführend wäre eine mathematische Untersuchung der Grundlagen bezüglich genereller Eigenschaften der neu aufgestellten Terme wie Existenz und Konvergenz von Lösungen sinnvoll. Daraus könnten weitere theoretische Argumente für die Verwendung der entwickelten Methoden gewonnen und eventuelle Modifikationen der Modellierung und Diskretisierung abgeleitet werden.

Die aufgeführten Punkte bieten interessante Themen zur weiteren Untersuchung der zeitlichen Regularisierung in der Bildregistrierung, die, wie in dieser Arbeit gezeigt, vielversprechende Resultate liefert und in Zukunft aufgrund der immer leistungsfähigeren Aufnahmegeräte zusätzlich an Bedeutung gewinnen wird.

Literaturverzeichnis

- [1] Acar, R. und C. Vogel: *Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems*. Inverse problems, 10:1217, 1994.
- [2] Brox, T.: *From pixels to regions: partial differential equations in image analysis*. Dissertation, 2005.
- [3] Brox, T., A. Bruhn, N. Papenberg und J. Weickert: *High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping*. Computer Vision-ECCV 2004, S. 25–36, 2004.
- [4] Brox, T., M. Welk, G. Steidl und J. Weickert: *Equivalence results for TV diffusion and TV regularisation*. In: *Scale Space Methods in Computer Vision*, S. 86–100. Springer, 2003.
- [5] Bruhn, A.: *Variational Optic Flow Computation Accurate Modelling and Efficient Numerics*. Dissertation, 2006.
- [6] Brune, C.: *4D imaging in tomography and optical nanoscopy*. Dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2010.
- [7] De Boor, C.: *A practical guide to splines*. Springer, 1978.
- [8] Fischer, B. und J. Modersitzki: *Fast diffusion registration*. Inverse problems, image analysis, and medical imaging: AMS Special Session on Interaction of Inverse Problems and Image Analysis, January 10-13, 2001, New Orleans, Louisiana, 313:117–127, 2002.
- [9] Forster, O.: *Analysis: Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*, Bd. 3. Vieweg+Teubner, 2009.
- [10] Gill, P., W. Murray und M. Wright: *Practical optimization*. Academic Press London, 1981.
- [11] Golub, G. und C. Van Loan: *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, 1983.
- [12] Hadamard, J.: *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover Publications, 1923.
- [13] König, L.: *Bildregistrierung mit Volumenbeschränkung*. Bachelorarbeit, Universität zu Lübeck, Institut für Mathematik, 2009. http://www.mic.uni-luebeck.de/fileadmin/mic/publications/student_projects/bachelor_thesis/Bachelorarbeit_Koenig.pdf.
- [14] Modersitzki, J.: *Numerical methods for image registration*. Oxford University Press, 2004.

- [15] Modersitzki, J.: *FAIR: flexible algorithms for image registration*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009.
- [16] Modersitzki, J., O. Schmitt und S. Wirtz: *Registration of histological serial sections*. Mathematical Models for Registration and Applications to Medical Imaging, S. 63–80, 2006.
- [17] Nocedal, J. und S. Wright: *Numerical optimization*. Springer, 1999.
- [18] Nürnberger, G.: *Approximation by spline functions*. Springer, 1989.
- [19] Opfer, G.: *Numerische Mathematik für Anfänger*, Bd. 2. Vieweg, 1993.
- [20] Papenberg, N.: *Ein genereller Registierungsansatz mit Anwendung in der navigierten Leberchirurgie*. Dissertation, Universität zu Lübeck, Institut für Mathematik, 2008.
- [21] Rudin, L., S. Osher und E. Fatemi: *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 60(1-4):259–268, 1992.
- [22] Strong, D. und T. Chan: *Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization*. Inverse problems, 19:S165, 2003.
- [23] Weickert, J. und C. Schnörr: *Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint*. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 14(3):245–255, 2001.
- [24] Zitova, B. und J. Flusser: *Image registration methods: a survey*. Image and vision computing, 21(11):977–1000, 2003.