



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND  
IMAGE COMPUTING

# Nichtlineare Bildregistrierung mit Modellierung von Gleitbewegungen

## Masterarbeit

im Rahmen des Studiengangs

**Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften**  
der Universität zu Lübeck

vorgelegt von

**Alexander Derksen**

ausgegeben und betreut von

**Prof. Dr. rer. nat. Jan Modersitzki**

Institute of Mathematics and Image Computing

mit Unterstützung von

**Dr. rer. nat. Stefan Heldmann**

Institute of Mathematics and Image Computing

Lübeck, den 18. Juni 2013





# Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, die Masterarbeit selbständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.

Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

---

Ort, Datum

Unterschrift



# Danksagung

Ich danke dem gesamten Institute of Mathematics and Image Computing der Universität zu Lübeck für die freundliche Aufnahme in Ihre Reihen während der letzten Jahre. Ganz besonders möchte ich mich bei Dr. Stefan Heldmann für viele sehr interessante und lehrreiche Gespräche bedanken.

Daneben gilt der Dank meinen Eltern und Freunden, die mir immer eine große Stütze waren. Ohne euch stünde ich heute nicht vor dem Abschluss meines Studiums.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Variationelle Formulierung des Registrierungsproblems</b>	<b>11</b>
2.1	Distanzmaß . . . . .	13
2.2	Regularisierer . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Hyperelastische Regularisierung</b>	<b>19</b>
3.1	Quadratisch elastische Regularisierung . . . . .	19
3.2	Volumen Regularisierung . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Registrieren mit Nebenbedingungen</b>	<b>27</b>
4.1	Registrieren mit Nebenbedingungen im Lagrange-Ansatz . . . . .	28
4.2	SSD-Distanzmaß im Lagrange-Ansatz . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Sliding Motion</b>	<b>33</b>
5.1	Bisherige Arbeiten . . . . .	33
5.2	Sliding Motion als Nebenbedingung . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Finite-Elemente-Diskretisierung des Registrierungsproblems</b>	<b>41</b>
6.1	Finite-Elemente-Diskretisierung . . . . .	41
6.2	Diskretisierung der Zielfunktion . . . . .	48
6.3	Diskretisierung der Nebenbedingung . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Optimierung</b>	<b>59</b>
<b>8</b>	<b>Numerische Experimente</b>	<b>69</b>
<b>9</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>81</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>83</b>



# 1 Einleitung

Bildregistrierung ist ein wichtiges Verfahren der medizinischen Bildverarbeitung. Ihr Ziel besteht darin, Informationen aus zwei strukturell ähnlichen Bildern zu fusionieren. Korrespondierende Strukturen in beiden Bildern sollen durch geometrische Deformationen zur Überlagerung gebracht werden. Das heißt, dass die beiden Bilder möglichst „ähnlich“ werden sollen. Die durch die Bildregistrierung beschriebenen Deformationen dürfen dabei nicht beliebig ausfallen, sondern sollen eine gewisse Plausibilität in der Realität bewahren. Akquiriert werden die dabei verwendeten Aufnahmen zum Beispiel von bildgebenden Verfahren, wie der Computertomographie oder der Magnetresonanztomographie.

Eine zur Wahrung der Plausibilität häufig gestellte Forderung lautet, dass die gesuchte Deformation in einem geeigneten Sinn glatt sein muss. In der medizinischen Bildregistrierung finden dabei verschiedene Definitionen des Wortes „glatt“ Verwendung. Sie alle haben gemein, dass die gesuchte Deformation insbesondere stetig sein muss. Eine solche Forderung ist oftmals sinnvoll, denn ein Organ wird unter Kraftereinwirkung üblicherweise ein stetiges Deformationsverhalten aufweisen. Ein nicht stetiges Verhalten würde ein Reißen des Gewebes bedeuten.

Entlang der Kontaktflächen von nicht miteinander verwachsenem Gewebe verliert die Forderung nach Glattheit allerdings an Plausibilität. Ein Gleitverhalten, das zwischen den Gewebeflächen auftreten kann, lässt sich nicht als glatte bzw. stetige Deformation beschreiben. Motiviert durch diese Problemstellung, wird in dieser Arbeit ein Verfahren zur medizinischen Bildregistrierung unter Berücksichtigung von Gleitverhalten in vorgegebenen Bereichen vorgestellt. Im Fokus steht die Modellierung und nicht die Anwendung. Dieses Gleitverhalten wird im Weiteren auch als *Sliding Motion* bezeichnet. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren ist nicht auf einen spezifischen Fall von Sliding Motion limitiert: Prinzipiell kann ein Gleitverhalten an nahezu beliebigen Oberflächen beschrieben werden.

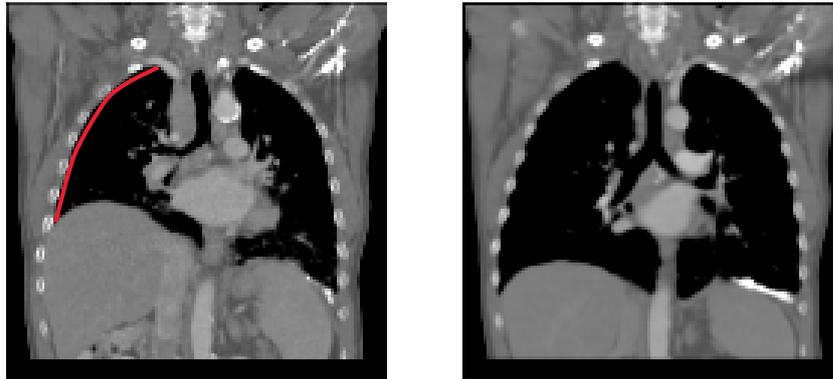


ABBILDUNG 1.1: Dargestellt sind koronale Lungenaufnahmen. Das Bild auf der linken Seite soll durch geometrische Deformationen ähnlich dem Bild auf der rechten Seite werden. Rot markiert wurde der Bereich in dem ein Gleiten von Lungenfell an Rippenfell gestattet sein soll.

Ein Beispiel für Sliding Motion im menschlichen Körper findet sich im Thorax. Während der Atmung (Respiration) gleitet die Lunge an der Innenseite des Brustkorbs. Der Atmungsvorgang verläuft wie folgt: Die Bewegung der Lunge wird indirekt durch die Atemmuskulatur verursacht, wobei das Zwerchfell den größten Einfluss auf die Deformation hat. Der zwischen Lungenfell (Pleura visceralis) und Brustfell (Pleura parietalis) liegende Pleuraspalt ist unter Unterdruck mit einer serösen Flüssigkeit gefüllt. Eine Kontraktion der Atemmuskulatur erhöht das Brustvolumen und somit auch den Unterdruck im Pleuraspalt. Bedingt durch den Unterdruck folgt die Lunge dieser Bewegung und gleitet entlang des Brustfells. In der Literatur wird das Deformationsverhalten von Lunge und Brustkorb als elastisch geschildert [20]. Der daraus resultierende Gleitvorgang wird als reibungsfrei beschrieben [25]. Anhand des Lungenbeispiels wird in Abbildung 1.1 die Problemstellung veranschaulicht.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im folgenden Kapitel findet eine mathematische Formulierung des hier modellierten Registrierungsproblems statt. Die zunächst allgemein gehaltene Beschreibung wird in den anschließenden Kapiteln 3, 4 und 5 näher ausgeführt. In den Kapiteln 6 und 7 wird das Problem diskretisiert und ein Optimierungsverfahren zur Lösung vorgestellt. In Kapitel 8 finden sich berechnete Ergebnisse und in Kapitel 9 das gezogene Fazit.

## 2 Variationelle Formulierung des Registrierungsproblems

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für eine formale Definition des Registrierungsproblems beschrieben. Das Ziel des Registrierungsproblems ist das Deformieren eines Bildes, so dass es ähnlich zu einem anderen wird. Das zu deformierende Bild wird im Weiteren als *Template* bezeichnet und das festgehaltene Bild wird als *Referenz* bezeichnet. Es werden zunächst einige Hilfsmittel eingeführt.

Im Weiteren sei  $d \in \mathbb{N}$  die Dimension eines Bildes. Wir definieren ein *Bild*  $B$  als beliebig oft stetig differenzierbare Funktion

$$B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad B \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),$$

so dass jedem Ort  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  ein Grauwert  $B(\mathbf{x})$  zugeordnet wird. Entsprechend dieser Definition heißt  $T$  das *Templatebild* und  $R$  das *Referenzbild*. Das in der Einleitung beschriebene Ziel der Bildregistrierung ist es, eine Deformation zu bestimmen, so dass das Templatebild in das Referenzbild überführt wird. Als *Deformation* bezeichnen wir ein Vektorfeld  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)^\top$  mit

$$\boldsymbol{\varphi}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} \mapsto \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

und  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Das Vektorfeld  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^\top$  mit

$$\mathbf{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

bezeichnen wir als *Verrückung* der Deformation  $\boldsymbol{\varphi}$  und ist durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

definiert. Die Komposition  $B \circ \boldsymbol{\varphi}$  bezeichnen wir als *deformiertes Bild*. Die Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  ist ein Gebiet und wir nennen sie im Weiteren *Bildbereich*. Ein *Gebiet* ist eine offene und zusammenhängende Menge. Mit diesen Definitionen beschreiben wir jetzt einen mathematischen Rahmen, der sicherstellen soll, dass  $R$  und  $T \circ \boldsymbol{\varphi}$  auf einem Gebiet  $\Omega$  möglichst ähnlich sind. Die bislang allgemein gehaltene Dimension  $d$  der Formulierung wird im Weiteren, wenn nicht anders vermerkt, auf  $d = 2$  gesetzt. Alle vorgestellten Konzepte lassen sich allerdings auch auf höhere Dimensionen (insbesondere  $d = 3$ ) verallgemeinern.

Ein verbreiteter Ansatz ist es, das Registrierungsproblem als Optimierungsproblem zu formulieren. Dabei wird im Allgemeinen auf Methoden der Variationsrechnung zurückgegriffen. Das Variationsproblem schreibt sich als:

$$\min_{\boldsymbol{\varphi}} \left\{ \mathcal{D}[T, R; \boldsymbol{\varphi}] + \alpha \mathcal{R}[\mathbf{u}] \right\}. \quad (2.2)$$

Der erste Term  $\mathcal{D}$  wird als *Distanzmaß* bezeichnet. Er ordnet dem deformierten Template-Bild  $T \circ \boldsymbol{\varphi}$  und dem undeformierten Referenz-Bild  $R$  ihren, in einem geeigneten Sinn gewählten, Abstand zu. In Abschnitt 2.1 wird allgemein auf Distanzmaße eingegangen und in Abschnitt 4.2 wird der verwendete Distanzterm vorgestellt. Der zweite Term  $\mathcal{R}$  heißt *Regularisierer*. Das in der Einleitung genannte plausible Deformationsverhalten fließt über diesen Term in das Registrierungsproblem ein. Anders gesagt:  $\mathcal{R}$  soll gewährleisten, dass unerwünschte Deformationen bestraft werden. Sein Vorfaktor  $\alpha > 0$  heißt *Regularisierungsparameter* und gewichtet den Einfluss von  $\mathcal{R}$  gegenüber dem Distanzmaß. In Abschnitt 2.2 wird die Notwendigkeit einer Regularisierung genauer beleuchtet und in Kapitel 3 der hier verwendete hyperelastische Regularisierer vorgestellt.

Um zusätzlich das Aneinandergleiten von Oberflächen zu modellieren, erweitern wir das Problem um eine Nebenbedingung:

$$\mathcal{C}[\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma.$$

Diese Nebenbedingung soll auf einer Menge  $\Sigma \subset \Omega$  ein reibungsfreies Gleitverhalten an  $\boldsymbol{\varphi}$  fordern. Das heißt, dass auf  $\Sigma$  unstetiges Verhalten von  $\boldsymbol{\varphi}$  gestattet wird. Eine ausgiebige Betrachtung der Nebenbedingung findet in Abschnitt 5.2 statt. Zusammengesetzt ergibt sich damit die allgemeine Form des in dieser Arbeit betrachteten Problems:

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\varphi}} \left\{ \mathcal{D}[T, R; \boldsymbol{\varphi}] + \alpha \mathcal{R}[\mathbf{u}] \right\} \\ \text{u. d. Nb.} \quad & \mathcal{C}[\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma. \end{aligned}$$

In den folgenden zwei Abschnitten werden gängige Terme für  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{R}$  vorgestellt.

## 2.1 Distanzmaß

Da die Wahl des richtigen Distanzmaßes entscheidend für das Ergebnis einer Registrierung ist, wurden in den letzten Jahren zahlreiche Maße für die unterschiedlichsten Einsatzgebiete entwickelt [5, 17, 24, 29]. Alle diese Maße teilen sich zwei essentielle Eigenschaften: Zum einen die Symmetrie-Eigenschaft  $\mathcal{D}[R, T] = \mathcal{D}[T, R]$  und zum anderen die Eigenschaft, dass  $\mathcal{D}[R, R] = \min_T \mathcal{D}[R, T]$ . Metriken sind diese Maße im Allgemeinen dennoch nicht, da sie in der Regel nicht definit sind (vgl. Normalized Gradient Fields in Gleichung (2.4)). Das heißt, die Implikation

$$\mathcal{D}[T, R] = 0 \implies T = R$$

ist für sie nicht erfüllt. Distanzmaße lassen sich grob in zwei Klassen gruppieren, monomodale Maße und multimodale Maße.

### Monomodale Maße

Diese Klasse wurde dafür konzipiert zwei Bilder mit vergleichbarem Kontrast und Helligkeitsniveau zu vergleichen. In der Regel werden diese Kriterien nur erfüllt sein, wenn die beiden Bilder einen *monomodalen* Datensatz bilden. Das heißt, wenn diese mit dem gleichen Verfahren akquiriert wurden. Das vermutlich verbreitetste monomodale Maß ist:

$$\text{SSD}[T, R; \boldsymbol{\varphi}] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( T(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) - R(\mathbf{x}) \right)^2 d\mathbf{x}, \quad (2.3)$$

das sog. *Sum-of-squared-distances*(SSD) Maß.

### Multimodale Maße

Als Ergänzung zu den monomodalen Distanztermen existiert die Klasse der *multimodalen* Maße. Sie sind für den Vergleich von unterschiedlich akquirierten Bildern konzipiert. Das heißt, dass bei diesen Aufnahmen mit großen Unterschieden in den dargestellten

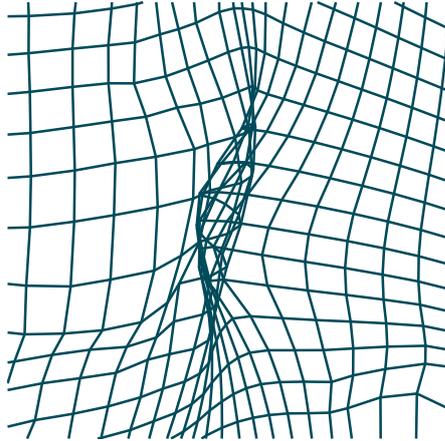


ABBILDUNG 2.1: Ausschnitt einer Deformation mit Faltung.

Strukturen zu rechnen ist. Aufgrund dieser Voraussetzungen sind multimodale Maße in der Regel komplizierter in ihrem Aufbau als monomodale Maße. Ein Beispiel hierfür ist die *Normalized Gradient Fields*(NGF) Distanz:

$$\text{NGF}[T, R; \boldsymbol{\varphi}] := \int_{\Omega} 1 - \left( \mathbf{n}_{\varepsilon}[T(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))] \right)^{\top} \mathbf{n}_{\varepsilon}[R(\mathbf{x})] \Big)^2 \, d\mathbf{x}, \quad (2.4)$$

mit dem normalisierten und regularisierten Gradienten

$$\mathbf{n}_{\varepsilon}[I] := \frac{\nabla I}{\sqrt{\|\nabla I\|^2 + \varepsilon^2}}$$

eines Bildes  $I$ . Eine regularisierende Wirkung wird dabei durch  $\eta > 0$  übernommen. Details hierzu finden sich unter [19].

Eine Betrachtung weiterer Distanzmaße geschieht in [18,19]. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf Bildregistrierung mit modelliertem Aneinandergleiten von Oberflächen liegt, entscheiden wir uns für das relativ einfach strukturierte SSD-Maß.

## 2.2 Regularisierer

Neben dem Distanzmaß ist der Regularisierer der zweite Baustein einer variationellen Beschreibung der Registrierung. Seine Notwendigkeit liegt darin begründet, dass das

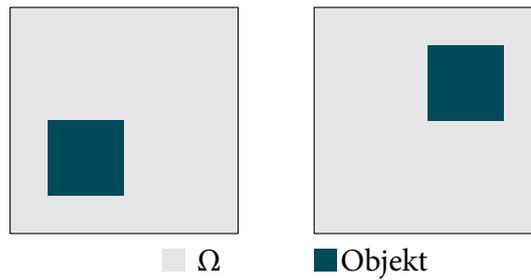


ABBILDUNG 2.2: Ein Beispiel für eine nicht-eindeutige Registrierung: Links ist das Template-Bild  $T$  und rechts ist das Referenz-Bild  $R$  zu sehen. Das Template kann z. B. durch eine Translation, Rotation oder Spiegelung in das Referenz-Bild überführt werden.

### Problem

$$\min_{\varphi} \mathcal{D}[T, R; \varphi] \quad (2.5)$$

im Allgemeinen schlecht gestellt ist. Die Definition schlecht gestellter Probleme geht auf Jacques Hadamard [13] zurück und lautet: Ein Problem heißt *schlecht gestellt*, falls einer der folgenden Punkte nicht erfüllt ist.

- Für jedes Element des Urbilds existiert eine Lösung.
- Die Lösung ist eindeutig.
- Die Lösung hängt stetig von den Eingangsdaten ab.

Insbesondere für Punkt Zwei und Drei lassen sich leicht Beispiele für die Schlecht-Gestellttheit von (2.5) finden. In Abbildung 2.2 ist ein Beispiel zur Nicht-Eindeutigkeit veranschaulicht. Der gängige Versuch, ein schlecht gestelltes Problem in ein gut gestelltes Problem zu überführen, ist der der Regularisierung.

Ebenfalls sollen unplausible Deformationen durch  $\mathcal{R}$  bestraft werden. Zu den unplausiblen Deformationen gehören z. B. besonders ausgeprägte Stauchungen oder Streckungen des Deformationsfeldes. Das vielleicht extremste Beispiel einer unerwünschten Deformation ist das einer Faltung (siehe Abbildung 2.1). Deformationen dieser Art sind keine erwünschten Lösungen.

Ein Lösungsansatz ist der der Regularisierung. Zusätzliche Informationen werden durch einen Regularisierungsterm  $\mathcal{R}$  in die Zielfunktion eingebunden. Mit ihm erhält man die

Darstellung des Registrierungsproblems aus (2.2):

$$\min_{\boldsymbol{\varphi}} \left\{ \mathcal{D}[T, R; \boldsymbol{\varphi}] + \alpha \mathcal{R}[\mathbf{u}] \right\}.$$

In dieser Form lässt sich die regularisierende Wirkung von  $\mathcal{R}$  über den *Regularisierungsparameter*  $\alpha > 0$  steuern.

Im Folgenden werden einige der verbreitetsten Regularisierer kurz vorgestellt und ein Versuch der Klassifizierung unternommen. Dabei wird zwischen nicht-physikalisch motivierten und physikalisch motivierten Regularisierern unterschieden.

### Nicht-physikalisch motivierte Regularisierer

Diese Funktionale versuchen im Allgemeinen die Ableitungen der Verrückung  $\mathbf{u}$  zu kontrollieren. Der vermutlich einfachste Regularisierer dieser Klasse ist der sogenannte *Diffusive Regularisierer* [18, 29]:

$$\mathcal{R}^{\text{diff}}[\mathbf{u}] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{u}\|_F^2 \, d\mathbf{x}. \quad (2.6)$$

Es bezeichnet dabei  $\|\mathbf{A}\|_F := \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})}$  die *Frobeniusnorm* einer Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Der Term  $\nabla \mathbf{u}$  mit

$$\nabla \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{u}_d}{\partial x_d} \end{pmatrix}$$

heißt Jacobi-Matrix einer differenzierbaren Deformation. Da  $\mathbf{u}$  nur in seiner differenzierten Form  $\nabla \mathbf{u}$  auftritt, ist der Diffusive Regularisierer translationsinvariant.

Ein weiteres Beispiel für einen nicht-physikalisch motivierten Regularisierer ist der *Curvature Regularisierer* [8, 9, 15]:

$$\mathcal{R}^{\text{curv}}[\mathbf{u}] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d (\Delta u_i(\mathbf{x}))^2 \, d\mathbf{x}.$$

Er verwendet den Laplace-Operator  $\Delta u(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}$  zur Approximation der Krümmung der Deformation. Analog zum diffusiven Term gilt: Aufgrund der auftretenden zweiten Ableitungen ist  $\mathcal{R}^{\text{curv}}$  invariant unter affin-linearen Deformationen.

### Physikalisch motivierte Regularisierer

Der vermutlich bekannteste Regularisierer dieser Klasse ist der *linear-elastische Regularisierer* [1]. Anschaulich gesprochen modelliert er die Deformation des Templates als wäre es auf einer Gummioberfläche aufgemalt. Er beschreibt dabei das linearisierte elastische Potential der Verrückung und ist durch

$$\mathcal{R}^{\text{le}}[\mathbf{u}] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\mu}{2} \|(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^{\top})\|_F^2 + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{u})^2 \, d\mathbf{x} \quad (2.7)$$

definiert. Dabei ist  $\operatorname{div}(\cdot)$  die *Divergenz* eines differenzierbaren Vektorfeldes und es gilt  $\operatorname{div}(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ . Eine genauere Betrachtung des linear elastischen Regularisierers findet in Kapitel 3 statt.

Ein weiteres Funktional dieser Klasse ist der *fluidale Regularisierer* [18]. Seine alternative Bezeichnung als viskoelastischer Regularisierer betont den Zusammenhang zum elastischen Ansatz. Das deformierte Template verhält sich bei seiner Anwendung wie eine viskose Flüssigkeit.

Da das Verhalten von Organen wie der Lunge oder der Leber in der Literatur [20, 25] als elastisch beschrieben wird, binden wir im folgenden Kapitel einen entsprechend physikalisch motivierten Regularisierer in das Problem ein. Dieser wird als hyperelastisch bezeichnet und es lassen sich mit ihm Deformationen mit großem  $\nabla \mathbf{u}$  beschreiben. Der Begriff *hyperelastisch* beschreibt eine bestimmte Art elastischen Verhaltens und wird in [7] detailliert erörtert.



## 3 Hyperelastische Regularisierung

In diesem Kapitel wird eine hyperelastische Regularisierung [7] des Problems vorgestellt. Sie setzt sich aus zwei Termen zusammen: Zum einen dem Regularisierer der das elastische Verhalten von Organen wie Lunge oder Leber modelliert. Zum anderen einem Term der Volumenänderungen der Deformation kontrolliert. Es wird zunächst der elastische Regularisierer vorgestellt und im Anschluss der Volumenregularisierer.

### 3.1 Quadratisch elastische Regularisierung

Physikalische Kontinuumsmodelle sind in der Bildregistrierung zur Regularisierung sehr verbreitet. Dabei reicht das Spektrum von einfachen linear elastischen Modellen, bis hin zu komplexeren fluidalen oder hyperelastischen Ansätzen. Auch innerhalb der hyperelastischen Material-Modelle lassen sich dabei verschiedene Güteklassen feststellen. Zum Beispiel das sogenannte St.Venant-Kirchhoff Modell, welches das einfachste hyperelastische Modell bildet und in der Bildverarbeitung häufig verwendet wird. Oder das Modell nach Ogden [6, 23], welches große Deformationen  $\varphi$  realitätsnäher beschreibt, jedoch komplexer in der Handhabung ist. Alle hier verwendeten Begriffe gehören zur gängigen Nomenklatur in der Kontinuumsmechanik und können insbesondere unter [7] nachgeschlagen werden.

Ein Material wird genau dann als elastisch bezeichnet, wenn es bei Krafteinwirkung seine Form verändert und bei Aufhebung dieser Kraft wieder in den Ursprungszustand zurückkehrt. Das heißt, es reagiert reversibel auf einwirkende Kräfte. Im Folgenden wird das Elastizitätsmodell nach St. Venant und Kirchhoff genauer dargestellt.

## St. Venant-Kirchhoff Modell

Der Ansatz von St. Venant-Kirchhoff betrachtet den relativen Abstand von Punkten zueinander. Sei  $\mathbf{x} \in \Omega$  und  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ , dann ist der Abstand zwischen  $(\mathbf{x} + \mathbf{v})$  und  $\mathbf{x}$ :

$$\|(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{v}\|_2 = (\mathbf{v}^\top \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1)$$

Entsprechend betrachten wir nun den Abstand der beiden Punkte im Bild von  $\varphi$ . Da  $\varphi$  nach Voraussetzung mindestens einmal stetig differenzierbar ist, gilt mit einer Taylor-Entwicklung:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{x}) + \nabla \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{v} + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|_2^2) \\ \iff \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{x}) &= \nabla \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{v} + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|_2^2) \\ \iff \|\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{x})\|_2 &= \|\nabla \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{v}\|_2 + \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|_2^2) \\ \implies \|\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{x})\|_2 &\approx \|\nabla \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{v}\|_2 \\ \iff \|\varphi(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{x})\|_2 &\approx (\mathbf{v}^\top \nabla \varphi(\mathbf{x})^\top \nabla \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Wir betrachten nun die jeweils rechte Seite von (3.1) und (3.2). Es wird dabei deutlich, dass eine Längenänderung maßgeblich durch  $\nabla \varphi(\mathbf{x})^\top \nabla \varphi(\mathbf{x})$  beschrieben wird.

## Strain und Stored Energy Function

Verzerrungen (engl. Strain) werden im St. Venant-Kirchhoff Modell durch  $\mathbf{C} := \nabla \varphi^\top \nabla \varphi$ , den *Right Cauchy-Green* Tensor, beschrieben [7].  $\mathbf{C}$  ist invariant unter rigiden Transformationen  $\varphi$ . Wir zeigen diese Invarianz: Sei  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}$ , wobei  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine orthogonale Rotationsmatrix und  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$  der Translationsanteil ist. Weiterhin sei  $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  die Einheitsmatrix. Damit gilt, dass

$$\mathbf{C} = \nabla \varphi^\top \nabla \varphi = \nabla(\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t})^\top \nabla(\mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t}) = \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I},$$

also der Strain-Tensor invariant unter rigiden Transformationen ist. Das bedeutet, dass Verzerrungen in einem Körper unabhängig von seiner Lage im Raum sind. Eine modi-

fizierte Variante von  $\mathbf{C}$  ist der sogenannte *Green-St. Venant Strain*:

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}). \quad (3.3)$$

Durch die Subtraktion von  $\mathbf{I}$  stellt man sicher, dass  $\mathbf{E}$  für rigide Deformationen verschwindet. Der Vorfaktor  $\frac{1}{2}$  wurde dabei lediglich aus historischen Gründen eingeführt. Die *Strain Energy Density Function* oder auch *Stored Energy Function* (SEF)

$W: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$W(\mathbf{E}) := \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2), \quad (3.4)$$

ordnet einer Verzerrung  $\mathbf{E}$  eine Energie zu. Diese Energie kann als die Arbeit aufgefasst werden, die notwendig ist um eine Verzerrung  $\mathbf{E}$  zu realisieren. Dabei wurde  $W$  im St. Venant-Kirchhoff Modell so konzipiert, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen im Körper gibt [7]. Die beiden Faktoren  $\lambda$  und  $\mu$  in (3.4) heißen *Lamé Konstanten* und steuern das Materialverhalten. Eine explizite Angabe von  $\lambda$  und  $\mu$  findet hier nicht statt, da die beiden Faktoren später im Registrierungsproblem durch  $\alpha$  skaliert werden. Das Integral

$$P[\mathbf{u}] = \int_{\Omega} W(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \, dx,$$

ist das elastische Potential auf  $\Omega$ .

## Zusammenhang zur linearen Elastizität

Der Vollständigkeit halber wird folgend der Schluss zum linear elastischen Modell aus Gleichung (2.7) gezogen. Die dabei verwendete Annahme ist, dass der Green-St. Venant Strain

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u})$$

linear approximiert werden kann. Durch fallen lassen des Terms  $\nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}$  erhält man die Approximation

$$\mathbf{E}^l = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u}).$$

Diese Approximation ist jedoch nur valide für sehr kleine Ableitungen  $\nabla \mathbf{u}$ , da in diesem Fall der quadratische Term  $\nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}$  verschwindend klein wird. Des Weiteren geht beim Verwerfen des quadratischen Terms die Invarianz bzgl. der Rotation verloren. Man kann zeigen, dass das linearisierte elastische Potential

$$P^{\text{linear}}[\mathbf{u}] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} W(\mathbf{E}^l(\mathbf{u})) \, d\mathbf{x}$$

in (2.7) überführbar ist, so dass dieses Modell nicht nur linear im Strain-Spannung Verhalten, sondern auch linear im Deformation-Strain Verhalten ist.

Wir kehren wieder zum St. Venant-Kirchhoff Modell zurück. Zusammen mit dem Strain (3.3) und der SEF (3.4) definieren wir

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{qe}}[\mathbf{u}] &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega} W(\mathbf{E}(\mathbf{u})) \, d\mathbf{x}, \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2) \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

den in dieser Arbeit verwendeten quadratisch elastischen Regularisierer. Mit  $\mathcal{R}^{\text{qe}}$  soll das in der Literatur beschriebene elastische Verhalten von Organen wie der Lunge oder der Leber modelliert werden. Dieser Term alleine kann allerdings nicht Faltungen im Deformationsfeld vermeiden [14]. Im folgenden Abschnitt wird zur Behandlung dieses Problems eine Erweiterung der Regularisierung vorgestellt.

## 3.2 Volumen Regularisierung

Um eine faltenfreie Deformation sicherzustellen betrachten wir den *Satz von der Umkehrabbildung* [11]. Dieser besagt, dass für eine beliebige stetig differenzierbare Deformation  $\boldsymbol{\varphi}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  die Implikation

$$\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \implies \boldsymbol{\varphi} \text{ ist lokal diffeomorph auf } \Omega \quad (3.6)$$

gilt. Dabei bedeutet *lokal diffeomorph*, dass für jeden Punkt  $\mathbf{a} \in \Omega$  eine Umgebung  $U_{\mathbf{a}} \subset \Omega$  existiert, so dass  $\boldsymbol{\varphi}|_{U_{\mathbf{a}}}$  eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung besitzt. Die Determinante  $\det \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$  der Jakobimatrix einer Deformation ist in vielen Anwendungsgebieten von großer Bedeutung. Entsprechend hat sie den Eigennamen *Funktionaldeter-*



ABBILDUNG 3.1: Beispiel einer globalen Faltung: Links ist ein undeformierter Stab abgebildet. Rechts ist er so deformiert worden, dass die beiden Enden sich überlappen. Die zugrunde liegende Deformation ist somit nicht diffeomorph, sie kann allerdings lokal-diffeomorph sein.

*minante* erhalten. Es ist bekannt, dass die Funktionaldeterminante eines Vektorfelds  $\varphi$  dessen lokale Volumenänderung beschreibt [10]. Es gilt für die Funktionaldeterminante und ein beliebiges  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ : Wenn  $\det(\nabla\varphi(\mathbf{x}_0)) = 1$ , dann bleibt das Volumen in einem infinitesimal kleinen Bereich um  $\mathbf{x}_0$  konstant. Gilt  $\det(\nabla\varphi(\mathbf{x}_0)) > 1$ , dann wird das Volumen um  $\mathbf{x}_0$  größer. Entsprechend gilt für  $\det(\nabla\varphi(\mathbf{x}_0)) < 1$ , dass das Volumen um  $\mathbf{x}_0$  kleiner wird. Durch die Forderung

$$\det(\nabla\varphi(\mathbf{x})) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (3.7)$$

können lokale Faltungen, wie die in Abbildung 2.1 in Kapitel 2, nicht auftreten. Faltungen auf globalem Maßstab können mit (3.7) nicht abgefangen werden, da  $\varphi$  nicht notwendigerweise global injektiv ist. In Abbildung 3.1 wird ein Beispiel einer globalen Faltung veranschaulicht. Ein lokal faltungsfreies  $\varphi$  wird im Rahmen dieser Arbeit als ausreichend angenommen. Unter Verwendung der Stetigkeit von  $\varphi$  und da die Identität  $\varphi^{\text{id}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  mit  $\det(\nabla\varphi^{\text{id}}(\mathbf{x})) = 1 > 0$  auch weiterhin eine zulässige Deformation sein soll, fordern wir an das gesuchte  $\varphi$ :

$$\det(\nabla\varphi(\mathbf{x})) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.8)$$

Das bedeutet, durch Sicherstellen von (3.8) gilt die Implikation aus (3.6) und wir erhalten ein lokal faltungsfreies  $\varphi$ . Zur Umsetzung von (3.8) definieren wir eine sogenannte *Penalty-Funktion*  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$  durch:

$$P(x) := \begin{cases} \log^2(x), & x > 0 \\ \infty, & x \leq 0 \end{cases}. \quad (3.9)$$

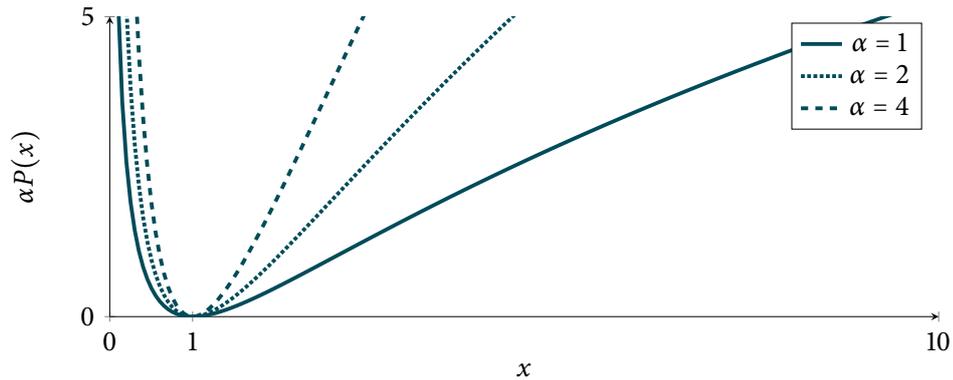


ABBILDUNG 3.2: Darstellung der Penalty-Funktion  $P$  mit verschiedenen Vorfaktoren  $\alpha$ .

Diese Funktion hat die Eigenschaft, dass sie ihr globales Minimum bei  $x_{\min} = 1$  mit  $P(x_{\min}) = 0$  annimmt und für  $\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x)$  sowie  $\lim_{x \rightarrow \infty^+} P(x)$  gegen  $\infty$  geht (siehe Abbildung 3.2). Ausgewertet an der Funktionaldeterminante bedeutet dies: Wenn  $\varphi$  die Identität ist, dann folgt  $\det(\nabla \varphi) = 1$  und  $P(\det(\nabla \varphi))$  ist gleich null. Falls jedoch starke Stauchungen zu  $\det(\nabla \varphi) \rightarrow 0$  bzw. starke Dehnungen zu  $\det(\nabla \varphi) \rightarrow \infty$  führen, dann folgt  $P(\det(\nabla \varphi)) \rightarrow \infty$ . Des Weiteren hat  $P$  eine interessante Symmetrieeigenschaft. Es gilt für einen beliebigen Punkt  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
 P(x^{-1}) &= \log^2(x^{-1}) \\
 &= (\log(1) - \log(x))^2 \\
 &= \log^2(x) \\
 &= P(x).
 \end{aligned}$$

Auch für den kritischen Punkt  $x = 0$  lässt sich diese Symmetrie durch Grenzwertbildung nachweisen. Bezogen auf die Funktionaldeterminante bedeutet dieser Zusammenhang, dass Stauchungen und Dehnungen im selben Maße bestraft werden.

Mit  $P$  definieren wir einen zweiten Regularisierungsterm

$$\mathcal{R}^{\text{vol}}[\mathbf{u}] := \int_{\Omega} P(\det(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{I})) \, d\mathbf{x},$$

dessen Bezeichnung  $\mathcal{R}^{\text{vol}}$  daher kommt, dass er Volumenänderungen in einem beliebigen  $d$ -dimensionalen Raum kontrolliert. Der Begriff des Volumens steht bei  $d = 2$  entspre-

chend für eine Fläche.

Damit lautet das Registrierungsproblem bis hierhin:

$$\begin{array}{ll} \min_{\boldsymbol{\varphi}} & \left\{ \mathcal{D}[T, R; \boldsymbol{\varphi}] + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe}}[\mathbf{u}] + \beta \mathcal{R}^{\text{vol}}[\mathbf{u}] \right\} \\ \text{u. d. Nb.} & \mathcal{C}[\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma. \end{array} \quad (3.10)$$

Dabei ist für alle  $\beta > 0$  sichergestellt, dass eine Lösung des Problems faltungsfrei ist. Der hier gewählte Ansatz einer Registrierung mit Nebenbedingung erfordert eine gesonderte Betrachtung bevor das Distanzmaß explizit angegeben werden kann. Diese findet im folgenden Kapitel statt.



## 4 Registrieren mit Nebenbedingungen

Die in dieser Arbeit vorgestellte Sliding-Motion-Nebenbedingung wirkt auf eine Menge  $\Sigma$  im zu deformierenden Bild  $T$ . Das bedeutet, dass auch die Menge auf der die Nebenbedingung gilt gemeinsam mit  $T$  deformiert wird (siehe Abbildung 4.1). Diese Tatsache kann zu unerwünschten Unstetigkeiten in der Nebenbedingung führen. Es folgt eine Beschreibung der Ursache dieses Problems bei der anschließend der sog. *Lagrange-Ansatz* als ein Lösungsansatz vorgestellt wird.

Der Lagrange-Ansatz ist, ebenso wie der Euler-Ansatz, ein Weg zur Beschreibung von Deformationen. Beide entstammen der Kontinuumsmechanik und finden dort bei der formalen Beschreibung von Partikelbewegungen Verwendung. Im Rahmen der Bildverarbeitung lassen sich jene Partikel entsprechend als Koordinaten der Farbwerte auffassen, so dass die Wahl des Transformationsmodells auch Auswirkungen auf das Distanzmaß hat.

### Euler- und Lagrange-Ansatz

Sei  $\varphi$  ein Vektorfeld wie unter (2.1) gefordert und invertierbar auf  $\Omega$ . Somit gilt für ein beliebiges  $\mathbf{x} \in \Omega$  und  $\boldsymbol{\psi} := \varphi^{-1}$  die Äquivalenz:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff \boldsymbol{\psi}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}. \quad (4.1)$$

Wir betrachten ein Tupel  $(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$  aus einer Koordinate  $\mathbf{x} \in \Omega$  und ihrem Funktionswert im Template-Bild. Der Lagrange-Ansatz beschreibt die Verschiebung des Tupels durch die Vorwärtsabbildung  $\boldsymbol{\varphi}$ . Das heißt,  $(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$  wird bewegt und kommt an  $(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), T(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})))$  an. Der Lagrange-Ansatz fixiert also einen Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  im undeformier-

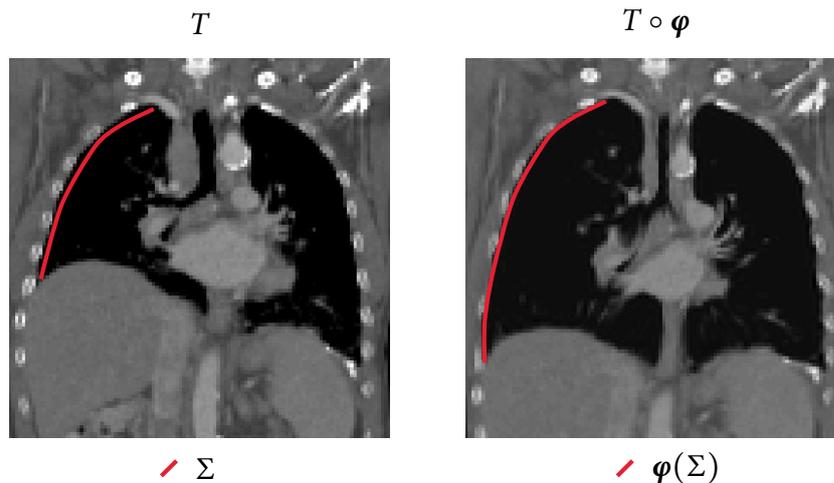


ABBILDUNG 4.1: Beispiel der Deformation der Menge  $\Sigma$  an der die Sliding-Motion-Nebenbedingung aktiv ist.  
 Links: Das undeformierte Bild  $T$  mit der darauf definierten Menge  $\Sigma$ .  
 Rechts: Das deformierte Bild  $T$  mit dem entsprechend mitdeformierten  $\Sigma$ .

ten Bild und beschreibt wohin er verschoben wird. Im Euler-Ansatz wiederum wird eine Position  $\mathbf{y} \in \Omega$  im deformierten Bild fixiert und mit der Rückwärtstransformation  $\psi$  dessen Ursprung beschrieben. Also wird im Euler-Ansatz das Tupel  $(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$  auf  $(\mathbf{y}, T(\psi(\mathbf{y})))$  abgebildet. Zusammengefasst bedeutet das:

**Lagrange:** Der Funktionswert  $T(\mathbf{x})$  wird an die neue Position  $\varphi(\mathbf{x})$  gesetzt.

**Euler:** Der Funktionswert  $T(\psi(\mathbf{y}))$  wird an die alte Position  $\mathbf{y}$  gesetzt.

Eine Visualisierung dieser Idee ist in Abbildung 4.2 veranschaulicht. Die Bedeutung dieser Beschreibungen für ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen wird im folgenden Abschnitt behandelt.

## 4.1 Registrieren mit Nebenbedingungen im Lagrange-Ansatz

Die gängige Beschreibung von Deformationen im Bereich der Bildregistrierung ist die nach Euler. Wie bereits erwähnt kann jedoch gezeigt werden, dass bei Registrierung mit Nebenbedingungen eine Beschreibung nach Lagrange Vorteile bietet.

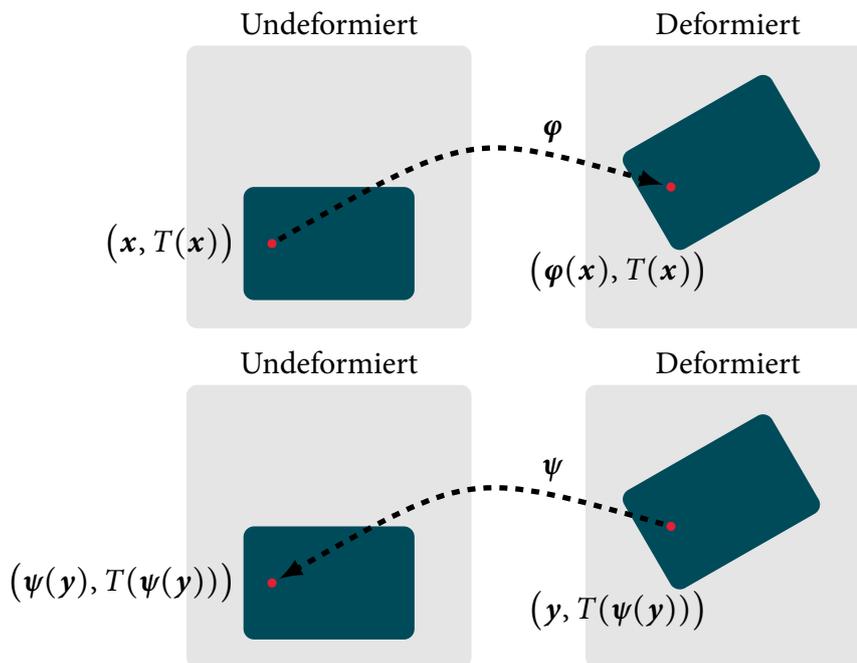


ABBILDUNG 4.2: Vergleich von Euler- und Lagrange-Ansatz. Oben: Die Vorwärtsbeschreibung  $\varphi$  einer Deformation eines Punktes nach Lagrange. Unten: Die Rückwärtsbeschreibung  $\psi$  einer Deformation eines Punktes nach Euler.

Betrachten wir eine beliebige auf  $\varphi$  wirkende Nebenbedingung im Lagrange-Ansatz gekennzeichnet durch ein Superskript L:

$$\mathcal{C}^L[\varphi](x) = 0, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Aufgrund der Invertierbarkeit von  $\varphi$  und mit Hilfe der Notation aus (4.2) kann die Nebenbedingung zu

$$\mathcal{C}^E[\psi](y) = 0, \quad \forall \psi(y) \in \Sigma,$$

umgeschrieben werden. Dies ist eine auf  $\psi$  wirkende äquivalente Formulierung im Euler-Ansatz, welche durch ein Superskript E gekennzeichnet wird. Bei einem Vergleich dieser Darstellungen fällt auf, dass in der Lagrange-Beschreibung die Punkte an denen die Nebenbedingung aktiv ist lediglich von  $\Sigma$  abhängen. In der Euler-Beschreibung hingegen findet sich eine Abhängigkeit der Punkte, an denen die Nebenbedingung aktiv ist, von  $\Sigma$  als auch von  $\psi$ . Diese Abhängigkeit bedeutet, dass man in der laufenden Registrierung den Bereich an dem die Nebenbedingung aktiv ist in jedem Schritt neu ermitteln muss. Im Lagrange-Ansatz hingegen wird dieser Bereich einmalig definiert und für den gesamten Verlauf der Registrierung festgehalten.

Ein weiterer Nachteil der beschränkten Optimierung im Euler-Ansatz ist, dass die Nebenbedingung nicht mehr stetig in  $\psi$  ist. Somit ist sie insbesondere auch nicht mehr differenzierbar in  $\psi$ . Formal wird dies deutlich durch Multiplikation der Nebenbedingung mit einer Indikatorfunktion  $\mathcal{X}_\Sigma$ :

$$\mathcal{X}_\Sigma: \Omega \rightarrow \{0,1\}, \quad \mathbf{x} \mapsto \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Sigma \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Sigma \end{cases}. \quad (4.2)$$

Mit (4.2) kann die Euler-Nebenbedingung

$$\mathcal{C}^E[\psi](\mathbf{y}) = 0, \quad \forall \psi(\mathbf{y}) \in \Sigma$$

äquivalent umgeformt werden zu:

$$\mathcal{X}_{\psi(\Sigma)}(\mathbf{y})\mathcal{C}^E[\psi](\mathbf{y}) = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega.$$

Durch die Nicht-Stetigkeit der Indikatorfunktion ergibt sich somit auch die Nicht-Stetigkeit der Nebenbedingung und letztlich damit auch die Nicht-Differenzierbarkeit der Nebenbedingung.

Zur besseren Handhabung der Nebenbedingung entscheiden wir uns im Weiteren für eine Deformationsbeschreibung nach Lagrange.

## 4.2 SSD-Distanzmaß im Lagrange-Ansatz

In der Lagrange-Beschreibung betrachten wir die Vorwärtstransformation  $\varphi$ . Wie zu Beginn von Kapitel 4 bereits erläutert, gilt mit ihr:  $(\mathbf{x}, T(\mathbf{x}))$  wird durch  $\varphi$  nach  $(\mathbf{y}, T(\mathbf{x})) = (\mathbf{y}, T(\varphi^{-1}(\mathbf{y})))$  bewegt. Dies gilt für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  oder äquivalent für alle  $\mathbf{y} \in \varphi(\Omega)$ . Wenn man diese Notation auf (2.3) überträgt erhält man:

$$\mathcal{D}[T, R] = \frac{1}{2} \int_{\varphi(\Omega)} (T(\varphi^{-1}(\mathbf{y})) - R(\mathbf{y}))^2 d\mathbf{y}. \quad (4.3)$$

Diese Darstellung des SSD-Maßes nach Lagrange hat zwei entscheidende Nachteile: Zum einen ist die Integrationsdomäne abhängig von  $\varphi$  und zum anderen ist das Template-Bild abhängig von  $\varphi^{-1}$ . Diese Abhängigkeit wird mit  $\mathbf{x} = \varphi^{-1}(\mathbf{y})$  und  $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$  aufgelöst, so

dass (4.3) zu

$$\mathcal{D}[T, R] = \frac{1}{2} \int_{\varphi(\Omega)} (T(\mathbf{x}) - R(\varphi(\mathbf{x})))^2 d\mathbf{y}$$

wird. Die Abhängigkeit des Integrationsgebiets von der Deformation kann schließlich mithilfe des Transformationssatzes [10] aufgehoben werden. Nach seiner Anwendung auf  $\mathcal{D}$  folgt:

$$\mathcal{D}[T, R] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (T(\mathbf{x}) - R(\varphi(\mathbf{x})))^2 |\det \nabla \varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Das heißt, dass (4.4) eine konstante Integrationsdomäne  $\Omega$  besitzt. Mit der Funktionaldeterminante  $\det(\nabla \varphi(\mathbf{x}))$  im Integranden gilt, dass  $\mathcal{D}$  unabhängig von  $T$  und  $R$  minimiert werden kann. Dies geschieht, wenn für  $\varphi$  auf  $\Omega$  gilt:

$$\det \nabla \varphi \rightarrow 0.$$

Um diesen Fall auszuschließen, wurde in [12] eine Normierung vorgeschlagen. Sei  $|\varphi(\Omega)|$  das Volumen der Lagrange-Integrations-Domäne aus (4.3), mit

$$|\varphi(\Omega)| := \int_{\varphi(\Omega)} d\mathbf{y}.$$

Durch eine erneute Anwendung des Transformationssatzes ergibt sich:

$$|\varphi(\Omega)| = \int_{\Omega} |\det \nabla \varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Durch eine Normierung von (4.4) mit (4.5) erhalten wir letztlich das hier verwendete SSD-Maß im Lagrange-Ansatz:

$$\mathcal{D}^L[T, R; \varphi] := \frac{1}{2} |\varphi(\Omega)|^{-1} \int_{\Omega} (T(\mathbf{x}) - R(\varphi(\mathbf{x})))^2 |\det \nabla \varphi(\mathbf{x})| d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Mit ihm lautet das Optimierungsproblem mit vollständiger Zielfunktion:

$$\begin{aligned} \min_{\varphi} \quad & \left\{ \mathcal{D}^L[T, R; \varphi] + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe}}[\mathbf{u}] + \beta \mathcal{R}^{\text{vol}}[\mathbf{u}] \right\} \\ \text{u. d. Nb.} \quad & \mathcal{C}[\varphi](\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Das folgende Kapitel behandelt die bislang allgemein gehaltene Nebenbedingung. Nach einer kurzen Zusammenfassung über den aktuellen Stand zur Bewegungsschätzung des Gleitverhaltens von Organoberflächen, wird die kontinuierliche Formulierung der Nebenbedingung vorgestellt.

# 5 Sliding Motion

Gängige Regularisierungsansätze fordern eine globale Glattheit der Deformation, um deren Plausibilität zu erhöhen. Der Nutzen dieser Forderung ist allerdings zumindest an Objektgrenzen in Frage zu stellen. Zwischen angrenzenden Strukturen, die nicht fest miteinander verwachsen sind, kann ein Gleitverhalten auftreten. Besonders ausgeprägt tritt dieses Verhalten im Bereich der Lunge auf: Durch eine Kontraktion und Relaxation der Atemmuskulatur gleitet die Lunge am Rippenfell entlang. Dieses Aneinandergleiten beschreibt ein unstetiges Deformationsfeld. In gängigen Registrierungsansätzen wird dieses unstetige Verhalten allerdings nicht berücksichtigt. Ein Vergleich bisheriger Arbeiten zur Bewegungsschätzung von aneinander gleitenden Organoberflächen findet sich in [28].

Es folgt nach einer kurzen Vorstellung bisheriger Arbeiten zu diesem Thema die Beschreibung des hier verfolgten Lösungsansatzes: Eine Nebenbedingung an die oben modellierte Zielfunktion zur Beschreibung des Gleitverhaltens.

## 5.1 Bisherige Arbeiten

Die Arbeiten, die ein Aneinandergleiten von Organoberflächen behandeln, lassen sich grob in zwei Klassen einteilen: Zum einen den biophysikalischen Modellierungs-Ansätzen, welche in der Regel als Randwertprobleme formuliert werden. Zum anderen den Registrierungs-Ansätzen. Bei diesen formuliert man häufig (wie auch in der vorliegenden Arbeit) ein zu lösendes Variationsproblem. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit wird eine Auswahl an bisherigen Ansätzen kurz vorgestellt.

## Bewegungsschätzung durch Modellierung

Randwertprobleme sind eine Problemklasse in der man eine Lösung einer Differentialgleichung bei einem vorgegebenen Verhalten der Lösung am Rand sucht. Übertragen auf das vorliegende Problem bedeutet das: Unter einem vorgegebenen Gleitverhalten des Organs am Rand werden die Deformationen im Inneren geschätzt. Die dabei zu lösende Differentialgleichung ist in diesem Kontext üblicherweise physikalisch motiviert. Das vermutlich verbreitetste physikalische Modell ist das Elastizitätsmodell nach St. Venant-Kirchhoff. Dieses wurde in seiner variationellen Form bereits in Abschnitt 3.1 vorgestellt. Für die Randbedingungen existieren zwei verbreitete Ansätze. Bei beiden müssen zunächst die Organoberflächen aus Referenz- und Template-Bild extrahiert werden.

Im ersten Ansatz wird zunächst für jeden Punkt der Referenz-Oberfläche ein korrespondierender Punkt auf der Template-Oberfläche bestimmt. Gängig ist, dass der nächstgelegene Punkt der Template-Oberfläche gewählt wird. Diese Korrespondenzen dienen als Schätzung der Verrückungen der Organoberfläche. Das Randwertproblem wird nun mit diesen vorgegebenen Verrückungen als Dirichlet-Randbedingungen gelöst [4, 21].

Der zweite Ansatz modelliert Lungenbewegungen. Die Template-Oberfläche wird am Hauptbronchus mittels einer Dirichlet-Randbedingung fixiert. Entlang der restlichen Oberfläche wird das Gleitverhalten explizit modelliert. Hierfür wird an der Oberfläche zunächst ein konstanter negativer Druck vorgegeben, so dass eine Expansion der Lunge erzwungen wird. Ein aus der Expansion resultierender Kontakt der Lungenoberflächen von Template- und Referenz-Bild wird mit einer *Signorini-Bedingung* [16] behandelt. Diese verhindert eine gegenseitige Durchdringung der Oberflächen und fordert einen reibungsfreien Kontakt aneinander. Arbeiten mit diesem Ansatz sind unter anderem [2, 27].

Mit einer Argumentation analog zu der aus Abschnitt 4.1 wird deutlich, dass der Lagrange-Ansatz hierbei Vorteile aufgrund der verwendeten Randbedingungen bietet.

## Bewegungsschätzung durch Registrierung

Aus den Registrierungsansätzen zur Behandlung eines Aneinandergleitens von Oberflächen, werden jetzt exemplarisch zwei vorgestellt. Der vermutlich einfachste Ansatz ist der des Maskierens. Nach einer Segmentierung des Organs in Referenz- und Template-

Bild findet die Registrierung lediglich auf den segmentierten Teilgebieten statt. Das daraus resultierende Verrückungsfeld wird nicht durch die umliegenden Strukturen geglättet, was die Plausibilität dieser Schätzung am Lungenrand erhöhen kann.

Der zweite Ansatz basiert auf einer richtungsabhängigen Regularisierung. Schmidt-Richberg et al. [26] haben eine Entkopplung von Normalen- und Tangentialanteil der Verrückung  $\mathbf{u}$  im diffusiven Regularisierer vorgeschlagen. Mit dieser wurde eine Glättung ausschließlich in Normalenrichtung zur Organoberfläche realisiert. Das heißt, eine Bewegung in Tangentialrichtung zur Organoberfläche wird nicht geglättet. Unstetigkeiten entlang dieser Richtung sind somit realisierbar. Im Gegensatz zu Randwertproblemen werden diese Registrierungsprobleme in der Regel im Euler-Ansatz formuliert.

## 5.2 Sliding Motion als Nebenbedingung

Das in dieser Arbeit noch fehlende Gleitverhalten wird über die Nebenbedingung des Problems

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\varphi}} \quad & \left\{ \mathcal{D}^L [T, R; \boldsymbol{\varphi}] + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe}}[\mathbf{u}] + \beta \mathcal{R}^{\text{vol}}[\mathbf{u}] \right\} & (5.1) \\ \text{u. d. Nb.} \quad & \mathcal{C}[\boldsymbol{\varphi}](\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \Sigma. \end{aligned}$$

aus (5.1) eingebunden. In dem hier vorgestellten Modell wird dabei die Existenz einer Trennschicht zwischen den gleitenden Strukturen vernachlässigt. Auch findet keine Modellierung von Reibungseffekten statt. Das bedeutet für das Beispiel der Lungenbewegung, dass das Lungen- und Rippenfell ohne Trennschicht reibungsfrei aneinander gleiten sollen. Das Ziel in diesem Abschnitt wird es sein Kriterien an  $\boldsymbol{\varphi}$  zu formulieren, so dass Unstetigkeiten im Bereich des Gleitens gestattet sind.

Der Bereich an dem das Gleitverhalten modelliert werden soll wird als  $\Sigma \subset \Omega$  bezeichnet. Es wird angenommen, dass  $\Sigma$  eine glatte und orientierbare Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^d$  ist. Es interessieren uns dabei zwei mögliche Fälle, in denen  $\Sigma$  eine geschlossene oder nicht geschlossene Untermannigfaltigkeit sein kann.

Zunächst betrachten wir den nicht geschlossenen Fall. Sei  $\bar{\Sigma}$  eine Untermannigfaltigkeit, so dass  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$  ebenfalls eine glatte und orientierbare Untermannigfaltigkeit ist. Weiter soll  $\Omega$  durch  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$  in zwei Teile  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zerlegt werden (siehe Abbildung 5.1, links). Wir

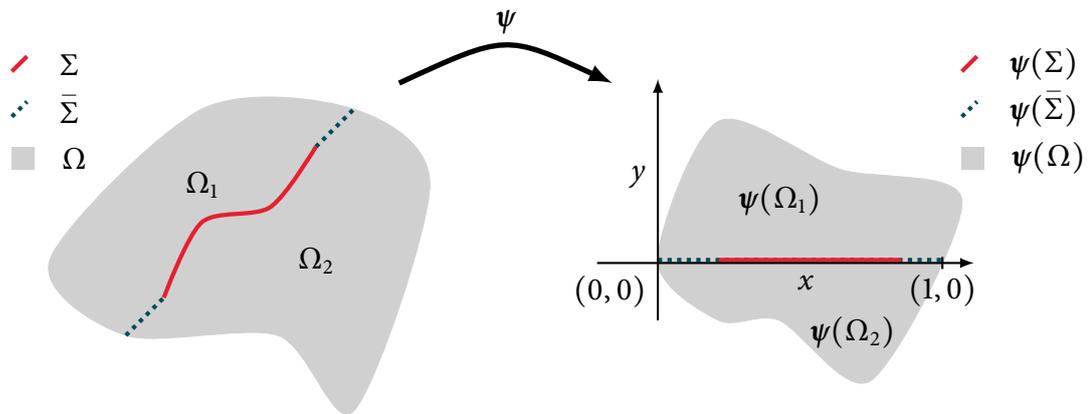


ABBILDUNG 5.1: Beispiel einer nicht geschlossenen und  $\Omega$  aufteilenden Untermannigfaltigkeit  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$  für  $d = 2$ .  
 Links: Aufspaltung des Grundgebiets  $\Omega$  in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  wobei beide die Grenze  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$  beinhalten.  
 Rechts:  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$  wurde durch  $\psi$  auf das Intervall  $(0, 1)$  der  $x$ -Achse abgebildet.

formalisieren diese Einteilung: Es existiert eine diffeomorphe Abbildung  $\psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\mathbf{x} \mapsto \psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x}))^\top$ , so dass

$$\psi(\Sigma \cup \bar{\Sigma}) = (0, 1)^{d-1} \times \{0\}.$$

Das heißt, dass das Bild von  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$  der offene Einheitswürfel der ersten  $d - 1$  Raumrichtungen ist (siehe Abbildung 5.1, rechts). Mit dieser Konstruktion definieren wir die Unterteilung des Gebiets  $\Omega$  in

$$\begin{aligned} \Omega_1 &:= \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \psi_d(\mathbf{x}) \geq 0\}, \\ \Omega_2 &:= \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \psi_d(\mathbf{x}) \leq 0\}. \end{aligned}$$

Für den Fall einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit  $\Sigma$  erfolgt eine analoge Einteilung in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ : Es gilt in diesem Fall, dass  $\bar{\Sigma} = \Sigma$ . Weiter gilt, dass eine diffeomorphe Abbildung  $\psi$  wie oben existiert, so dass

$$\psi(\Sigma) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \mid \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}.$$

Das heißt, es existiert eine diffeomorphe Abbildung  $\psi$ , die  $\Sigma$  auf den Einheitskreis abbil-

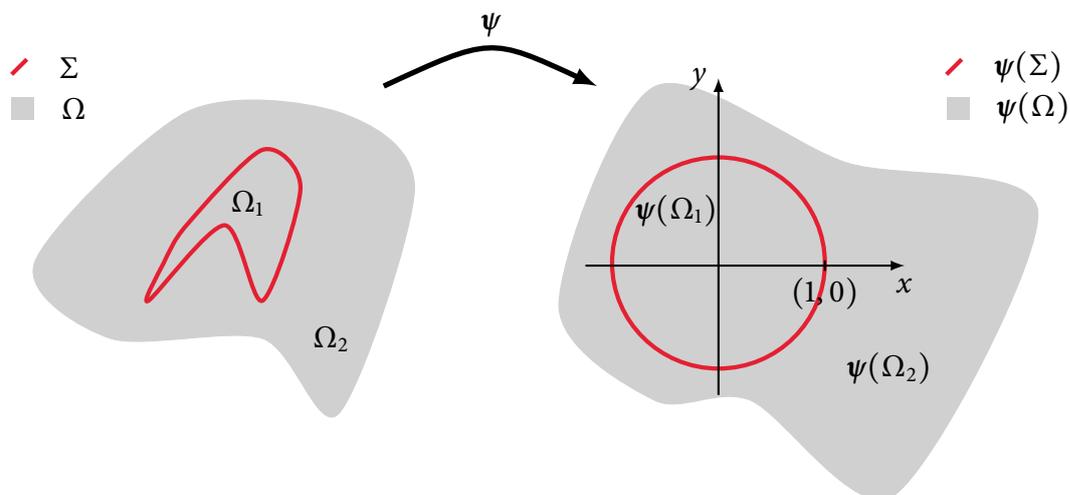


ABBILDUNG 5.2: Beispiel einer geschlossenen und  $\Omega$  aufteilenden Untermannigfaltigkeit  $\Sigma$  für  $d = 2$ .  
 Links: Aufspaltung des Grundgebiets  $\Omega$  in  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  wobei beide die Grenze  $\Sigma$  beinhalten.  
 Rechts:  $\psi(\Sigma)$  beschreibt den Einheitskreis.

det. Mit  $\psi$  definieren wir

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \|\psi(\mathbf{x})\|_2 \leq 1\}, \\ \Omega_2 &:= \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \|\psi(\mathbf{x})\|_2 \geq 1\},\end{aligned}$$

so dass  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  das Innere bzw. Äußere von  $\Sigma$  beschreiben (siehe Abbildung 5.2).

Die weitere Argumentation ist unabhängig davon ab, ob  $\Sigma$  offen oder abgeschlossen gewählt wurde. In beiden Fällen gilt insbesondere, dass

$$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \Sigma \cup \bar{\Sigma}.$$

Entsprechend der Zerteilung von  $\Omega$  setzen wir zwei Abbildungen

$$\begin{aligned}\varphi_1 &: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^d, \\ \varphi_2 &: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}^d\end{aligned}$$

an und koppeln diese an das gesuchte  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  mittels der Forderungen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 \Big|_{\Omega_1}, \\ \varphi &= \varphi_2 \Big|_{\Omega_2 \setminus \Sigma \cup \bar{\Sigma}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Das  $\Omega_2 \setminus \Sigma \cup \bar{\Sigma}$  gewählt wurde ist willkürlich. Mit der alternativen Wahl von  $\Omega_1 \setminus \Sigma \cup \bar{\Sigma}$  ist die weitere Argumentation analog zu der Vorgestellten. Entlang von  $\Sigma$  fordern wir mit  $\varphi_i(\Sigma) := \{\varphi_i(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Sigma\}$ ,  $i=1,2$ , dass gilt:

$$\varphi_1(\Sigma) = \varphi_2(\Sigma). \quad (5.3)$$

Da diese Gleichheit mengenweise und nicht punktweise gefordert wird, ist grundsätzlich jede erdenkbare Deformation auf  $\Sigma$  gestattet. Die Forderung (5.3) ist äquivalent dazu, dass der im Weiteren vorgestellte Abstand zwischen  $\varphi_1(\Sigma)$  und  $\varphi_2(\Sigma)$  gleich null sein soll. Mit

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \varphi_2(\Sigma)) := \inf_{\mathbf{y} \in \varphi_2(\Sigma)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2,$$

also dem kürzesten Abstand von einem  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  zu  $\varphi_2(\Sigma)$  definieren wir die einseitige Nebenbedingung

$$\int_{\Sigma} \text{dist}(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\Sigma))^2 dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.4)$$

Diese ist jedoch problematisch, denn durch die einseitige Betrachtung der Distanz kann ein Schrumpfen von  $\varphi_1(\Sigma)$  begünstigt werden. Das würde bedeuten, dass  $\varphi_1(\Sigma) \neq \varphi_2(\Sigma)$  gilt, was als Riss im deformierten  $\Omega$  interpretiert werden kann (siehe Abbildung 5.3, oben). Im Weiteren betrachten wir die symmetrische Distanz

$$\mathcal{C}^{\text{SM}}[\varphi_1, \varphi_2] := \int_{\Sigma} \text{dist}(\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\Sigma))^2 dS(\mathbf{x}) + \int_{\Sigma} \text{dist}(\varphi_2(\mathbf{x}), \varphi_1(\Sigma))^2 dS(\mathbf{x}),$$

wobei das Superskript SM für Sliding Motion steht. Ihr Vorteil ist, dass diese nur für den Fall  $\varphi_1(\Sigma) = \varphi_2(\Sigma)$  mit  $\mathcal{C}^{\text{SM}}[\varphi_1, \varphi_2] = 0$  minimiert wird (siehe Abbildung 5.3, unten). Damit stellt die Nebenbedingung

$$\mathcal{C}^{\text{SM}}[\varphi_1, \varphi_2] = 0 \quad (5.5)$$

- ◆ Kurve  $\varphi_2(\Sigma)$     ↗ Nächster Punkt von  $\varphi_2(\Sigma)$  zu  $\varphi_1(\Sigma)$
- ◆ Kurve  $\varphi_1(\Sigma)$     ↖ Nächster Punkt von  $\varphi_1(\Sigma)$  zu  $\varphi_2(\Sigma)$

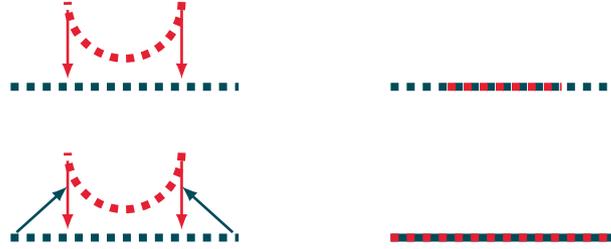


ABBILDUNG 5.3: Oben: Beispiel der einseitigen Nebenbedingung (5.4).  
 Unten: Beispiel der symmetrischen Nebenbedingung (5.5).  
 Linke Spalte: Zuweisungen der nächstgelegenen Punkte.  
 Rechte Spalte: Die jeweilige Distanz wurde auf null minimiert. Oben stellt man eine Kontraktion von  $\varphi_1(\Sigma)$  fest. Unten wird sie mit  $C^{SM}[\varphi_1, \varphi_2] = 0$  vermieden.

sicher, dass das deformierte  $\Omega$  entlang  $\Sigma$  zusammengehalten wird und beliebige Deformationen in dem Bereich gestattet sind. Zu beachten ist: Aus Sicht der Regularisierungsterme  $\mathcal{R}^{qe}$  und  $\mathcal{R}^{vol}$  ist die Menge  $\Sigma$  an der die Gleitbedingung aktiv ist eine Menge vom Maß null, so dass weiterhin über ganz  $\Omega$  regularisiert werden kann.

Mit (5.2) und (5.5) ergibt sich also die vollständige kontinuierliche Formulierung

$$\begin{aligned}
 & \min_{\varphi, \varphi_1, \varphi_2} \left\{ \mathcal{D}^L[T, R; \varphi] + \alpha \mathcal{R}^{qe}[\mathbf{u}] + \beta \mathcal{R}^{vol}[\mathbf{u}] \right\} \\
 \text{u. d. Nb.} \quad & C^{SM}[\varphi_1, \varphi_2] = 0 \\
 & \varphi = \varphi_1 \Big|_{\Omega_1} \\
 & \varphi = \varphi_2 \Big|_{\Omega_2 \setminus \Sigma \cup \bar{\Sigma}}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

des hier betrachteten Optimierungsproblems. Die modulare Struktur des Problems erlaubt es weitere analog konstruierte Nebenbedingungen an (5.6) zu fordern. Das heißt, mehrere Bereiche in denen Gleitverhalten gestattet ist sind in einem Registrierungs-durchlauf realisierbar.

Im nächsten Kapitel folgt eine Beschreibung des gewählten Diskretisierungsansatzes sowie die Diskretisierung der einzelnen Komponenten aus (5.6).



# 6 Finite-Elemente-Diskretisierung des Registrierungsproblems

Das Optimierungsproblem (5.6) wird in dieser Arbeit mit einem sogenannten *discretize-then-optimize* Ansatz gelöst. Das bedeutet, wir diskretisieren direkt die Zielfunktion inklusive Nebenbedingung, um eine Lösung des diskretisierten Problems zu berechnen. Im alternativen *optimize-then-discretize* Ansatz wird zunächst ein notwendiges Kriterium an einen Minimierer bestimmt, welches im darauf folgenden Schritt diskretisiert wird.

Eine typische Methode zur Diskretisierung von Registrierungsproblemen ist die *Finite-Differenzen-Methode*. In dieser Methode wird das betrachtete Problem üblicherweise an einem äquidistanten Gitter ausgewertet. Ableitungen können nun auf dem Gitter durch Differenzenquotienten approximiert werden. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass die dabei entstehenden Datenstrukturen recht einfach im Aufbau sind und effizient implementiert werden können. Der Nachteil ist, dass komplizierte Geometrien nur aufwendig behandelt werden können.

Im Hinblick auf das modellierte Gleitverhalten von Organen ist hier erwünscht, dass komplizierte Geometrien von  $\Omega$  gut beschrieben werden können. Die sogenannte *Finite-Elemente-Methode* erfüllt diese Voraussetzung und hat sich als das Standardverfahren in der Organmodellierung durchgesetzt. Sie hat im Vergleich zur Finite-Differenzen-Methode den Nachteil, dass die dabei entstehenden Datenstrukturen komplizierter im Aufbau sind und daher eine effiziente Implementierungen aufwendiger umzusetzen ist.

## 6.1 Finite-Elemente-Diskretisierung

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) wurde ursprünglich entwickelt um partielle Differentialgleichungen (PDE) numerisch zu lösen. Die FEM setzt die Diskretisierung dabei

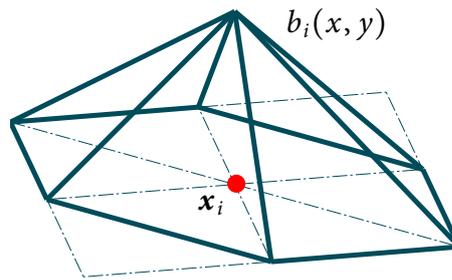


ABBILDUNG 6.1: Ein Beispiel einer Basisfunktion  $b_i$  die ihr Maximum am Punkt  $\mathbf{x}_i$  annimmt. Die zugrunde liegende Triangulation ist gestrichelt dargestellt. Der Bereich in dem  $b_i \geq 0$  ist wird durch durchgezogene Linien eingeschlossen.

am Funktionenraum der Lösung an. Hier betrachten wir den Lösungsraum der stückweise linearen aber stetigen Funktionen auf  $\Omega$  und nennen ihn  $\mathcal{A}^h$ . Das Superskript  $h$  beschreibt einen Diskretisierungsparameter. Je kleiner  $h$  gewählt wird, desto feiner ist die gewählte Diskretisierung. Als Basis von  $\mathcal{A}^h$  verwenden wir Funktionen wie unter Abbildung 6.1 dargestellt.

Wir formalisieren diese Idee wie folgt: Es wird angenommen, dass die gesuchte Lösung aus einem endlich-dimensionalen Funktionenraum  $\mathcal{A}^h$  kommt. Die Basisfunktionen dieses Raums werden als  $\{b_1, \dots, b_n\}$  mit  $b_i: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $i = 1, \dots, n$  bezeichnet. Da die Lösung  $\boldsymbol{\varphi}^h \in \mathcal{A}^h$  unseres Variationsproblems ein 2D-Vektorfeld ist, setzen wir für jede seiner Komponenten eine Linearkombination der endlichen Basis an:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}^h(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_i^x b_i(\mathbf{x}) \\ \sum_{i=1}^n c_i^y b_i(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} c_i^x \\ c_i^y \end{pmatrix} b_i(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6.1)$$

mit  $\mathbf{x} \in \Omega$  und Koeffizienten  $c_i^x, c_i^y \in \mathbb{R}$ . Das heißt, bei einer gegebenen Basis von  $\mathcal{A}^h$  ist unsere gesuchte Lösung vollständig durch endlich viele Koeffizienten  $c_i^x, c_i^y \in \mathbb{R}$  beschrieben. Eine Basis wird dabei typischerweise auf einer Zerlegung von  $\Omega$  konstruiert. Die einzelnen Teilstücke dieser Zerlegung sind dabei die namensgebenden Finiten-Elemente. Im nächsten Abschnitt wird die hier verwendete Art der Zerlegung vorgestellt.

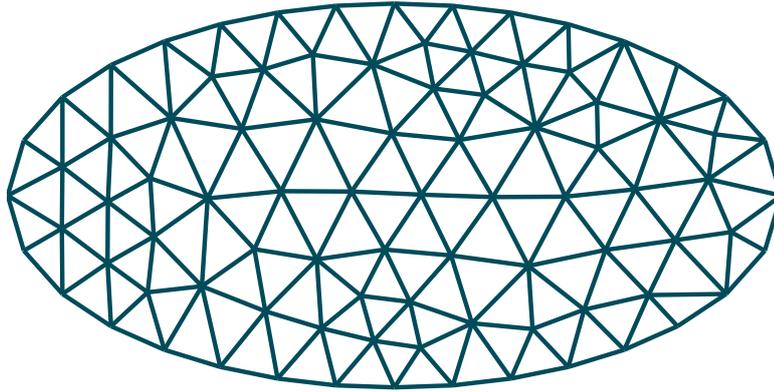


ABBILDUNG 6.2: Eine zulässige Triangulierung eines ellipsenförmigen Gebiets.

## Delaunay-Triangulation

Eine Zerlegung (oder auch Partition) von  $\Omega$  findet in einfache geometrische Strukturen statt. Wir entscheiden uns hier für eine Zerlegung in Dreiecke, welche auch als *Triangulation* bezeichnet wird. Eine Triangulation  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_m\}$  von  $\Omega$  in abgeschlossene Dreiecke  $T_i$  soll im Weiteren *zulässig* [3] sein, das heißt:

1.  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^m T_i$ .
2. Falls  $T_i \cap T_j$  nur einen Punkt hat, dann ist dieser Punkt ein gemeinsamer Eckpunkt von  $T_i$  und  $T_j$ .
3. Wenn für  $i \neq j$  der Schnitt  $T_i \cap T_j$  aus mehr als einem Punkt besteht, dann ist  $T_i \cap T_j$  eine gemeinsame Kante von  $T_i$  und  $T_j$ .

Dabei wird das erste Kriterium auf krummlinig berandeten Gebieten so abgeschwächt, dass am Rand des Gebietes eine Näherung der Zerlegung an  $\bar{\Omega}$  bereits ausreicht. In Abbildung 6.2 ist ein Beispiel einer zulässigen Triangulierung zu sehen. Weiter fordern wir an die Triangulierung, dass alle auftretenden Dreiecke möglichst gleichseitig sind. Dadurch werden Vorzugsrichtungen in der Optimierung vermieden und die numerische Stabilität des Verfahrens verbessert. Eine diesen Anforderungen genügende Zerlegung wurde in dieser Arbeit durch die Matlab-Funktion *initmesh* generiert. Diese verwendet intern den *Delaunay-Algorithmus* zur Triangulation. Im nächsten Abschnitt werden die Eingangs erwähnten Basisfunktionen diskutiert.

## Lineare Dreiecks-Elemente

Für die FEM ist es charakteristisch, dass Basisfunktionen stückweise Polynome mit jeweils kleinem Träger sind. Wir entscheiden uns für lineare Ansatzfunktionen auf den Elementen. Im Folgenden betrachten wir ein beliebig gewähltes Dreieck  $T_i \in \mathcal{T}$  mit seinen Eckpunkten  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)^\top$ ,  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)^\top$  und  $\mathbf{x}_3 = (x_3, y_3)^\top$ . Es wird dabei angenommen, dass diese Punkte gegen den Uhrzeigersinn geordnet sind. Zur Beschreibung der linearen Funktionen auf  $\mathcal{T}$  werden zunächst lokale Koordinaten auf einem  $T_i \in \mathcal{T}$  definiert.

### Baryzentrische Koordinaten

Es ist in der FEM üblich Punkte nicht im globalen sondern in einem lokalen Koordinatensystem zu beschreiben. Das heißt, ein Punkt  $\mathbf{x}$  in  $T_i$  wird relativ zu den Eckpunkten beschrieben. Wir setzen damit also für ein beliebiges  $\mathbf{x} = (x, y) \in T_i$  an:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 \xi_1 + \mathbf{x}_2 \xi_2 + \mathbf{x}_3 \xi_3 \\ 1 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3,\end{aligned}\tag{6.2}$$

dabei sind  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in [0, 1]$  die sogenannten *baryzentrischen Koordinaten* [3]. Dadurch, dass sich die baryzentrischen Koordinaten zu eins summieren, wird sichergestellt, dass sie eindeutig für jeden beliebigen Punkt in  $T_i$  sind. Somit besitzen die Eckpunkte offensichtlich die Koordinaten  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$ . Entscheidend an dieser Darstellung ist: Wenn man o.B.d.A auf der Kante von  $\mathbf{x}_1$  zu  $\mathbf{x}_2$  wandert, wird der zu  $\mathbf{x}_3$  gehörende Koeffizient  $\xi_3$  konstant null sein. Das heißt, dass der Weg zwischen  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  nicht durch  $\mathbf{x}_3$  beeinflusst wird. Dieses Argument wird uns später die Stetigkeit der Lösung des diskretisierten Problems liefern. Wir modellieren nun mit einem linearen Ansatz die Verrückung  $\mathbf{u}$  auf einem beliebigen Dreieck.

### Verrückung auf einem Dreieck

Es wird jetzt die Verrückung

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in T_i$$

auf einem beliebigen Dreieck  $T_i \in \mathcal{T}$  betrachtet. Mit zwei linearen Funktionen schreiben wir  $\mathbf{u}$  komponentenweise als

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_1 + a_2x + a_3y, \\ v(x, y) &= a_4 + a_5x + a_6y. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dabei beschreiben die Koeffizienten  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$  sowie  $a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}$  die Verschiebung in die jeweilige Raumrichtung. Da dieser Ansatz auf ganz  $T_i$  gilt, gilt er insbesondere auch an den Eckpunkten  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$  von  $T_i$ . An diesen sind uns die Verrückungen  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_2, v_2)$  und  $(u_3, v_3)$  allerdings bekannt. Mit diesen Punkten stellen wir ein lineares Gleichungssystem auf:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & & & \\ & 1 & x_2 & y_2 & & \\ & & 1 & x_3 & y_3 & \\ & & & 1 & x_1 & y_1 \\ & & & & 1 & x_2 & y_2 \\ & & & & & 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

Da alle hier betrachteten Dreiecke nicht kollineare Eckpunkte besitzen (dies folgt direkt aus der Zulässigkeit der Triangulierung), ist die Koeffizientenmatrix invertierbar und das Gleichungssystem lösbar. Aufgrund der einfachen Blockdiagonal-Struktur der Matrix berechnen wir ihre Inverse analytisch. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

ein Block aus (6.4) und seine Inverse [3] durch

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_1x_3 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \\ & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

also das gelöste Gleichungssystem aus (6.4). Die Koeffizienten  $a_1, \dots, a_6$  schreiben sich mit

$$\begin{aligned} b_1 &:= x_2 y_3 - x_3 y_2, & b_2 &:= y_1 x_3 - x_1 y_3, & b_3 &:= x_1 y_2 - x_2 y_1, \\ c_1 &:= y_2 - y_3, & c_2 &:= y_3 - y_1, & c_3 &:= y_1 - y_2, \\ d_1 &:= x_3 - x_2, & d_2 &:= x_1 - x_3, & d_3 &:= x_2 - x_1, \end{aligned}$$

schließlich als

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3), & a_2 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3), \\ a_3 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3), & a_4 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3), \\ a_5 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3), & a_6 &= \frac{1}{\det(\mathbf{A})} (d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Durch Einsetzen in (6.3) erhalten wir jetzt die linearen Interpolanten

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{(b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3) + (c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3)x + (d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3)y}{\det(\mathbf{A})}, \\ v(x, y) &= \frac{(b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3) + (c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3)x + (d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3)y}{\det(\mathbf{A})}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

die die Verrückung  $\mathbf{u}$  auf dem Dreieck  $T_i$  beschreiben. Aufgrund des linearen Ansatzes der am Anfang gewählt wurde, ist im Innern der Dreiecke ein stetiges Verhalten von  $\mathbf{u}$  gesichert. Das eine derartig konstruierte Verrückung allerdings auch an den Kanten zwischen den Dreiecken stetig ist, wird im Weiteren gezeigt. Mit  $\mathbf{u}_1 = (u_1, v_1)^\top$ ,  $\mathbf{u}_2 = (u_2, v_2)^\top$  und  $\mathbf{u}_3 = (u_3, v_3)^\top$  schreiben wir (6.6) als Linearkombination der Verrückungen

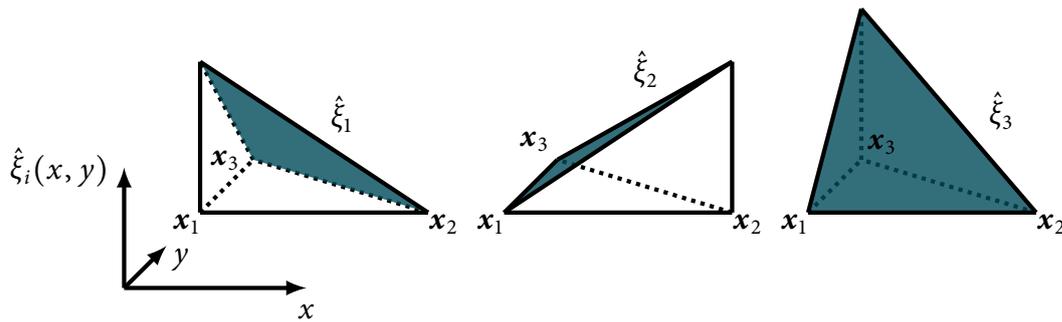


ABBILDUNG 6.3: Zu sehen sind die drei Formfunktionen  $\hat{\xi}_1$ ,  $\hat{\xi}_2$  und  $\hat{\xi}_3$  über einem beliebigen Dreieck. Sie nehmen im jeweiligen Punkt  $x_i$  den Wert 1 an und in den anderen beiden Punkten den Wert 0.

in den Ecken:

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_1 \underbrace{\frac{(b_1 + c_1x + d_1y)}{\det(\mathbf{A})}}_{\hat{\xi}_1 :=} + \mathbf{u}_2 \underbrace{\frac{(b_2 + c_2x + d_2y)}{\det(\mathbf{A})}}_{\hat{\xi}_2 :=} + \mathbf{u}_3 \underbrace{\frac{(b_3 + c_3x + d_3y)}{\det(\mathbf{A})}}_{\hat{\xi}_3 :=}. \quad (6.7)$$

Diese Darstellung ist an die erste Gleichung aus (6.2) angelehnt, wobei  $\hat{\xi}_1$ ,  $\hat{\xi}_2$  und  $\hat{\xi}_3$  den Koeffizienten  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  und  $\xi_3$  entsprechen. Es lässt sich auch zeigen, dass die Summe der  $\hat{\xi}_i$  mit  $i = 1, 2, 3$ , gleich eins ist und somit die zweite Gleichung aus (6.2) ebenfalls erfüllt ist. Das heißt, die Beschreibung eines Punktes in  $T_i$  geschieht in baryzentrischen Koordinaten. Im Abschnitt über die baryzentrischen Koordinaten wurde bereits festgestellt, dass Funktionswerte entlang einer Kante eines Dreiecks lediglich von den angrenzenden Knoten bestimmt werden. Das bedeutet nun für unsere Verrückung in (6.7), dass sie nicht nur lokal in  $T_i$  sondern auch global auf  $\mathcal{T}$  stetig ist. Wir können damit den Zusammenhang zur Basisdarstellung (6.1) herstellen.

### Zusammenhang zur Basisdarstellung

Die  $\hat{\xi}_i$  mit

$$\hat{\xi}_i(x, y) = \frac{(b_i + c_i x + d_i y)}{\det(\mathbf{A})}, \quad i = 1, 2, 3,$$

werden in der Literatur als *Formfunktionen* bezeichnet. Sie haben die Eigenschaft, dass sie im Punkt  $x_i$  gleich eins und in allen anderen Eckpunkten des Dreiecks gleich null

sind (siehe Abbildung 6.3). Wir verlassen jetzt die lokale Betrachtung eines einzelnen Dreiecks und betrachten stattdessen wieder die gesamte Triangulierung  $\mathcal{T}$ . Die Anzahl der Knoten in  $\mathcal{T}$  sei  $n \in \mathbb{N}$ . Es wird deutlich, dass man für jeden Knoten der Triangulierung eine hutförmige Basisfunktion  $b_i$  aus den Formfunktionen der angrenzenden Elemente konstruieren kann (siehe Abbildung 6.1). Gemeinsam spannen die Basisfunktionen  $b_i, i = 1, \dots, n$ , den Funktionenraum  $\mathcal{A}^h$  auf. Er ist eine Teilmenge des Raums der stückweisen linearen aber stetigen Funktionen auf  $\Omega$ . Es lässt sich nun die gesuchte Verrückung  $\mathbf{u}^h$  auf ganz  $\Omega$  als Linearkombination der Basisfunktionen schreiben. Angelehnt an (6.1) folgt damit:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} b_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

für die gesamte Verrückung und

$$\boldsymbol{\varphi}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}^h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

für die gesamte Deformation auf  $\Omega$ . Entscheidend an dieser Darstellung ist, dass es sich bei den gesuchten Koeffizienten aus (6.1) genau um die einzelnen Verrückungen  $(u_i, v_i)^\top$  in den  $n$  Knoten handelt. Mit der hier beschriebenen Finite-Elemente-Diskretisierung wird jetzt die Zielfunktion diskretisiert.

## 6.2 Diskretisierung der Zielfunktion

Die hier konstruierte Zielfunktion  $\mathcal{J}$  mit

$$\mathcal{J}[T, R; \boldsymbol{\varphi}] := \mathcal{D}^L[T, R; \boldsymbol{\varphi}] + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe}}[\mathbf{u}] + \beta \mathcal{R}^{\text{vol}}[\mathbf{u}]$$

wird nun mit einer Finite-Elemente-Methode diskretisiert. Aufgrund ihrer modularen Bauart können Distanzmaß und Regularisierungsterme gesondert diskretisiert werden. Wir beginnen mit der Diskretisierung des Distanzmaßes.

## Diskretisierung des Distanzmaßes

Wir betrachten das Distanzmaß  $\mathcal{D}^L$  aus (4.6) mit

$$\mathcal{D}^L[T, R; \boldsymbol{\varphi}] = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \int_{\Omega} (R(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) - T(\mathbf{x}))^2 |\det \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

Sei  $\mathcal{T}$  die gewählte Triangulierung bestehend aus  $n \in \mathbb{N}$  Dreieckselementen  $T_i$  mit  $i = 1, \dots, n$ . Durch eine Einschränkung unserer Betrachtung auf  $\mathcal{T}$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^L[T, R; \boldsymbol{\varphi}] &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \int_{\mathcal{T}} (R(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) - T(\mathbf{x}))^2 |\det \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n \int_{T_i} (R(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) - T(\mathbf{x}))^2 |\det \nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Auf die nun elementweisen Integrale wenden wir eine *Gauß-Quadratur* an. Sei  $T \in \mathcal{T}$  ein Dreieck mit gegen den Uhrzeigersinn geordneten Eckpunkten  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^2$  und  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann approximiert

$$Q(f) := \frac{|T|}{3} (f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) + f(\mathbf{x}_3))$$

mit  $|T| := \frac{1}{2} \det(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)$  das Integral

$$\int_T f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

für ein Polynom ersten Grades  $f$  exakt. Mit dieser Quadraturformel und  $\mathbf{x}_j^i$  dem  $j$ -ten Knoten des  $i$ -ten Dreiecks, approximieren wir  $\mathcal{D}^L[T, R; \boldsymbol{\varphi}]$  aus (6.8) durch

$$\mathcal{D}^L[T, R; \boldsymbol{\varphi}] \approx \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{|T_i|}{3} \sum_{j=1}^3 (R(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i)) - T(\mathbf{x}_j^i))^2 |\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i))|. \quad (6.9)$$

Die Funktionaldeterminante  $\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i))$  wird aufgrund der stückweisen Linearität der gesuchten Lösung  $\boldsymbol{\varphi}$  konstant auf allen Knoten  $\mathbf{x}_j^i$  mit  $j = 1, 2, 3$  eines Dreiecks sein. Weiterhin gilt für sie, dass sie die von  $\boldsymbol{\varphi}$  verursachte Flächenänderung des  $i$ -ten Dreiecks beschreibt. Wir berechnen diese für das  $i$ -te Dreieck mit den Knoten  $\mathbf{x}_j^i \in \mathbb{R}^2$  und den

Verrückungen  $\mathbf{u}_j^i = (u_j, v_j)^\top$  mit  $j = 1, 2, 3$  durch:

$$\begin{aligned} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i)) &= \det(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_j^i) + \mathbf{I}) \\ &= \det \begin{pmatrix} u_2 - u_1 + 1 & v_2 - v_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Mit der Definition  $\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) := \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i))$  für alle  $j = 1, 2, 3$  erhalten wir

$$\begin{aligned} (6.9) &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{|T_i|}{3} \sum_{j=1}^3 (R(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i)) - T(\mathbf{x}_j^i))^2 \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \\ &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{|T_i| \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i)}{3} \sum_{j=1}^3 (R(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i)) - T(\mathbf{x}_j^i))^2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Mit  $r_j^i(\boldsymbol{\varphi}) := R(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j^i)) - T(\mathbf{x}_j^i)$  und  $\mathbf{r}^i := (r_1^i(\boldsymbol{\varphi}), r_2^i(\boldsymbol{\varphi}), r_3^i(\boldsymbol{\varphi}))^\top \in \mathbb{R}^3$  sowie  $\text{diag}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} v_1 & & \\ & \ddots & \\ & & v_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  für ein  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , folgt:

$$\begin{aligned} (6.11) &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{|T_i| \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i)}{3} \sum_{j=1}^3 (r_j^i(\boldsymbol{\varphi}))^2 \\ &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n |T_i| \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \text{diag}(\mathbf{r}^i) \mathbf{r}^i \\ &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n |T_i| \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \mathbf{r}^{i^\top} \text{diag} \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \mathbf{r}^i. \\ &= \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \sum_{i=1}^n |T_i| \mathbf{r}^{i^\top} \text{diag} \left( \frac{\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i)}{3}, \frac{\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i)}{3}, \frac{\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i)}{3} \right) \mathbf{r}^i. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Wir schreiben die Summe um in eine Matrix-Vektor-Multiplikation

$$(6.12) = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r}, \quad (6.13)$$

wobei  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n}$  aus den einzelnen Komponenten der  $\mathbf{r}^i$  besteht. An korrespondierenden Positionen in  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$  befinden sich die restlichen Einträge der Summe.

Den Term  $|\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1}$  approximieren wir mit der Summe der deformierten Dreiecke  $\boldsymbol{\varphi}(T_i)$ .

Wir bestimmen solch einen Flächeninhalt durch:

$$|\boldsymbol{\varphi}(T_i)| := \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} (x_2 + u_2) - (x_1 + u_1) & (y_2 + v_2) - (y_1 + v_1) \\ (x_3 + u_3) - (x_1 + u_1) & (y_3 + v_3) - (y_1 + v_1) \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

für jedes  $T_i$  mit  $i = 1, \dots, n$ . Zusammengefasst zu  $\mathbf{T} := (|\boldsymbol{\varphi}(T_1)|, \dots, |\boldsymbol{\varphi}(T_n)|)^\top \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{e} := (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$  folgt:

$$|\boldsymbol{\varphi}(\Omega)|^{-1} \approx (\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-1}. \quad (6.15)$$

Für ein global injektives  $\boldsymbol{\varphi}$  gilt in (6.15) sogar die Gleichheit. Mit (6.13) und (6.15) ergibt sich die diskretisierte Form von  $\mathcal{D}^L[T, R; \boldsymbol{\varphi}]$

$$\mathcal{D}^{L,h} := \frac{1}{2} (\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-1} \mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r}.$$

## Diskretisierung des elastischen Regularisierers

Wir diskretisieren jetzt den hyperelastischen Regularisierer

$$\mathcal{R}^{\text{qe}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \text{tr}(\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2) \, d\mathbf{x}$$

aus (3.5) mit dem zugehörigen Green - St. Venant Strain

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^\top + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{u}).$$

Die Betrachtungen hier geschehen zunächst auf einem  $T_i \in \mathcal{T}$  mit gegen den Uhrzeigersinn geordneten Eckpunkten  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Entsprechend werden den Eckpunkten die Verrückungen  $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$  zugeordnet. Wir bestimmen jetzt  $\nabla \mathbf{u}_i$  aus (6.6) und erhalten

$$\nabla \mathbf{u}_i = \det(\mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 & c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \\ d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 & d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

also, dass  $\nabla \mathbf{u}_i$  konstant auf einem beliebigen Dreieck  $T_i$  ist. Die Faktoren  $c_j$  und  $d_j$  mit  $j = 1, 2, 3$  sind dabei wie unter (6.5) definiert. Damit schreiben wir den elementweise konstanten Strain

$$\mathbf{E}_i := \nabla \mathbf{u}_i^\top + \nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^\top \nabla \mathbf{u}_i$$

und die dazugehörige SEF

$$W_i := \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{E}_i)^2 + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{E}_i^2).$$

Wir zerlegen  $\mathcal{R}^{\text{qe}}$  in eine elementweise Darstellung und schreiben mit den  $W_i$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{qe}} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{E})^2 + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{E}^2) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_i} \frac{\lambda}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{E}_i)^2 + \mu \operatorname{tr}(\mathbf{E}_i^2) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_i} W_i \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Da die  $W_i$  konstant sind, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{T_i} W_i \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i \int_{T_i} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n W_i |T_i| \end{aligned}$$

mit dem Flächeninhalt des  $i$ -ten Dreiecks  $|T_i|$ . Die diskretisierte Form des elastischen Regularisierers

$$\mathcal{R}^{\text{qe},h} := \frac{1}{2} \mathbf{W}^\top \mathbf{T}$$

ergibt sich somit mit  $\mathbf{W} := (W_1, \dots, W_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^n$  wie oben definiert.

## Diskretisierung der Volumen-Regularisierung

Für die Diskretisierung des zweiten Regularisierungsterms schreiben wir  $\mathcal{R}^{\text{vol}}$  wieder über die Summe der Element-Integrale auf  $\mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{vol}}[\mathbf{u}] &= \int_{\Omega} P(\det(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{I})) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{T_i} P(\det(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \mathbf{I})) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

In (6.17) wird für das elementweise konstante  $\nabla \mathbf{u}$  der Term

$$\nabla \mathbf{u}_i = \det(\mathbf{A})^{-1} \begin{pmatrix} c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 & c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \\ d_1 u_1 + d_2 u_2 + d_3 u_3 & d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 \end{pmatrix}$$

aus (6.16) eingesetzt. Der resultierende Ausdruck  $\det(\nabla \mathbf{u}_i + \mathbf{I})$  entspricht der Flächenänderung des  $i$ -ten deformierten Elements. Wir definieren  $\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) := \det(\nabla \mathbf{u}_i + \mathbf{I})$  und schreiben für (6.17):

$$\begin{aligned} (6.17) &= \sum_{i=1}^n \int_{T_i} P(\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i)) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^n |T_i| P(\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i)). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Das bedeutet, die Forderung im Kontinuierlichen nach einer punktweise echt positiven Funktionaldeterminante, führt in dieser Diskretisierung zu einer Forderung nach einem echt positiven Flächeninhalt eines jeden Dreiecks.

Wir definieren  $P_i := \log(\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i))^2$  mit  $i = 1, \dots, n$  und  $\mathbf{P} := (P_1, \dots, P_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  und erhalten mit

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{vol},h} &= \sum_{i=1}^n |T_i| \log(\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i))^2 \\ &= \mathbf{T}^\top \mathbf{P} \end{aligned}$$

den diskretisierten Regularisierungsterm.

## 6.3 Diskretisierung der Nebenbedingung

Wir diskretisieren jetzt die Nebenbedingungen

$$\mathcal{C}^{\text{SM}}[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = 0, \quad (6.19)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 \Big|_{\Omega_1}, \quad (6.20)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_2 \Big|_{\Omega_2 \setminus \Sigma \cup \bar{\Sigma}}. \quad (6.21)$$

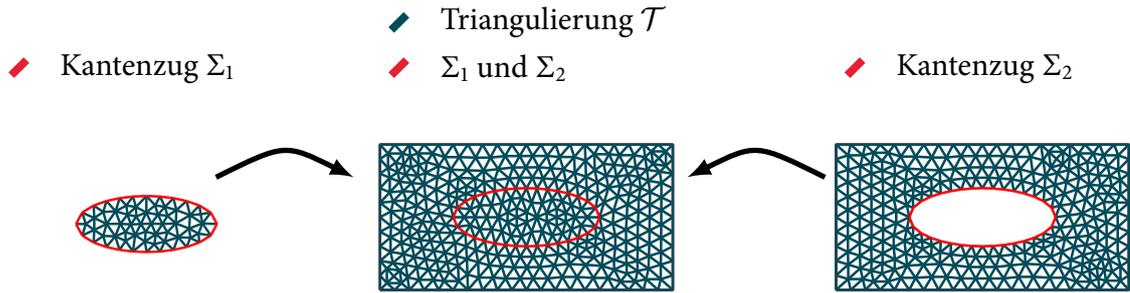


ABBILDUNG 6.4: Beispiel einer Triangulierung die sich aus zwei getrennten Gittern zusammensetzt. Es soll der Ellipse gestattet sein an der Außenstruktur zu gleiten.  
 Links: Innere Triangulation in Ellipsenform mit Kantenzug  $\Sigma_1$ .  
 Rechts: Äußere Struktur mit Öffnung beschrieben durch  $\Sigma_2$ .  
 Mitte:  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  liegen übereinander. Gleitverhalten soll auf überlagerten  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  stattfinden.

Die Bereiche  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  werden durch Triangulierungen  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  diskretisiert. Am Rand von  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  existieren jeweils identische Kantenzüge die eine Näherung an  $\Sigma \cup \bar{\Sigma}$  beschreiben. Durch Zusammenlegen der Knoten und Kanten von  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  die eine Näherung an  $\bar{\Sigma}$  beschreiben, erhält man eine zusammenhängende Triangulierung  $\mathcal{T}$ .  $\mathcal{T}$  ist also eine Diskretisierung von  $\Omega$ . Diese Konstruktion von  $\mathcal{T}$  ist direkt eine Diskretisierung der Nebenbedingungen (6.20) und (6.21). Sie gewährleistet ein stetiges Verhalten der gesuchten Lösung entlang der Näherung an  $\bar{\Sigma}$ .

Die Knoten und Kanten die  $\Sigma$  beschreiben liegen weiterhin gedoppelt vor. Das heißt,  $\Sigma$  wird als Riss in der Triangulation beschrieben. Entsprechend sind

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &:= (V_1, E_1), \\ \Sigma_2 &:= (V_2, E_2)\end{aligned}$$

die Graphen mit jeweils identischen Knoten und Kanten die  $\Sigma$  annähern. Es bezeichnen dabei  $V_1$  sowie  $V_2$  die Knotenmengen und  $E_1$  sowie  $E_2$  die Kantenmengen. Das geforderte Gleitverhalten aus (6.19) wird auf  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  diskretisiert. Ein Beispiel einer Triangulation mit ellipsenförmigen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  findet sich unter Abbildung 6.4.

In Abschnitt 5.2 wurde die Bedingung so formuliert, dass beliebige glatte und orientierbare Untermannigfaltigkeiten (geschlossen und nicht geschlossen) den Gleitbereich beschreiben dürfen. Dies spiegelt sich in dieser Diskretisierung insofern wieder, dass in einer  $2d$ -Implementierung beliebige Kantenzüge durch Verdoppelung den Gleitbereich beschreiben dürfen. Die diskretisierte Form der Nebenbedingung (6.19) wird auf  $\Sigma_1$  und

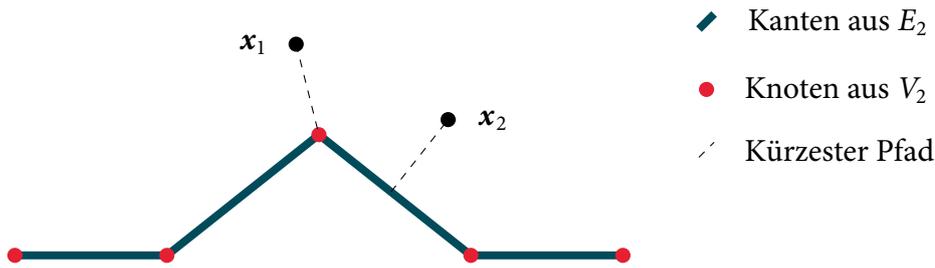


ABBILDUNG 6.5: Beispiele für kürzeste Abstände von einem Knoten zu einem Kantenzug. Für  $\mathbf{x}_1$  existiert keine orthogonale Projektion auf  $E_2$ , somit bekommt er einen Knoten aus  $V_2$  als nächsten Punkt zugewiesen. Für  $\mathbf{x}_2$  existiert eine orthogonale Projektion auf eine Kante aus  $E_2$  und sie ist der nächste Punkt zu  $\mathbf{x}_2$ .

$\Sigma_2$  wirken indem sie fordert, dass der Abstand zwischen ihnen in einem geeigneten Sinn gleich Null ist.

Ausgehend von (6.19) diskretisieren wir jetzt die einseitige Nebenbedingung

$$\int_{\Sigma} \text{dist}(\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_2(\Sigma))^2 dS(\mathbf{x}) = 0, \quad (6.22)$$

mit

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi}_2(\Sigma)) := \inf_{\mathbf{y} \in \boldsymbol{\varphi}_2(\Sigma)} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2.$$

Es wird zunächst für jedes  $\mathbf{x} \in V_1$  der kürzeste Abstand auf  $\Sigma_2$  bestimmt. Dabei können zwei Fälle auftreten: Der kürzeste Abstand kann zu einem Punkt mitten auf eine Kante  $\mathbf{e} \in E_2$  vorliegen, oder er kann direkt zu einem  $\mathbf{p} \in V_2$  vorliegen (siehe Abbildung 6.5). Falls der kürzeste Abstand auf eine Kante verweist, wird dieser mithilfe einer orthogonalen Projektion beschrieben. Es wird zunächst dieser Fall betrachtet. Sei  $\mathbf{x} \in V_1$  und  $\mathbf{e} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} \in E_2$ . Ein Maß für den Abstand zur orthogonalen Projektion lautet:

$$\frac{1}{2} \|(1 - \lambda)\mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2 - \mathbf{x}\|_2^2, \quad (6.23)$$

mit dem Faktor

$$\lambda := \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{p}_1)^\top (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{\|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2\|_2^2}. \quad (6.24)$$

Dabei gilt lediglich für  $\lambda \in [0, 1]$ , dass  $\mathbf{x}$  eine orthogonale Projektion auf die Kante  $\mathbf{e}$

besitzt. Mit einer modifizierten Variante von (6.23) messen wir

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) := \begin{cases} \frac{1}{2} \|(1-\lambda)\mathbf{p}_1 + \lambda\mathbf{p}_2 - \mathbf{x}\|_2^2, & \lambda \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{x}\|_2^2, & \lambda > 1 \\ \frac{1}{2} \|\mathbf{p}_1 - \mathbf{x}\|_2^2, & \lambda < 1, \end{cases} \quad (6.25)$$

den kürzesten Abstand von  $\mathbf{x}$  zur Kante  $\mathbf{e} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$  auch wenn keine orthogonale Projektion existiert. Im Falle ihrer Nicht-Existenz greifen die Fälle mit  $\lambda < 0$  und  $\lambda > 1$  und weisen  $\mathbf{x}$  den Abstand zum nächstgelegenen Knoten zu. Um den kürzesten Abstand zu ganz  $\Sigma_2$  zu ermitteln definieren wir:

$$D(\mathbf{x}, E_2) := \min_{\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\} \in E_2} \text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2).$$

Man erhält also mit

$$\sum_{\mathbf{x} \in V_1} D(\mathbf{x}, E_2) = 0 \quad (6.26)$$

eine diskretisierte Form der einseitigen Nebenbedingung.

Es wird jetzt das Einbinden der gesuchten Deformation beschrieben: Für einen Punkt  $\mathbf{x} \in V_1$  wird seine Deformation durch

$$\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})$$

beschrieben. Analog gilt für einen Punkt  $\mathbf{x} \in V_2$ , dass seine Deformation durch

$$\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}_2(\mathbf{x})$$

beschrieben wird. Sei  $m \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Knoten in  $\mathcal{T}$  und  $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{2m})^\top \in \mathbb{R}^{2m}$  der Vektor der Verrückungen. Es existieren somit für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \Sigma_1$  zwei Indizes  $i, j \in \{1, \dots, 2m\}$  mit  $i \neq j$ , so dass mit  $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) := (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^\top$  gilt:

$$u_1(\mathbf{x}) = \bar{u}_i$$

$$u_2(\mathbf{x}) = \bar{u}_j.$$

Analog existieren für jeden Punkt  $\mathbf{x} \in \Sigma_2$  ebenfalls zwei Indizes  $i, j \in \{1, \dots, 2m\}$  mit

$i \neq j$ , so dass mit  $\mathbf{u}_2(\mathbf{x}) := (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))^\top$  gilt:

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= \bar{u}_i \\ u_2(\mathbf{x}) &= \bar{u}_j. \end{aligned}$$

Für die diskretisierte Form der symmetrischen Nebenbedingung aus (6.19) gilt:

$$\mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$$

wobei

$$\mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}) := \sum_{\mathbf{x} \in V_1} D(\boldsymbol{\varphi}_1(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_2(E_2)) + \sum_{\mathbf{x} \in V_2} D(\boldsymbol{\varphi}_2(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varphi}_1(E_1)). \quad (6.27)$$

Das beschränkte Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} & \min_{\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2} \left\{ \mathcal{D}^L[T, R; \boldsymbol{\varphi}] + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe}}[\mathbf{u}] + \beta \mathcal{R}^{\text{vol}}[\mathbf{u}] \right\} \\ \text{u. d. Nb.} \quad & \mathcal{C}^{\text{SM}}[\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2] = 0 \\ & \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1 \Big|_{\Omega_1} \\ & \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_2 \Big|_{\Omega_2 \setminus \Sigma \cup \bar{\Sigma}} \end{aligned}$$

aus (5.6) lautet in seiner diskretisierten Form somit:

$$\begin{aligned} & \min_{\bar{\mathbf{u}}} \left\{ \mathcal{D}^{\text{L},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \mathcal{R}^{\text{vol},h}(\bar{\mathbf{u}}) \right\} \\ \text{u. d. Nb.} \quad & \mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}) = 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

wobei der Vektor  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{2m}$  alle Verrückungen der Knoten der Triangulation enthält. Im folgenden Kapitel wird ein Lösungsansatz für das Problem (6.28) vorgestellt.



# 7 Optimierung

In diesem Kapitel wird ein Lösungsansatz für das nichtlineare und beschränkte Optimierungsproblem

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \left\{ \mathcal{D}^{\text{L},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \mathcal{R}^{\text{vol},h}(\bar{\mathbf{u}}) \right\}$$

u. d. Nb.  $\mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$

aus (6.28) erörtert. Es existieren zahlreiche Verfahren zur Lösung derartiger Probleme. Gängige Vertreter sind die *Sequentielle Quadratische Programmierung*, das *Augmented Lagrangian* Verfahren und die *Penalty* Methode [22]. Die ersten beiden Verfahren bringen einen hohen Implementierungsaufwand mit sich, so dass in dieser Arbeit aus Zeitgründen die Penalty Methode implementiert wurde.

Die in dieser Arbeit zum Einsatz gekommene Variante der Penalty Methode bestimmt eine Näherungslösung an (6.28), durch Lösen des unbeschränkten Problems:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \mathcal{J}^h(\bar{\mathbf{u}}) \tag{7.1}$$

mit

$$\mathcal{J}^h(\bar{\mathbf{u}}) := \mathcal{D}^{\text{L},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \mathcal{R}^{\text{vol},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \gamma \mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}).$$

Die Zielfunktion  $\mathcal{J}^h(\bar{\mathbf{u}})$  entspricht der Zielfunktion aus (6.28), wird allerdings um den Strafterm  $\gamma \mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}})$  erweitert. Der Faktor  $\gamma > 0$  gewichtet wie stark die Gleitkonturen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  zusammengehalten werden. Das heißt, ein exaktes Einhalten von  $\mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}) = 0$  wird nicht gewährleistet. Die Wahl eines geeigneten  $\gamma$  ist in dieser Arbeit manuell geschehen.

Um eine Lösung für (7.10) zu bestimmen, wird jetzt das sogenannte *Gauß-Newton Verfahren* vorgestellt.

## Gauß-Newton Verfahren

Das unter (7.10) formulierte Problem ist hochdimensional und nichtlinear. Für derartige Probleme ist es nicht praktikabel eine analytische Lösung zu bestimmen. Das Gauß-Newton Verfahren ist ein Ansatz zur Bestimmung einer Näherungslösung solcher Probleme [22]. Es ist ein iteratives Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme und lässt sich als eine Abwandlung des Newton Verfahrens auffassen.

Wir betrachten jetzt zunächst das Newton Verfahren. Sei  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion die zweimal stetig differenzierbar ist und  $\mathbf{x}_k, \mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^d$ . Für das Newton Verfahren schreiben wir ihre quadratische Taylor-Approximation

$$f(\mathbf{x}_k + \mathbf{p}_k) \approx f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{p}_k + \mathbf{p}_k^\top \nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}_k$$

auf. Durch differenzieren nach  $\mathbf{p}_k$  und gleich Null setzen der rechten Seite erhält man:

$$\nabla^2 f(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (7.2)$$

Bei einem gegebenen Startwert  $\mathbf{x}_k$  kann das lineare Gleichungssystem nach  $\mathbf{p}_k$  aufgelöst werden. Dieses  $\mathbf{p}_k$  wird auch als Abstiegsrichtung bezeichnet [22]. Mit ihm und einer geeigneten Schrittweite  $\alpha > 0$  folgt, dass

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k.$$

Für das so ermittelte  $\mathbf{x}_{k+1}$  gilt bei geeignetem  $\alpha$ , dass  $f(\mathbf{x}_{k+1}) < f(\mathbf{x}_k)$ .

### Gauß-Newton Abstiegsrichtung

Charakteristisch für das Gauß-Newton Verfahren ist, dass in Gleichung (7.2) nicht die echte Hesse-Matrix  $\nabla^2 f(\mathbf{x}_k)$  zum Einsatz kommt, sondern eine symmetrische und positiv-definite Schätzung  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{d \times d}$  an diese [22]. Damit lautet das in jedem Iterationsschritt zu lösende Gleichungssystem:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{p}_k = -\nabla f(\mathbf{x}_k). \quad (7.3)$$

Für die so ermittelte Abstiegsrichtung  $\mathbf{p}_k$  muss in jedem Iterationsschritt eine Schrittweite  $\alpha$  bestimmt werden.

## Schrittweitenbestimmung

Wir verwenden hierfür die sogenannte *Armijo-Bedingung*:

$$f(\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{p}_k) \leq f(\mathbf{x}_k) + c\alpha \nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \mathbf{p}_k,$$

mit  $c = 10^{-4}$ . Beginnend mit  $\alpha = 1$  wird geprüft ob die Bedingung erfüllt ist. Ist diese nicht erfüllt, wird  $\alpha$  halbiert und die Bedingung wird erneut überprüft. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis ein geeignetes  $\alpha$  gefunden wurde.

## Abbruchkriterien

Die aus obigen Bausteinen konstruierte Iteration würde ohne Abbruchkriterien nicht stoppen. Es wurden zu diesem Zweck Kriterien von *Gill, Murray und Wright* [22] vorgeschlagen. Mit diesen Kriterien kann das Lösungsverfahren durch zwei Ursachen beendet werden: Zum einen, falls eine hinreichend genaue Lösung gefunden wurde und zum anderen, wenn keine Lösung gefunden wurde. Die fünf Kriterien lauten:

$$(K1) \quad \|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)\|_2 < \tau (1 + \|f(\mathbf{x}_k)\|_2)$$

(Änderung der Funktionswerte muss klein sein)

$$(K2) \quad \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_2 < \sqrt{\tau} (1 + \|\mathbf{x}_k\|_2)$$

(Schrittweite muss klein)

$$(K3) \quad \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|_2 < \sqrt[3]{\tau} (1 + \|f(\mathbf{x}_k)\|_2)$$

(Norm des Gradienten muss klein sein)

$$(K4) \quad \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|_2 < \varepsilon$$

(Norm des Gradienten darf nicht unterhalb der Maschinengenauigkeit liegen)

$$(K5) \quad k > k_{\max}$$

(Maximale Iterationszahl darf nicht überschritten werden)

mit  $\tau = 10^{-5}$  und der Maschinengenauigkeit  $\varepsilon$ . Diese Kriterien werden nach jedem Iterationsschritt überprüft. Eine Lösung wurde gefunden, wenn  $(K1) \wedge (K2) \wedge (K3)$  erfüllt ist. Keine Lösung konnte gefunden werden, wenn  $(K4) \vee (K5)$  erfüllt ist. In beiden Fällen wird das Verfahren abgebrochen.

Eine Lösung des unbeschränkten Problems (7.10) wurde in dieser Arbeit mit der vorgestellten Variante des Gauß-Newton Verfahrens berechnet. Die für dieses Verfahren notwendige erste Ableitung sowie die Näherung an die zweite Ableitung von  $\mathcal{J}^h$  werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

## Ableitungen der Zielfunktion

In diesem Abschnitt werden die Ableitungen von

$$\mathcal{J}^h(\bar{\mathbf{u}}) = \mathcal{D}^{\text{L},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \alpha \mathcal{R}^{\text{qe},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \mathcal{R}^{\text{vol},h}(\bar{\mathbf{u}}) + \gamma \mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}).$$

bestimmt. Es werden hierfür die einzelnen Terme aus  $\mathcal{J}^h(\bar{\mathbf{u}})$  gesondert betrachtet.

## Ableitungen des Distanzmaßes

Wir differenzieren den diskretisierten Distanzterm

$$\mathcal{D}^{\text{L},h}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-1} \mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r}.$$

nach den Verrückungen der Triangulation  $\bar{\mathbf{u}}$ . Sei  $m \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Knoten in  $\mathcal{T}$ . Weiter seien  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)^\top$  mit  $j = 1, 2, 3$  die gegen den Uhrzeigersinn geordneten Knoten eines beliebigen Dreiecks aus  $\mathcal{T}$ . Entsprechend seien  $\mathbf{u}_j = (u_j, v_j)^\top$  mit  $j = 1, 2, 3$  die Verrückungen der  $\mathbf{x}_j$ . Wir definieren weiter  $\partial_{x_i} := \frac{\partial}{\partial x_i}$  als Kurzschreibweise einer partiellen Ableitung. Zunächst wird der Flächeninhalt des deformierten Dreiecks

$$\det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) = \det \begin{pmatrix} u_2 - u_1 + 1 & v_2 - v_1 \\ u_3 - u_1 & v_3 - v_1 + 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

aus (6.10) differenziert:

$$\nabla \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \\ \partial_{u_2} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \\ \partial_{u_3} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \\ \partial_{v_1} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \\ \partial_{v_2} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \\ \partial_{v_3} \det(\nabla \boldsymbol{\varphi}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 - v_3 + 1 \\ v_3 - v_1 + 1 \\ v_1 - v_2 \\ u_3 - u_2 + 1 \\ u_1 - u_3 \\ u_2 - u_1 + 1 \end{pmatrix}.$$

Diese partiellen Ableitungen schreiben wir für jedes Element zeilenweise an die entsprechenden Stellen in  $\nabla \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times 2m}$ . Damit folgt für den Gradienten des Terms  $(\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-1}$ :

$$\nabla (\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-1} = -(\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-2} \nabla \mathbf{T}^\top \mathbf{e} \in \mathbb{R}^{2m}.$$

Da in  $\mathbf{r}$  lediglich das Referenzbild  $R$  in Abhängigkeit von  $\bar{\mathbf{u}}$  ist, fällt das Templatebild  $T$  beim differenzieren raus. Das heißt, in jeder Zeile stehen die Ableitungen von  $R$  in beide Raumrichtungen, so dass gilt  $\nabla \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{3n \times 2m}$ . Die Diagonalmatrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist in jedem Element der Hauptdiagonale abhängig von  $\bar{\mathbf{u}}$ . Die differenzierten Hauptdiagonalelemente fassen wir zu  $\nabla \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times 2m}$  zusammen. Unter Verwendung der Symmetrie von  $\mathbf{M}$  gilt für den Gradienten des Terms  $\mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} \nabla (\mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r}) &= \nabla \mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r} + \mathbf{M} \nabla \mathbf{r} \mathbf{r} + \nabla \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{r} \\ &= 2 \nabla \mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r} + \nabla \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2m}. \end{aligned}$$

Der gesamte Gradient  $\nabla \mathcal{D}^{L,h}$  ist also durch

$$\nabla \mathcal{D}^{L,h} = -\frac{1}{2} (\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-2} (\nabla \mathbf{T}^\top \mathbf{e}) (\mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r}) + (\mathbf{e}^\top \mathbf{T})^{-1} (\nabla \mathbf{r}^\top \mathbf{M} \mathbf{r} + \nabla \mathbf{M} \text{diag}(\mathbf{r}) \mathbf{r}) \in \mathbb{R}^{2m}$$

bestimmt. Die Hessematrix  $\nabla^2 \mathcal{D}^{L,h}$  approximieren wir durch eine symmetrische und positiv definite (s.p.d.) Matrix. Hierfür verwenden wir den in der Hessematrix auftretenden Term

$$\nabla^2 \mathcal{D}^{L,h} \approx \nabla \mathbf{r}^\top \mathbf{M} \nabla \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}.$$

Da  $\mathbf{M}$  nur positive Einträge auf der Hauptdiagonalen besitzt, gilt für diese Approximation, dass sie s.p.d. ist.

## Ableitungen des elastischen Regularisierers

Die Betrachtung der Diskretisierung findet auf einem beliebigen Dreieck  $T_i$  statt. Wir benennen die Komponenten von  $\mathbf{E}_i$  und  $\nabla \mathbf{u}_i$ :

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} E_{1,1} & E_{1,2} \\ E_{2,1} & E_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \nabla \mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_x v \\ \partial_y u & \partial_y v \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Mit ihnen und den beteiligten Knotenpunkten  $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)^\top$ ,  $j = 1, 2, 3$  definieren wir die Vektoren:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{E}}_i &:= (E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})^\top \in \mathbb{R}^4, \\ \bar{\nabla \mathbf{u}}_i &:= (\partial_x u, \partial_y u, \partial_x v, \partial_y v)^\top \in \mathbb{R}^4, \\ \bar{\mathbf{x}}_i &:= (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^6. \end{aligned}$$

Es ergeben sich damit die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i}{\partial \bar{\mathbf{E}}_i} &= \begin{pmatrix} 2\mu E_{1,1} + \lambda(E_{1,1} + E_{2,2}) \\ 2\mu E_{2,1} \\ 2\mu E_{1,2} \\ 2\mu E_{2,2} + \lambda(E_{1,1} + E_{2,2}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_i}{\partial \bar{\nabla \mathbf{u}}_i} &= \begin{pmatrix} 2u_x + 2 & 2u_y & 0 & 0 \\ v_x & v_y + 1 & u_x + 1 & u_y \\ vx & v_y + 1 & u_x + 1 & u_y \\ 0 & 0 & 2v_x & 2v_y + 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \\ \frac{\partial \bar{\nabla \mathbf{u}}_i}{\partial \bar{\mathbf{x}}_i} &= \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}. \end{aligned}$$

Der Gradient der SEF  $W_i$  ist somit durch

$$\nabla W_i = \frac{\partial \bar{\nabla \mathbf{u}}_i}{\partial \bar{\mathbf{x}}_i}^\top \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_i}{\partial \bar{\nabla \mathbf{u}}_i}^\top \frac{\partial W_i}{\partial \bar{\mathbf{E}}_i} \in \mathbb{R}^6$$

gegeben. Wir schreiben die einzelnen Komponenten des Gradienten  $\nabla W_i$  an die entsprechenden Position der  $i$ -ten Zeile in  $\nabla \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times 2m}$ . Damit ist  $\nabla \mathcal{R}^{qe,h}$  durch

$$\nabla \mathcal{R}^{qe,h} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{W}^\top \mathbf{T}$$

gegeben. Mit der zweiten partiellen Ableitung

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial \bar{\mathbf{E}}_i^2} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4},$$

geben wir die hier verwendete symmetrische und positiv definite Näherung an die elementweise Hessematrix

$$\nabla^2 W_i \approx \frac{\partial \bar{\nabla} \mathbf{u}_i^\top}{\partial \bar{\mathbf{x}}_i} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_i^\top}{\partial \bar{\nabla} \mathbf{u}_i} \frac{\partial^2 W_i}{\partial \bar{\mathbf{E}}_i^2} \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}_i}{\partial \bar{\nabla} \mathbf{u}_i} \frac{\partial \bar{\nabla} \mathbf{u}_i}{\partial \bar{\mathbf{x}}_i} \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \quad (7.6)$$

an. Gewichtet mit dem jeweiligen Flächeninhalt  $|T_i|$  erhalten wir mit den Komponenten aus (7.6) eine Näherung an die Hessematrix  $\nabla^2 \mathcal{R}^{qe,h} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ .

## Ableitungen des Volumen-Regularisierers

Mit Hilfe der Kettenregel bestimmen wir den Gradienten :

$$\nabla P_i = 2 \log(2 |\boldsymbol{\varphi}(T_i)|) \frac{1}{2 |\boldsymbol{\varphi}(T_i)|} \mathbf{d}^\top \mathbf{v} \in \mathbb{R}^6,$$

eines  $P_i$ , wobei

$$\mathbf{d} := \begin{pmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6},$$

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} v_y + 1 \\ -v_x \\ -u_y \\ u_x + 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Die Einträge von  $\nabla P_i$  werden in die  $i$ -te Zeile der Matrix  $\nabla \mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times 2m}$  eingetragen. Mit ihr erhält man

$$\nabla \mathcal{R}^{\text{vol},h} = \nabla \mathbf{P}^\top \mathbf{T} \in \mathbb{R}^{2m},$$

also den Gradienten des Regularisierungsterms. Wir nähern die Hessematrix eines  $P_i$  durch

$$\nabla^2 P_i = \frac{2}{(2|\boldsymbol{\varphi}(T_i)|)^2} (1 - 2|\boldsymbol{\varphi}(T_i)|) \mathbf{d}^\top \mathbf{v} \mathbf{v}^\top \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

an und schreiben sie gewichtet mit dem jeweiligen  $|T_i|$  in die angenäherte zweite Ableitung an  $\nabla^2 \mathcal{R}^{\text{vol},h} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ .

## Ableitungen der Nebenbedingung

Es werden die partiellen Ableitungen des Residuums

$$\mathbf{r} := (1 - \lambda) \mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{p}_2 - \mathbf{x}$$

angegeben. Mit  $\mathbf{r}$  gilt für (6.23):

$$\frac{1}{2} \mathbf{r}^\top \mathbf{r} = \frac{1}{2} \|(1 - \lambda) \mathbf{p}_1 + \lambda \mathbf{p}_2 - \mathbf{x}\|_2^2. \quad (7.7)$$

Der Faktor  $\lambda$  ist wie unter (6.24) definiert und auch von  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{p}_2$  abhängig. Die partiellen Ableitungen von  $\mathbf{r}$  lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{p}_1} \mathbf{r} &= \mathbf{I} - (\partial_{\mathbf{p}_1} \lambda \mathbf{p}_1^\top + \lambda \mathbf{I}) + \partial_{\mathbf{p}_1} \lambda \mathbf{p}_2^\top \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \partial_{\mathbf{p}_2} \mathbf{r} &= -\partial_{\mathbf{p}_2} \lambda \mathbf{p}_1^\top + (\partial_{\mathbf{p}_2} \lambda \mathbf{p}_2^\top + \lambda \mathbf{I}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{r} &= -\partial_{\mathbf{x}} \lambda \mathbf{p}_1^\top + \partial_{\mathbf{x}} \lambda \mathbf{p}_2^\top + \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen von  $\lambda$  sehr groß werden, wird darauf verzichtet sie explizit anzugeben. Für die erste Ableitung von (7.7) gilt somit:

$$\nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{r}^\top \mathbf{r} \right) = \nabla \mathbf{r}^\top \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2. \quad (7.8)$$

Die Hesse-Matrix des Ausdrucks aus (7.7) wird mit der s.p.d. Matrix

$$\nabla^2\left(\frac{1}{2}\mathbf{r}^\top\mathbf{r}\right)\approx\nabla\mathbf{r}^\top\nabla\mathbf{r}\in\mathbb{R}^{2\times 2}\quad (7.9)$$

approximiert. Die Ableitung  $\nabla\mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}})\in\mathbb{R}^{2m}$  und die Approximation an  $\nabla^2\mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}})\in\mathbb{R}^{2m\times 2m}$  lassen sich aus den rechten Seiten von (7.8) und (7.9) zusammensetzen.

Mit den vorgestellten Ableitungen und dem Gauß-Newton Verfahren kann schließlich eine Lösung von

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{J}^h(\bar{\mathbf{u}})\quad (7.10)$$

mit

$$\mathcal{J}^h(\bar{\mathbf{u}})=\mathcal{D}^{\text{L},h}(\bar{\mathbf{u}})+\alpha\mathcal{R}^{\text{qe},h}(\bar{\mathbf{u}})+\beta\mathcal{R}^{\text{vol},h}(\bar{\mathbf{u}})+\gamma\mathcal{C}^{\text{SM},h}(\bar{\mathbf{u}}).$$

bestimmt werden. Im folgenden Kapitel werden Ergebnisse des vorgestellten Registrierungsverfahrens präsentiert.



## 8 Numerische Experimente

In diesem Kapitel werden numerische Experimente des betrachteten Verfahrens vorgestellt. Die vorgestellten Ergebnisse mit modellierter Sliding Motion (SM) sind Lösungen des Problems:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \left\{ \mathcal{D}^{L,h}(\bar{\mathbf{u}}) + \alpha \mathcal{R}^{qe,h}(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \mathcal{R}^{vol,h}(\bar{\mathbf{u}}) + \gamma \mathcal{C}^{SM,h}(\bar{\mathbf{u}}) \right\}.$$

Die Ergebnisse ohne modellierter SM sind entsprechend Lösungen des Problems:

$$\min_{\bar{\mathbf{u}}} \left\{ \mathcal{D}^{L,h}(\bar{\mathbf{u}}) + \alpha \mathcal{R}^{qe,h}(\bar{\mathbf{u}}) + \beta \mathcal{R}^{vol,h}(\bar{\mathbf{u}}) \right\}.$$

Die Lösungen der jeweiligen Registrierungsprobleme wurden mit dem Gauß-Newton Verfahren aus Kapitel 7 bestimmt. Die Lamé Konstanten wurden mit  $\lambda = 1$  und  $\mu = 1$  für alle Berechnungen fest gewählt. Das geschriebene Programm wurde in MATLAB R2012b implementiert.

Die berechneten Verrückungen  $\bar{\mathbf{u}}$  liegen auf den Knoten der Triangulation vor und wurden zur Visualisierung der Ergebnisse auf ein äquidistantes Gitter interpoliert. Es wurde hierfür eine lineare Interpolation gewählt. Die gewählte Auflösung entsprach der nativen Auflösung der verwendeten Bilddaten.

Die Ergebnisse wurden mit drei Bilddatensätzen generiert: Die ersten beiden Datensätze sind synthetisch erzeugt und beschreiben ein kreisförmiges bzw. ellipsenförmiges  $\Sigma$ . Der dritte Datensatz besteht aus zwei Schichten einer mit einem Computertomographen akquirierten Zeitreihe von 3d-Volumina. Es handelt sich dabei um zwei koronale Schichten die die Lunge eines Patienten in maximalem Ein- und Ausatemzustand abbilden.  $\Sigma$  wurde dabei so gewählt, dass ein Gleitverhalten der Lunge sichtbar wird.

Alle drei Datensätze wurden einmal mit SM und einmal ohne SM registriert. Die Berechnungen mit SM geschahen auf einer Triangulierung wie sie in Abschnitt 6.3 beschrieben wird. Die Berechnungen ohne SM geschahen auf einer Triangulierung die keinen Gleit-

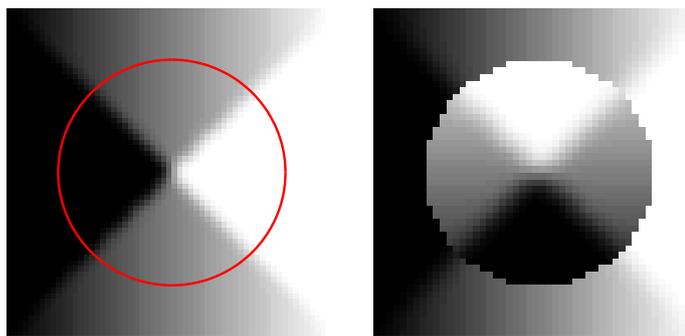


ABBILDUNG 8.1: Darstellung von Referenzbild (links) und Templatebild (rechts). Die rote Kontur beschreibt den Bereich an dem ein Gleiten gestattet ist.

bereich  $\Sigma$  bestehend aus  $\Sigma_1, \Sigma_2$  besitzt. Zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse wird  $\Sigma$  in beiden Fällen auf Abbildungen mit dargestellt.

## Experimente am Kreisdatensatz

Das verwendete Template- und Referenzbild sind in Abbildung 8.1 dargestellt. Beide Bilder sind identisch, bis auf eine  $90^\circ$  Rotation eines kreisförmigen Ausschnitts in der Bildmitte. Der Bereich in dem ein Gleiten gestattet ist wurde entsprechend kreisförmig gewählt und ist gemeinsam mit dem Referenzbild ebenfalls in Abbildung 8.1 dargestellt. Die Triangulierung wurde für die Berechnung mit SM zweigeteilt: Zum einen der Triangulierung des Kreisinneren, zum anderen der Triangulierung des äußeren Bereichs (siehe Abbildung 8.2). Die verwendeten Parameter für alle Berechnungen auf diesem Datensatz sind in Tabelle 8.1 aufgelistet.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Bildauflösung
1E-2	1E-1	1E-2	60×60

TABELLE 8.1: Kreisdatensatz. Verwendete Parameter mit Bildauflösung.

Die Parameter wurden so gewählt, dass sich ein starres Deformationsverhalten zeigt. Entsprechend bleibt das Referenzbild bei einer Registrierung ohne SM fast unverändert (siehe Abbildung 8.3, rechts). Eine Registrierung mit SM kann die Rotation trotz des starren Materialverhaltens beschreiben (siehe Abbildung 8.3, links). Unstetiges Verhalten der Deformation entlang  $\Sigma$  ermöglicht dieses Ergebnis. Verdeutlicht wird dies bei Betrachtung der Verrückungen  $\bar{u}$  in Abbildung 8.5 und 8.4.

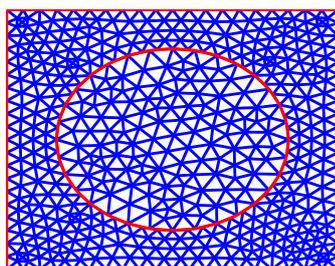


ABBILDUNG 8.2: Struktur der verwendeten Triangulierung. Im Fall der Registrierung mit SM ist die Triangulierung zweigeteilt. Gleitverhalten wird an der inneren roten Kontur gestattet.

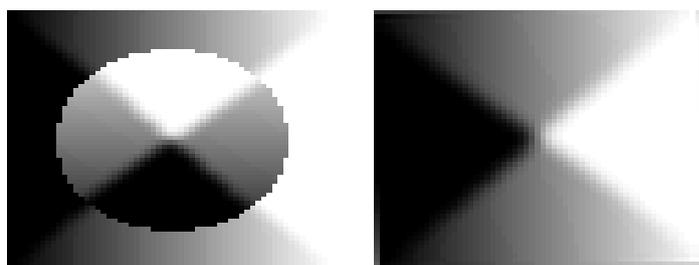


ABBILDUNG 8.3: Abgebildet sind die deformierten Referenzbilder.  
Links: Deformiertes Referenzbild mit SM,  
rechts: Deformiertes Referenzbild ohne SM.

## Experimente am Ellipsendatensatz

Das verwendete Template- und Referenzbild sind in Abbildung 8.6 dargestellt. Analog zum Kreisdatensatz gilt hier: Beide Bilder sind identisch, bis auf einen um  $45^\circ$  rotierten ellipsenförmigen Bereich in der Bildmitte. Entsprechend wurde der Bereich an dem Gleiten gestattet ist ellipsenförmig gewählt und ist in Abbildung 8.6 dargestellt.

Die Triangulierung wurde für die Berechnung mit SM zweigeteilt: Zum einen der Triangulierung im Inneren der Ellipse, zum anderen der Triangulierung des äußeren Bereichs (siehe Abbildung 8.8). Alle Berechnungen auf diesem Datensatz sind mit den Parametern in Tabelle 8.2 entstanden.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Bildauflösung
1E-7	1E-6	1E-3	70×70

TABELLE 8.2: Ellipsendatensatz. Verwendete Parameter mit Bildauflösung.

Die gewählten Parameter erlauben ein elastischeres Verhalten der Deformation als beim Kreisdatensatz. Mit ihnen erreicht eine Registrierung ohne SM eine gute Näherung an

das Templatebild (siehe Abbildung 8.7). Die harten Kanten am Rand der Ellipse werden jedoch nicht von diesem Ansatz nachgebildet. Eine Registrierung mit SM zeigt bei diesem Experiment ein Gleitverhalten entlang der vorgegeben Kontur. Eine Glättung des Ergebnisses wird in diesem Fall am oberen und unteren Rand der Ellipse vermieden. In Abbildung 8.9 ist das unstetige Verhalten der Deformation entlang  $\Sigma$  dargestellt. Im Fall der Registrierung ohne SM ist das Vektorfeld der Verrückungen  $\bar{u}$  insbesondere auch am Rand der Ellipse glatt (siehe Abbildung 8.10).

## Experimente am Lungendatensatz

Template- und Referenzbild werden in Abbildung 8.11 dargestellt. Sie stellen die Lunge eines Patienten zum Zeitpunkt maximaler Ein- und Ausatmung dar.  $\Sigma$  wurde so gewählt, dass ein Gleiten von Lungen- an Rippenfell verwirklicht werden kann. Auch hier wurde die Triangulierung zweigeteilt mittels einer geschlossenen Kontur  $\Sigma$  (siehe Abbildung 8.13). Alle Berechnungen auf diesem Datensatz sind mit den Parametern in Tabelle 8.3 entstanden.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	Bildauflösung
1E-2	1E-2	1E+1	800×800

TABELLE 8.3: Lungendatensatz. Verwendete Parameter mit Bildauflösung.

Die Näherung des deformierten Referenzbildes an das Templatebild ist in beiden betrachteten Fällen sehr ähnlich. Ein Vergleich der Differenzbilder in Abbildung 8.12 zeigt für den Fall mit SM als auch ohne SM eine gute Näherung an das Templatebild. Das Registrierungsergebnis ohne SM weist insbesondere am Übergang von Lunge zum Rippenkäfig ein glattes Deformationsfeld auf (siehe Abbildung 8.15). Eine Registrierung mit Hinzunahme des SM-Modells zeigt ein unstetiges Verhalten der Deformation entlang des Rippenkäfigs. Das Verrückungsfeld in Abbildung 8.14 beschreibt ein Gleitverhalten der Lunge am Rippenkäfig.

Es konnte für alle drei Datensätze die Funktionstüchtigkeit des vorgestellten Registrierungsansatzes gezeigt werden. Das Verfahren mit SM kann, verglichen mit einem identischen Ansatz ohne SM, an vorgegebenen Konturen teils deutlich unterschiedliche Ergebnisse hervorbringen. Entlang dieser Konturen können die Ergebnisse signifikant besser sein als bei einem Ansatz ohne SM.

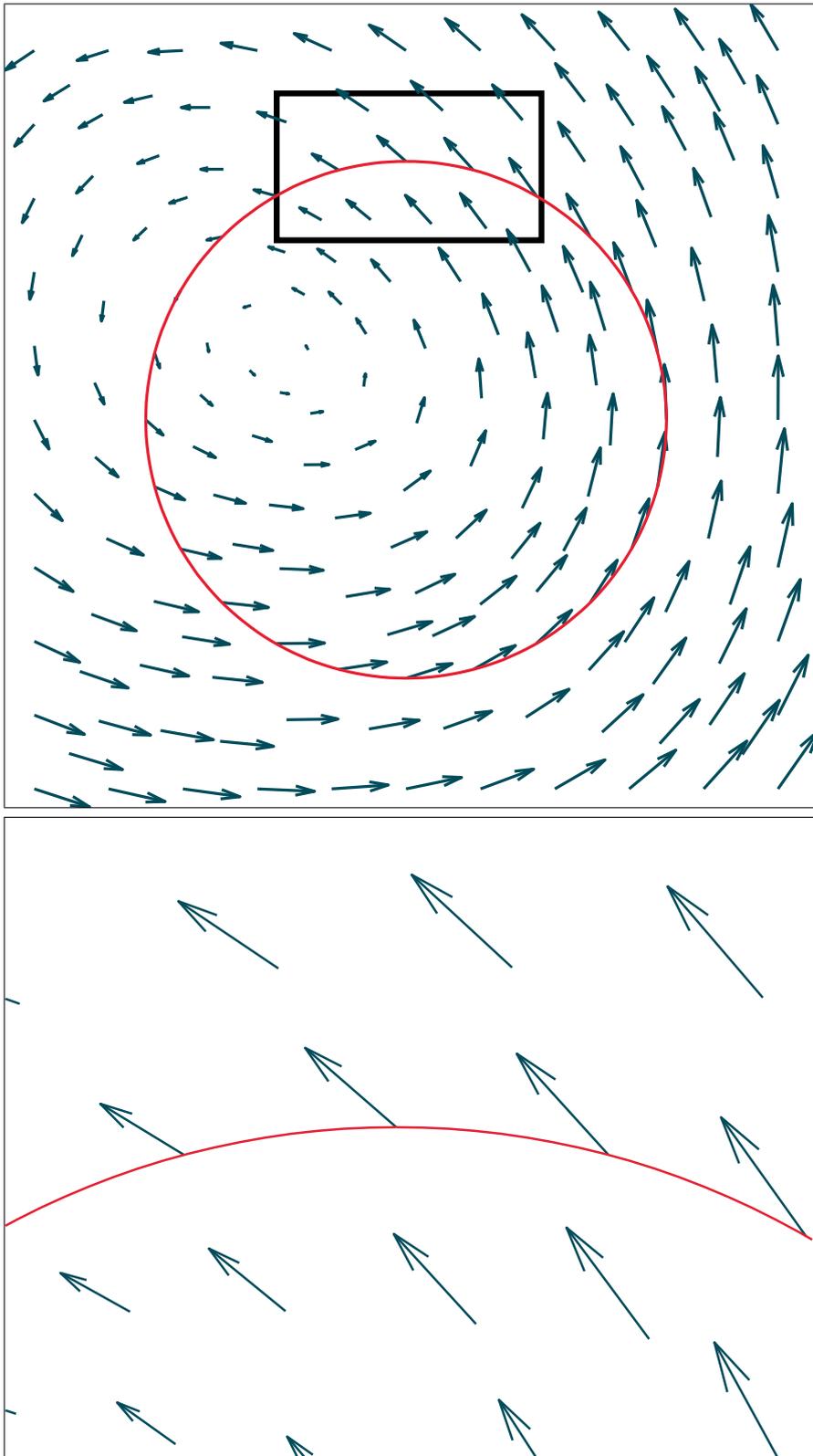


ABBILDUNG 8.4: Verrückungen  $\bar{u}$  der Registrierung ohne SM. Die rote Kontur ist zur besseren Vergleichbarkeit mit dem SM-Ergebnis eingeblendet. Unten ist eine Vergrößerung des oben markierten Ausschnitts abgebildet. Das Vektorfeld ist insbesondere entlang der roten Kontur glatt.

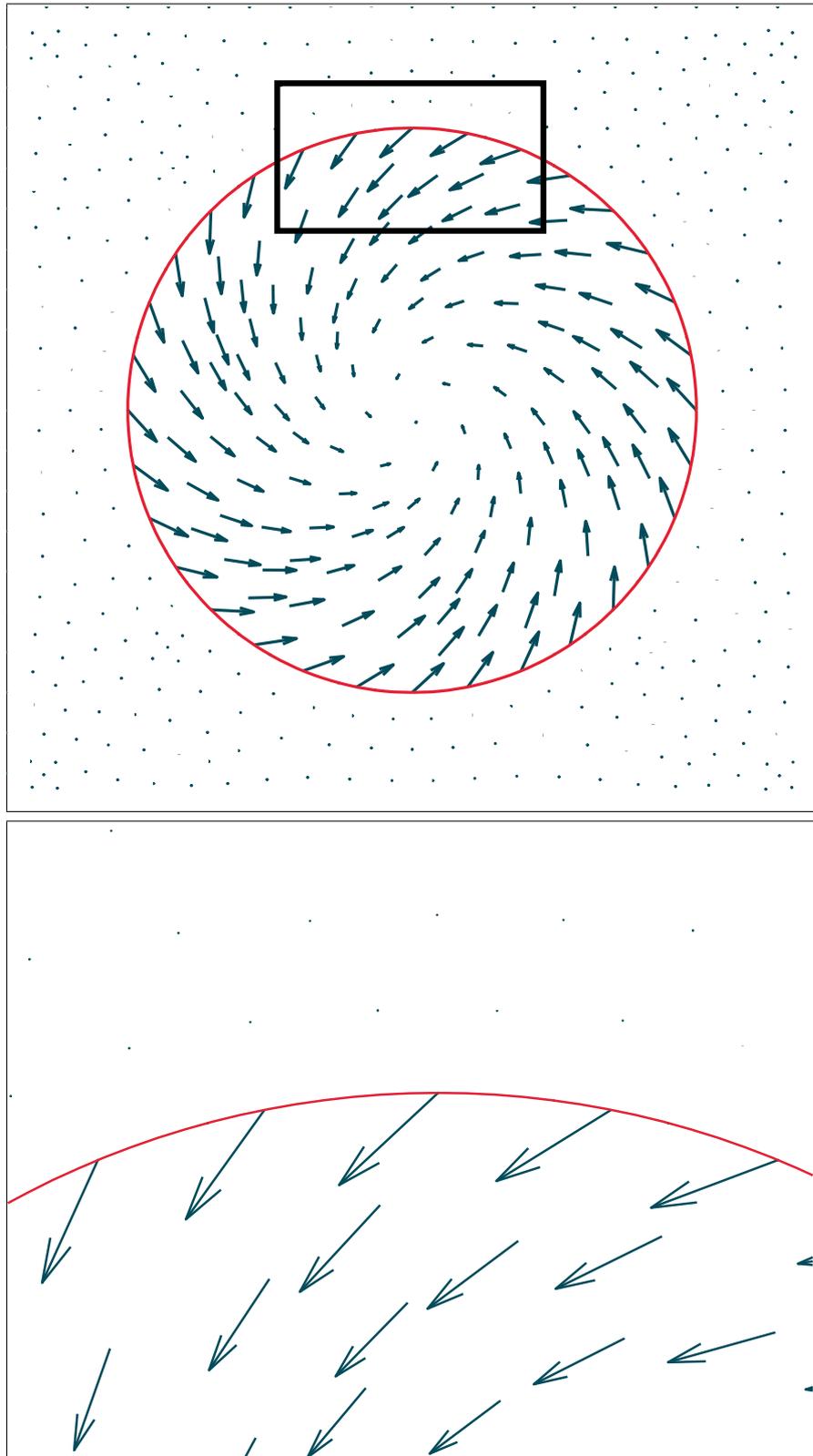


ABBILDUNG 8.5: Verrückungen  $\bar{u}$  des Registrierungsergebnisses mit SM. Die rote Kontur beschreibt  $\Sigma$ , also den Bereich an dem Gleiten gestattet ist. Unten ist eine Vergrößerung des oben markierten Ausschnitts abgebildet. Ein unstetiges Verhalten der Deformation entlang  $\Sigma$  wird festgestellt.

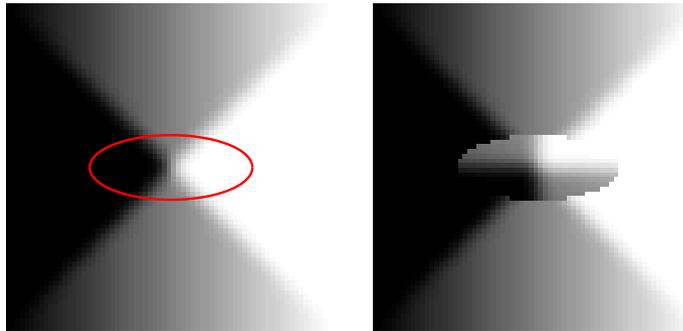


ABBILDUNG 8.6: Darstellung von Referenzbild (links) und Templatebild (rechts). Die rote Kontur beschreibt den Bereich an dem ein Gleiten gestattet ist.

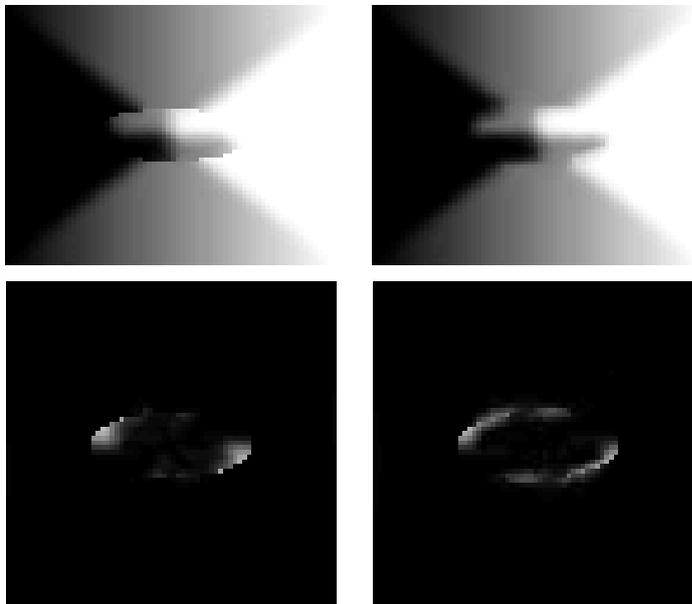


ABBILDUNG 8.7: Vergleich der deformierten Referenzbilder für eine Registrierung mit und ohne SM.  
 links oben: Deformierte Referenz mit SM,  
 rechts oben: Deformierte Referenz ohne SM,  
 unten: Differenzen der deformierten Referenzbilder zum Templatebild.

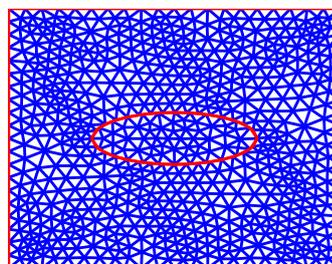


ABBILDUNG 8.8: Struktur der verwendeten Triangulierung. Im Fall der Registrierung mit SM ist die Triangulierung zweigeteilt. Gleitverhalten wird an der inneren roten Kontur gestattet die  $\Sigma$  beschreibt.

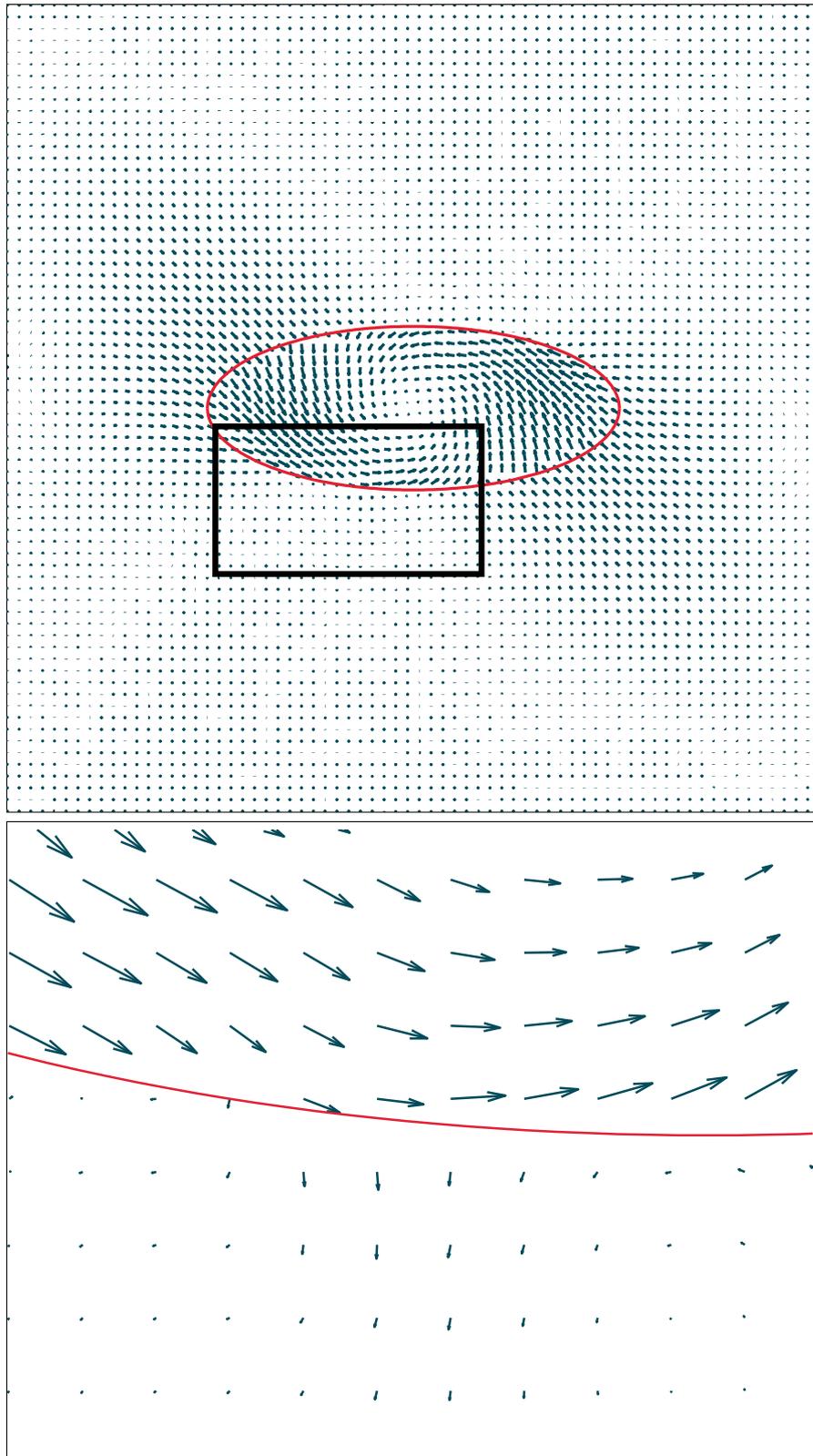


ABBILDUNG 8.9: Verrückungen  $\bar{u}$  des Registrierungsergebnisses mit SM. Die rote Kontur beschreibt wieder  $\Sigma$ . Unten ist eine Vergrößerung des oben markierten Ausschnitts abgebildet. Ein unstetiges Verhalten der Deformation entlang  $\Sigma$  wird festgestellt.

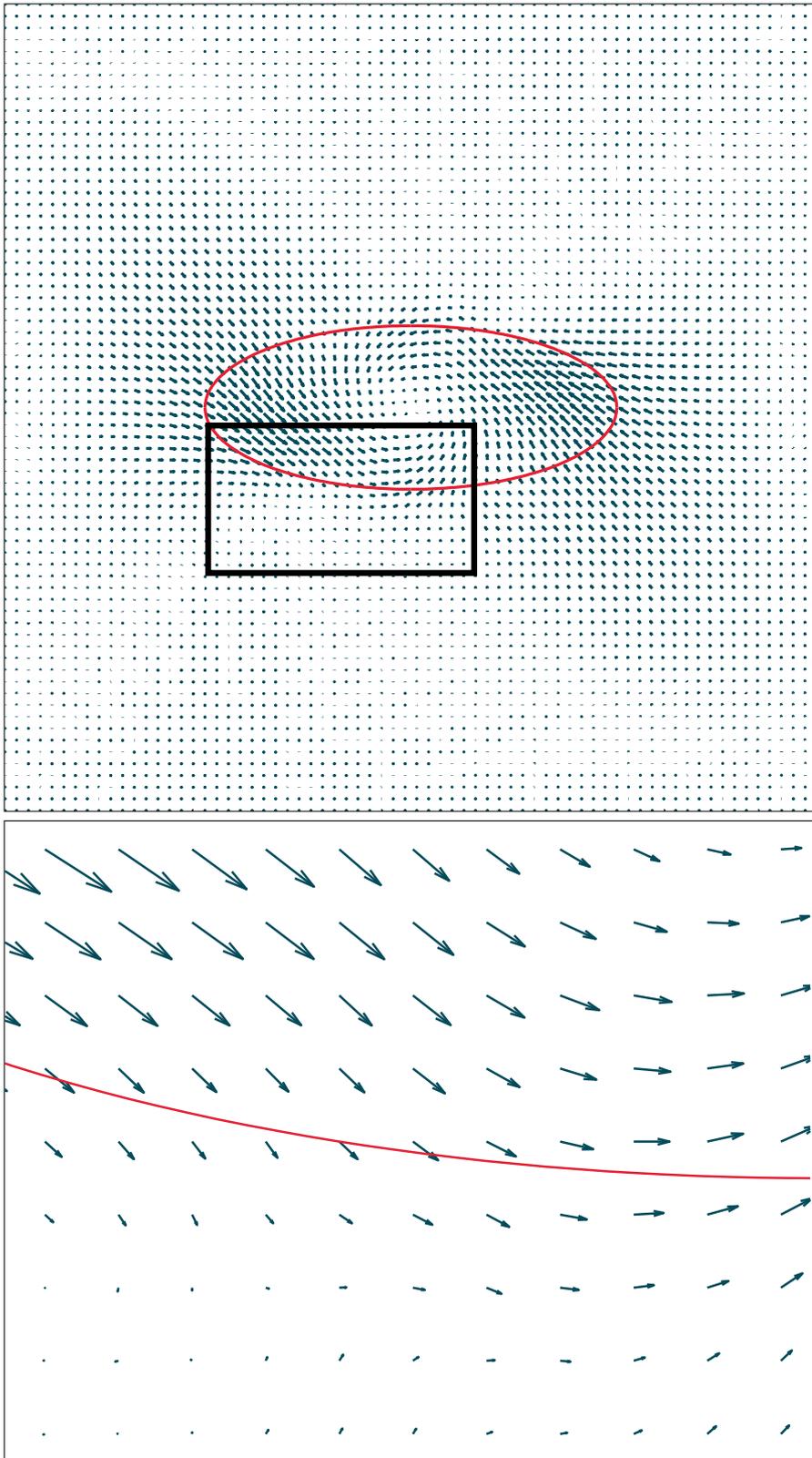


ABBILDUNG 8.10: Verrückungen  $\bar{u}$  der Registrierung ohne SM. Die rote Kontur ist zur besseren Vergleichbarkeit mit dem SM-Ergebnis eingeblendet. Unten ist eine Vergrößerung des oben markierten Ausschnitts abgebildet. Das Vektorfeld ist global und insbesondere entlang der roten Kontur glatt.

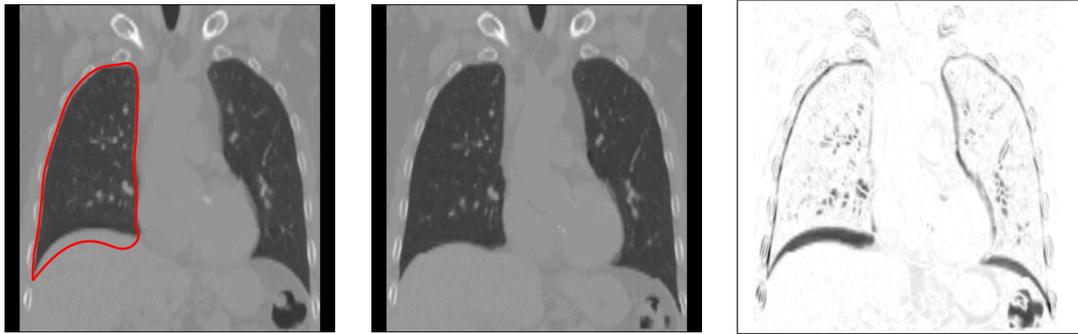


ABBILDUNG 8.11: Dargestellt wird das Referenzbild (links), das Templatebild (Mitte) sowie das Differenzbild beider (rechts).  $\Sigma$  wird als rote Kontur abgebildet.

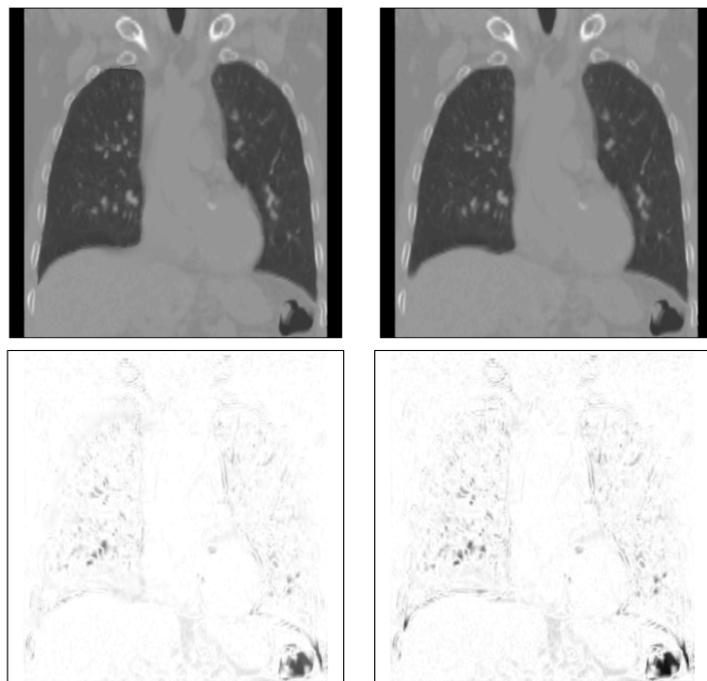


ABBILDUNG 8.12: Dargestellt sind die deformierten Referenzbilder.  
 links oben: Deformierte Referenz mit SM,  
 rechts oben: Deformierte Referenz ohne SM,  
 unten: Differenzbilder der deformierten Referenzbilder zum Template.

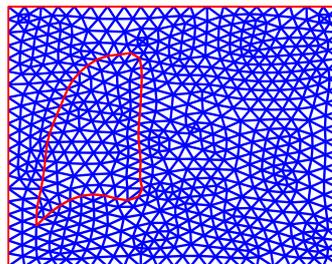


ABBILDUNG 8.13: Struktur der verwendeten Triangulierung. Im Fall der Registrierung mit SM ist die Triangulierung zweigeteilt. Ein Gleitverhalten wird an der inneren roten Kontur gestattet.

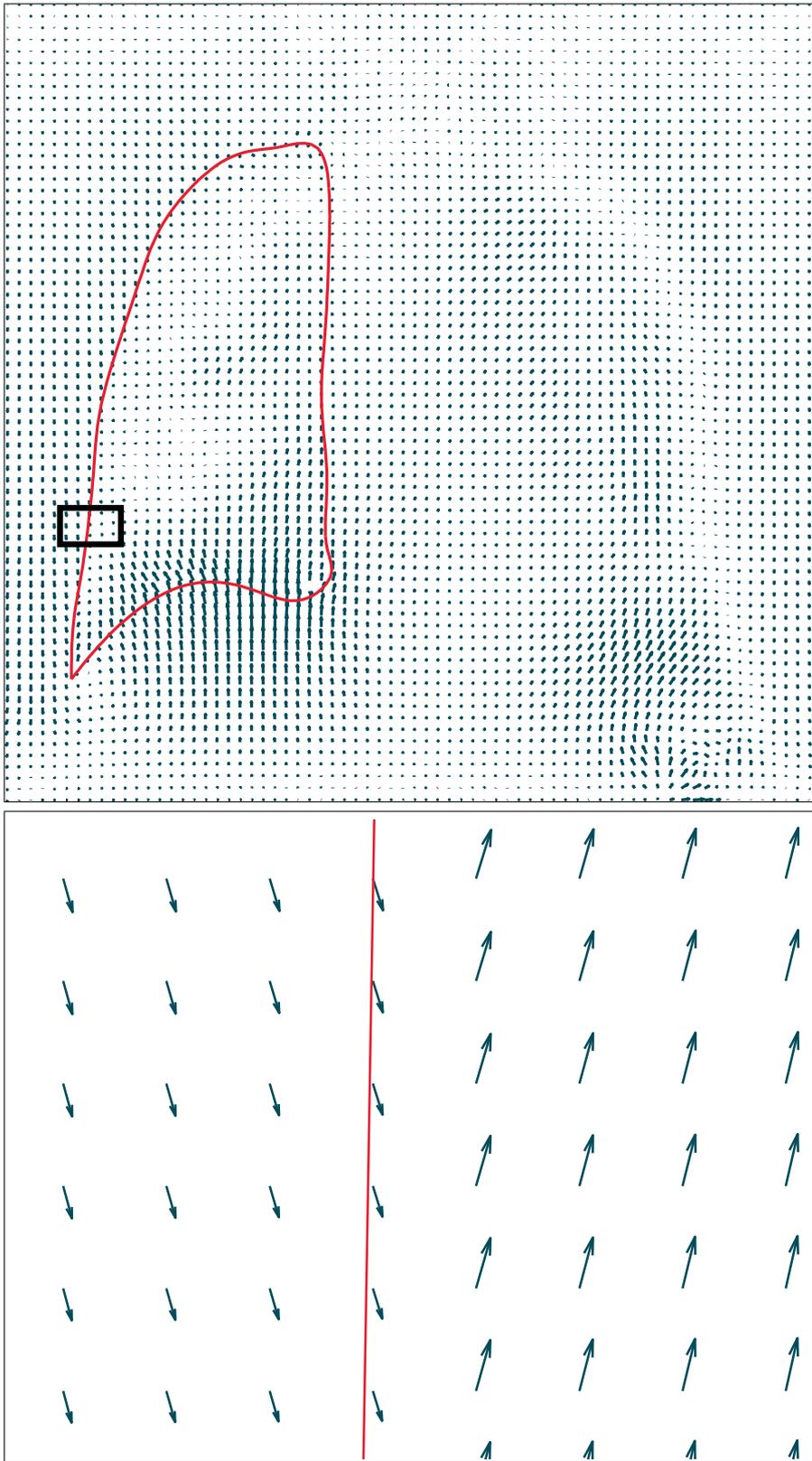


ABBILDUNG 8.14: Oben: Verrückungsfeld des Lungendatensatzes mit SM in reduzierter Auflösung.  
 Unten: Eine Vergrößerung des oben markierten Ausschnitts in original Auflösung. Ein unstetiges Verhalten der Deformation entlang  $\Sigma$  wird festgestellt.

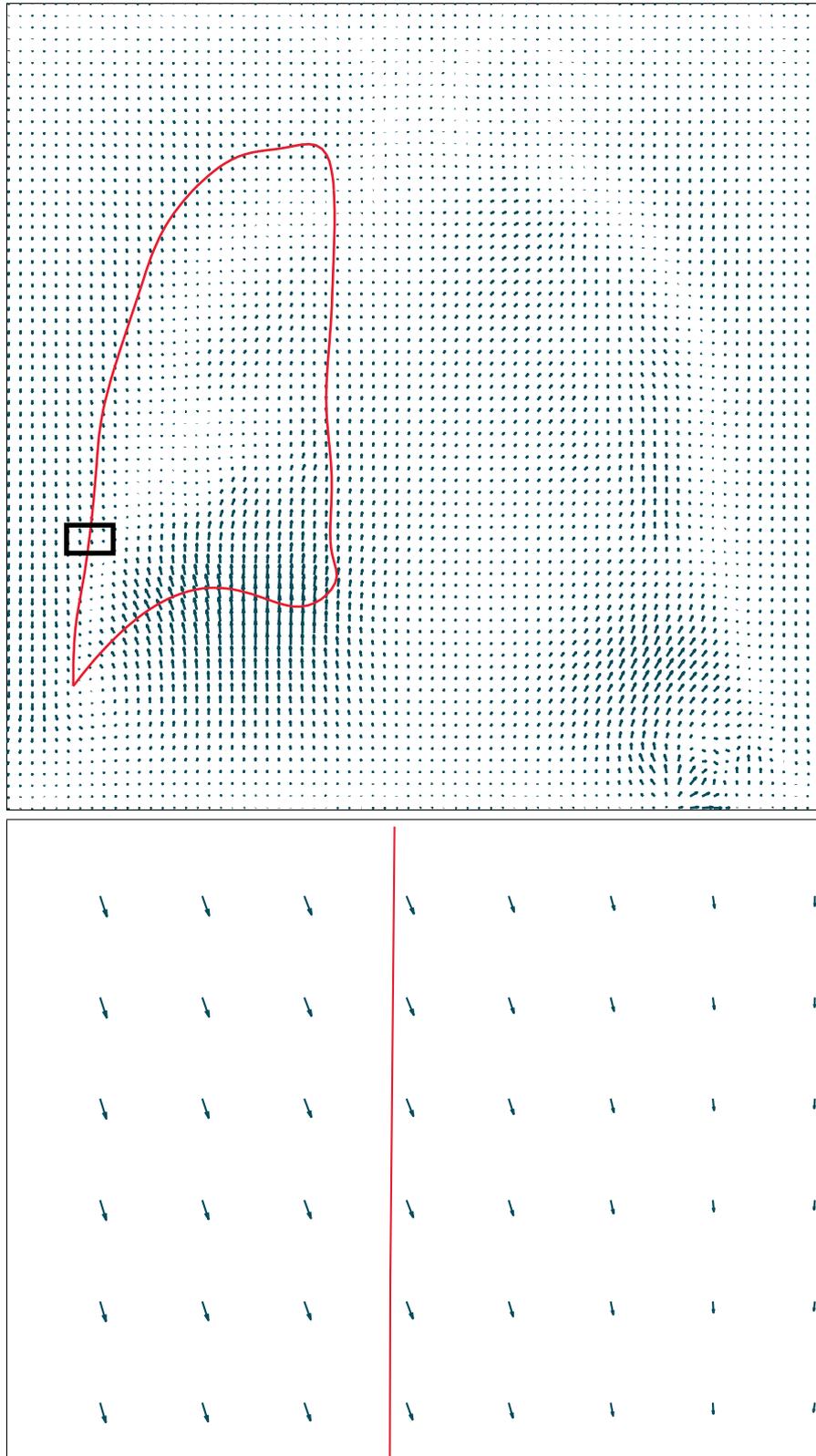


ABBILDUNG 8.15: Oben: Verrückungsfeld des Lungendatensatzes ohne SM in reduzierter Auflösung.  
 Unten: Eine Vergrößerung des oben markierten Ausschnitts in original Auflösung. Die Deformation ist insbesondere entlang  $\Sigma$  glatt.

## 9 Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein genereller Ansatz zur medizinischen Bildregistrierung vorgestellt, der ein Gleitverhalten vorgegebener Oberflächen berücksichtigt. Eine entsprechende Matlab-Implementierung wurde für zweidimensionale Bilder geschrieben. Ihre Funktionalität konnte erfolgreich auf drei Testdatensätzen gezeigt werden. Zwei dieser Datensätze waren synthetisch generiert. Der dritte Datensatz bestand aus Lungenbildern, die von einem Computertomographen akquiriert wurden. In allen drei Fällen wies das Registrierungsergebnis ein Gleitverhalten im zuvor festgelegten Bereich auf. Ein deutlicher Unterschied zwischen Ergebnissen mit und ohne modelliertem Gleitverhalten ließ sich feststellen. Es wurde gezeigt, dass Registrierungsergebnisse mit modelliertem Gleitverhalten signifikant besser sein können als Registrierungsergebnisse ohne modelliertem Gleitverhalten.

Das vorgestellte Verfahren wurde als Optimierungsproblem formuliert. Ein Gleitverhalten wurde als Nebenbedingung des Optimierungsproblems modelliert. Lösungen des Optimierungsproblems wurden mit einem Penalty-Ansatz berechnet.

Es existieren zahlreiche Erweiterungen um die das Verfahren in Zukunft ergänzt werden kann. Eine Erweiterung der Implementierung auf dreidimensionale Bilddaten ist wünschenswert. Ihre Umsetzung ergibt sich direkt aus dem vorgestellten Registrierungsansatz. Die Wirkung eines alternativen Lösungsverfahrens auf das Optimierungsproblem ist auch zu untersuchen. Verfahren wie die Sequentielle Quadratische Programmierung oder das Augmented Lagrangian Verfahren sind verbreitete Alternativen.



# Literaturverzeichnis

- [1] Ruzena Bajcsy and Stane Kovacic. Multiresolution elastic matching. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46(1):1–21, April 1989.
- [2] Vincent Baudet, Pierre-Frédéric Villard, Fabrice Jaillet, Michael Beuve, and Behzad Shariat. Towards accurate tumour tracking in lungs. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Information Visualization, IV '03*, pages 338–, Washington, DC, USA, 2003. IEEE Computer Society.
- [3] Dietrich Braess. *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in Elastizitätstheorie*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2. überarbeitete aufl. edition, 1997.
- [4] K. K. Brock, M. B. Sharpe, L. A. Dawson, S. M. Kim, and D. A. Jaffray. Accuracy of finite element model-based multi-organ deformable image registration. *Medical Physics*, 32(6):1647–1659, 2005.
- [5] Lisa Gottesfeld Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Computing Surveys*, 24(4):325–376, 1992.
- [6] M. Burger, J. Modersitzki, and L. Ruthotto. A hyperelastic regularization energy for image registration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(1):B132–B148, 2013.
- [7] Philippe G. Ciarlet. *Mathematical Elasticity*, volume 20 of *Studies in Mathematics and Its Applications*. Elsevier Science Publishers B.V., 1988.
- [8] Bernd Fischer and Jan Modersitzki. Curvature based registration with applications to MR-mammography. In PMA Slot, CJK Tan, JJ Dongarra, and AG Hoekstra, editors, *Computational Science - ICCS 2002*, volume 2331 of *LNCS*, pages 203–206. Springer, 2002.
- [9] Bernd Fischer and Jan Modersitzki. Curvature based image registration. *JMIV*, 18(1), 2003.

- [10] Otto Forster. *Analysis 3*. Vieweg, 3rd edition, 1999.
- [11] Otto Forster. *Analysis 2*. Vieweg, 2008.
- [12] Eldad Haber, Stefan Heldmann, and Jan Modersitzki. A computational framework for image-based constrained registration. *Linear Algebra and Its Applications*, 431(3–4):459–470, 2009.
- [13] Jacques Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, pages 49–52, 1902.
- [14] Mads Fogtmann Hansen. *The virtual knife*. PhD thesis, DTU Informatik, Danmarks Tekniske Universitet, Richard Petersens Plads, Bygning 321, rum 105, 2800 Lyngby, 2009.
- [15] Stefan Henn. A full curvature based algorithm for image registration. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(2):195–208, 2006.
- [16] Noboru Kikuchi and John T. Oden. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, July 2007.
- [17] J.B.Antoine Maintz and Max A. Viergever. A survey of medical image registration. *Medical Image Analysis*, 2(1):1 – 36, 1998.
- [18] Jan Modersitzki. *Numerical Methods for Image Registration*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, 2004.
- [19] Jan Modersitzki. *FAIR: Flexible Algorithms for Image Registration*. SIAM, 2009.
- [20] B. Wiesner N. Konietzko, H. Wendel. *Erkrankungen der Lunge*. Gruyter, 1 edition, 1994.
- [21] M. Nakao, A. Kawashima, M. Kokubo, and K. Minato. Simulating lung tumor motion for dynamic tumor-tracking irradiation. In *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2007. NSS '07. IEEE*, volume 6, pages 4549–4551, 2007.
- [22] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research. Springer, 2nd edition, 2006.
- [23] R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, 1984.

- [24] Josien P. W. Pluim, J. B. Antoine Maintz, and Max A. Viergever. Mutual information based registration of medical images: a survey. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22:986–1004, 2003.
- [25] Robert F. Schmidt and Manfred Heckmann Florian Lang. *Physiologie des Menschen*. Springer, 31 edition, 2011.
- [26] Alexander Schmidt-Richberg, René Werner, Heinz Handels, and Jan Ehrhardt. Estimation of slipping organ motion by registration with direction-dependent regularization. *Medical Image Analysis*, 16(1):150 – 159, 2012.
- [27] P. Villard, M. Beuve, Behzad Shariat, V. Baudet, and F. Jaillet. Lung mesh generation to simulate breathing motion with a finite element method. In *Information Visualisation, 2004. IV 2004. Proceedings. Eighth International Conference on*, pages 194–199, 2004.
- [28] René Werner. Biophysical modeling of respiratory organ motion. In J. Ehrhardt and C. Lorenz (eds.), editors, *4D Modeling and Estimation of Respiratory Motion for Radiation Therapy*. Springer, 2013 (in press).
- [29] Barbara Zitová and Jan Flusser. Image registration methods: a survey. *Image and Vision Computing*, 21:977–1000, 2003.