



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND  
IMAGE COMPUTING

# Variationelle quantitative Niederschlags- schätzung auf Grundlage von polarimetri- schen Radardaten

*A variational approach to quantitative precipitation estimation  
on the basis of polarimetric radar measurements*

## Masterarbeit

im Rahmen des Studiengangs  
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften  
der Universität zu Lübeck

### vorgelegt von

Kristin Haßelbusch

### ausgegeben und betreut von

Prof. Dr. Jan Lellmann  
Institute of Mathematics and Image Computing

### in Kooperation mit

Dr. Thomas Einfalt  
hydro & meteo GmbH

28. September 2020



## Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Lübeck,  
28. September 2020

---

Autorin



## Kurzfassung

Messungen mit Niederschlagsradarsystemen ermöglichen die Schätzung von Niederschlagsmengen. Moderne Radarsysteme mit dualer Polarisierungstechnik erfassen zusätzliche Radarvariablen, die Aussagen über die Form und Art des Niederschlags zulassen. In dieser Arbeit wird ein Variationsansatz untersucht, bei dem diese zusätzlichen Informationen zur Verbesserung der Mengenschätzung eingesetzt werden. Die Niederschlagsschätzung wird als inverses Problem betrachtet, bei dem die jeweiligen Unsicherheiten der Messungen berücksichtigt werden. Es werden zwei Varianten der Methode implementiert und anhand von Radardaten des thailändischen Royal Rainmaking Department evaluiert. Die untersuchten Methoden demonstrieren das Potential von Variationsansätzen zur quantitativen Niederschlagsschätzung.

## Abstract

Measurements of weather radar systems can be used for the estimation of precipitation quantities. Using polarimetric radar technology, additional radar variables can be measured that contain information about the shape and type of precipitation. In this thesis a variational approach is investigated that leverages the additional information to improve the precipitation estimation. The estimation problem is treated as an inverse problem, which incorporates the measurement uncertainties inherently. Two variants of the methods are implemented and evaluated on radar data from the Thai Royal Rainmaking Department. The assessed methods demonstrate the potential of variational approaches for quantitative precipitation estimation.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Notation</b>	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Aufbau der Arbeit . . . . .	3
<b>2 Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1 Meteorologische Grundlagen . . . . .	5
2.1.1 Niederschlag . . . . .	6
2.1.2 Wetterradar . . . . .	6
2.1.3 Quantitative Niederschlagsmengenbestimmung . . . . .	13
2.1.4 Mikrophysikalische Eigenschaften von Niederschlag . . . . .	15
2.1.5 Tropfengrößenverteilung . . . . .	18
2.2 Mathematische Grundlagen . . . . .	20
2.2.1 Theorie der optimalen Schätzung . . . . .	20
2.2.2 Variationsrechnung . . . . .	22
2.2.3 Optimierungsmethoden . . . . .	24
<b>3 OET-Variationsmethode zur Niederschlagsschätzung</b>	<b>29</b>
3.1 Literaturübersicht . . . . .	29
3.2 Variationsansatz . . . . .	31
3.3 Vorwärtsmodell . . . . .	34
3.4 Regularisierung . . . . .	38
3.5 Zusammenfassung . . . . .	39
<b>4 Eigene Umsetzung und Implementierung der Variationsmethode</b>	<b>41</b>
4.1 Vor- und Nachverarbeitung . . . . .	41
4.2 Optimierung . . . . .	44
4.3 Vorwärtsmodell . . . . .	45
4.4 Regularisierung . . . . .	48
4.5 Zusammenfassung . . . . .	50
<b>5 Experimente und Ergebnisse</b>	<b>53</b>
5.1 Anwendung auf simulierte Radarstrahlen . . . . .	53
5.1.1 Konstruktion der Testdaten . . . . .	53
5.1.2 Vergleich der Regularisierer . . . . .	54
5.1.3 Untersuchung der Robustheit unter Rauscheinfluss . . . . .	57
5.2 Vergleich mit Methode aus der Literatur . . . . .	59
5.3 Anwendung auf gemessene Radardaten . . . . .	60

5.3.1	Beschreibung der Daten . . . . .	62
5.3.2	Einzelnes Radarbild . . . . .	64
5.3.3	Serie von Radarbildern . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>77</b>
<b>A</b>	<b>Appendix</b>	<b>79</b>
A.1	Zusätzliche Tabellen . . . . .	79



# Notation

## Abkürzungen

<b>QPE</b>	Quantitative precipitation estimation – Quantitative Niederschlagsschätzung
<b>RS</b>	Regenschreiber
<b>MP-Beziehung</b>	Marshall-Palmer- $Z$ - $R$ -Beziehung
<b>DSD</b>	Drop size distribution – Tropfengrößenverteilung
<b>NGD</b>	Normalized-gamma distribution – Normalisierte Gamma-Verteilung
<b>CGD</b>	Constrained-gamma distribution – Beschränkte Gamma-Verteilung
<b>OET</b>	Optimal estimation theory – Theorie der optimalen Schätzung
<b>MAP</b>	Maximum-a-posteriori
<b>NWP</b>	Numerical weather prediction – Numerische Wettervorhersage
<b>LUT</b>	Lookup-Tabelle
<b>RMSE</b>	Root-mean-square error

## Symbole

$\lambda$	Wellenlänge des Radarsystems (in mm)
$f$	Frequenz des Radarsystems (in GHz)
$Z_H, Z_V$	Reflektivität bei horizontaler bzw. vertikaler Polarisation (in dBZ)
$Z_{DR}$	Differentielle Reflektivität (in dBZ)
$\Phi_{DP}$	Differentielle Phase (in $^\circ$ )
$K_{DP}$	Spezifische differentielle Phase (in $^\circ\text{km}^{-1}$ )
$\rho_{hv}$	Kopolarer Korrelationskoeffizient
$W$	Spektrumsbreite der Dopplergeschwindigkeiten (in m/s)
$A_h, A_v$	Spezifische Dämpfung bei horizontaler bzw. vertikaler Polarisation (in dBZ)

$R$	Regenrate (in mm/h)
$a$	Parameter der $Z$ - $R$ -Beziehung $Z = aR^b$
$b$	Parameter der $Z$ - $R$ -Beziehung $Z = aR^b$
$D$	Volumenäquivalenter Tropfendurchmesser (in mm)
$\gamma$	Achsenverhältnis von Regentropfen im Sphäroid-Modell, Verhältnis aus horizontaler und vertikaler Achse
$T$	Temperatur (in °C)
$\epsilon_r$	Relative Permittivität von Wasser
$n$	Komplexer Brechungsindex von Wasser
$K$	Dielektrischer Faktor $K = (\epsilon_r - 1)/(\epsilon_r + 2)$
$s_{hh}, s_{vv}$	Streuungsamplitude bei horizontaler bzw. vertikaler Polarisation
$N(D)$	Tropfengrößenverteilung $\hat{=}$ Anzahl der Tropfen pro Einheitsvolumen in Abhängigkeit vom Durchmesser $D$ (in $\#m^{-3}mm^{-1}$ )
$N_0$	Parameter der constrained-gamma DSD
$\Lambda$	Parameter der constrained-gamma bzw. normalized-gamma DSD
$N_w$	Parameter der normalized-gamma DSD
$\mu$	Parameter der normalized-gamma DSD
$\sigma_{Z_H}$	Standardabweichung der $Z_H$ -Messung
$\sigma_{Z_{dr}}$	Standardabweichung der $Z_{dr}$ -Messung
$\sigma_{\Phi_{dp}}$	Standardabweichung der $\Phi_{dp}$ -Messung
$r_0$	Dekorrelationslänge (in km)

---

# Kapitel 1: Einleitung

## 1.1 Motivation

Die flächendeckende Messung von Niederschlagsmengen ist für verschiedene Anwendungsgebiete wichtig: Die Daten finden Eingang in Modelle zur Wettervorhersage und der Hydrologie, etwa um Abflusssysteme zu planen [Ein+04]. Außerdem werden in klimatischen Studien langfristige Trends in der Entwicklung von Niederschlagsereignissen untersucht [Tre11].

Im Gegensatz zur reinen Betrachtung der Strukturen von Niederschlagsereignissen, beispielsweise für Unwetterwarnungen, gehts es bei der quantitativen Niederschlagsschätzung (*quantitative precipitation estimation, QPE*) darum, möglichst genau die Niederschlagsmengen zu bestimmen, die an einem Ort oder in einer Region auf den Boden auftreffen.

Wetterradarsysteme senden elektromagnetische Strahlen aus, die von Niederschlagsteilchen reflektiert werden. Über die gemessene Reflektivität  $Z$  können Rückschlüsse auf die Regenrate  $R$ , also auf die gefallene Regenmenge pro Zeit, gezogen werden. Klassischerweise wird dafür die sogenannte *Z-R-Beziehung* verwendet:

$$Z = aR^b. \tag{1}$$

Die Parameter  $a$  und  $b$  als konstant anzunehmen, kann allerdings nicht die Variabilität in Regengebieten, bedingt durch Regenart, Jahreszeit und klimatischer Gegend, abbilden [Zha17, Kap. 6.3.1].

Seit der Einführung von polarimetrischen Radargeräten, die die elektromagnetischen Wellen in zwei zueinander orthogonalen Polarisationsrichtungen ausstrahlen, ist die Messung von zusätzlichen Größen möglich, die Informationen über die Regentropfenform und damit auch -größe implizit enthalten [Kum13]. Daher haben polarimetrische Messungen das Potential die Schätzung von Niederschlagsmengen zu verbessern.

In dieser Arbeit wird die Bestimmung der Regenrate als inverses Problem betrachtet. Physikalische Parameter, die den Niederschlag beschreiben und aus denen die Regenrate berechnet werden kann, werden über ein Vorwärtsmodell  $H$  mit den vom Radarsystem gemessenen polarimetrischen Größen verknüpft. Die Abbildung  $H$  modelliert den physikalischen Prozess der Messung. Für die Niederschlagsmengenschätzung soll also das inverse Problem

$$\mathbf{y} = H^{-1}(\mathbf{x}) \tag{2}$$

gelöst werden, wobei  $\mathbf{x}$  den physikalischen Zustand und  $\mathbf{y}$  die Beobachtungen beschreibt (Abb. 1).

Diese Sichtweise wurde in den Atmosphärenwissenschaften erfolgreich auf Probleme der Datenassimilation, also die Anpassung von meteorologischen Modellen an tatsächliche Beobachtungen, angewandt [Rod00; Kal03].

Für die Anwendung auf Radardaten zur quantitativen Niederschlagsschätzung wurde in [Hog07] ein Variationsansatz zur Lösung des inversen Problems vorgeschlagen. Es

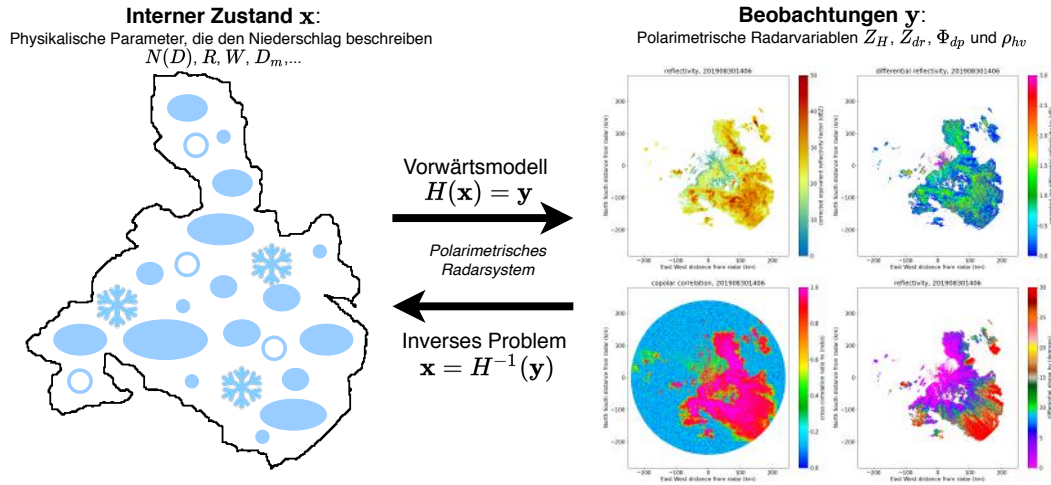


Abbildung 1: Aus physikalischen Parametern, die den Niederschlag beschreiben, können über ein Vorwärtsmodell die von Radarsystemen beobachteten Radarvariablen abgeleitet werden. Die Bestimmung dieser internen Zustandsparameter aus Radarmessungen kann also als inverses Problem betrachtet werden. Nach [Zha+19, Abb. 4].

wird der Parameter  $a$  der  $Z$ - $R$ -Beziehung als Zustandsparameter gewählt und ein Vorwärtsmodell aufgestellt, welches daraus die polarimetrischen Radarvariablen ableitet. Aufbauend auf der Theorie in [Rod00] wird ein Maximum-a-posteriori-Schätzer formuliert, der Vorwissen über den Parameter  $a$  einbezieht.

In nachfolgenden Arbeiten wurde dieser Ansatz durch die Verwendung anderer interner Parameter und Radarvariablen, einer expliziteren Fehlerbetrachtung oder anderen Optimierungsstrategien angepasst und weiterentwickelt [CZX13; Hua+18; CVC14; Mah+19; YCU14]. In [CZX13] wurden Parameter, die die Verteilung von Regentropfengrößen repräsentieren, zur Beschreibung des internen Zustands verwendet. Solange zwischen den gewählten internen Parametern ein direkter Zusammenhang zur Regenrate besteht, kann der Variationsansatz zur QPE verwendet werden. Die Zustandsparameter können allerdings auch für sich selbst schon von Interesse sein, beispielsweise zur Integration in Vorhersagemodelle.

Der Variationsansatz hat das Potential verschiedene Messungen in ein Modell zu integrieren, wobei die jeweiligen Unsicherheiten berücksichtigt werden. Im Gegensatz zur Verwendung der  $Z$ - $R$ -Beziehung zur Berechnung der Regenrate  $R$  können Variabilitäten innerhalb der Regenereignisse berücksichtigt werden. In dieser Arbeit werden die Varianten aus [Hog07] und [CZX13] mit Anpassungen implementiert. Die [CZX13]-Methode wird dabei erstmals explizit zur Bestimmung der Regenrate eingesetzt. Die Ergebnisse aus den Variationsmodellen werden anhand von simulierten und gemessenen Radardaten aus Thailand evaluiert. Radar- und Regenschreiberdaten des thailändischen Royal Rain-making Department stehen im Rahmen eines Projektes der hydro & meteo GmbH mit dem thailändischen Hydro-Informatics Institute zur Verfügung.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Diese Arbeit besteht aus sechs Kapiteln und dem Appendix. In **Kapitel 2** wird das für diese Arbeit relevante Grundlagenwissen aus der Meteorologie und Mathematik diskutiert und ein Überblick über die entsprechende Literatur gegeben. Dazu gehören Kenntnisse über Niederschlagsereignisse, Wetterradarsysteme und mikrophysikalische Eigenschaften von Regentropfen. Die Theorie der optimalen Schätzung wird eingeführt und in Beziehung zur mathematischen Variationsrechnung gesetzt sowie die verwendeten numerischen Optimierungsmethoden erklärt. In **Kapitel 3** wird die Anwendung einer Variationsmethode auf polarimetrische Radardaten zur Niederschlagsmengenschätzung anhand von relevanter Literatur erläutert und verschiedene Ansätze verglichen. **Kapitel 4** diskutiert Details zur eigenen Implementierung eines Variationsansatzes und die Umsetzung von Anpassungen im Vergleich zu den Methoden aus der Literatur. Experimente zur Evaluation der Variationsmethoden sind in **Kapitel 5** zu finden. Die Ergebnisse der Methoden werden anhand von simulierten und realen Radardaten sowohl qualitativ als auch quantitativ unter Verwendung von Regenschreiberdaten ausgewertet. Die Erkenntnisse aus dieser Arbeit sind in **Kapitel 6** zusammengefasst. Im **Appendix** sind zusätzliche Tabellen mit Ergebnissen aus den Experimenten aufgeführt.



---

## Kapitel 2: Grundlagen

Das Ziel von Methoden zur quantitativen Niederschlagsschätzung (QPE) ist die möglichst genaue Bestimmung der auf den Boden auftreffenden Niederschlagsmengen. Radarsysteme unterliegen einigen technische Grenzen und Fehlerquellen, liefern aber flächendeckende Daten. In Abbildung 2 ist beispielhaft eine Zusammenstellung von Radarmessungen über dem norddeutschen Raum dargestellt.



Abbildung 2: Radarreflektivität  $Z_H$  bei einem Regenereignis über dem norddeutschen Raum. Zusammenstellung aus mehreren Radarmessungen. Grafik der hydro & meteo GmbH.

In dieser Arbeit wird eine Variationsmethode zur QPE anhand von polarimetrischen Radardaten untersucht. Die relevanten meteorologischen und mathematischen Grundlagen werden in diesem Kapitel diskutiert.

### 2.1 Meteorologische Grundlagen

In der Radarmeteorologie werden Wetterradarsysteme eingesetzt, um Informationen über Wetterereignisse zu erhalten. Ein Anwendungsfall ist die quantitative Niederschlagsmengenbestimmung, für die die gemessene Radarreflektivität herangezogen wird. Polarimetrische Radarsysteme, die Radarstrahlung in zwei Polarisationsrichtungen aussenden, können dafür genutzt werden, zusätzliche Informationen über den Niederschlag zu gewinnen. Die in dieser Arbeit untersuchte Variationsmethode modelliert über ein Vorwärtsmodell diese polarimetrische Messungen, indem die Streuung der Radarstrahlen in Regenfeldern beschrieben wird. In dieses Modell gehen mikrophysikalische Eigenschaften von einzelnen Regentropfen wie Form und Brechungseigenschaften ein.

In dieser Arbeit werden nur Regenereignisse betrachtet. Für gemischte Niederschlagsereignisse, etwa mit Schneekristallen oder Hagelkörner, treffen die folgenden Eigenschaften nicht notwendigerweise zu und das Modell muss angepasst werden.

### 2.1.1 Niederschlag

Als *Niederschlag* wird der Vorgang bezeichnet, dass Wasser- oder Eisteilchen, die in der Atmosphäre durch Kondensation entstanden sind, aus dieser herausfallen und am Boden auftreffen. Flüssige und gefrorene Wasserteilchen in der Atmosphäre werden auch *Hydrometeore* genannt. Kleine Hydrometeore, die in der Luft schweben, heißen Wolkenteilchen. Im Gegensatz dazu erreichen Niederschlagsteilchen ein Gewicht, das sie fallen lässt. Aus Wolkenteilchen können Niederschlagsteilchen entstehen, indem diese zusammenstoßen und sich dabei verbinden [Kra07, Kap. 15.3]. Beispiele für fallende Hydrometeore sind Regentropfen, Schneekristalle, Graupel, Hagelkörner und Eisnadeln [Klo08, Kap. 4.4].

Niederschlagsmengen können räumlich punktuell mittels Regenschreibern bestimmt werden, die in festen Zeitabschnitten die aufgefangenen Mengen über Volumen oder Gewicht vermessen. Typische Einheiten für die gefallenen Mengen sind  $l/m^2$  oder als mm Niederschlagshöhe. Es gilt  $1 l/m^2 = 1 \text{ mm Niederschlagshöhe}$  [Kra07, Kap. 15.3]. Die *Regenrate*  $R$  gibt die Niederschlagsmenge pro Zeiteinheit in mm/h an. Seit der Etablierung von Wetterradarsystemen werden diese ebenfalls dafür eingesetzt, Niederschlagsmengen zu schätzen. Details zu den Mess- und Schätzmethode sind in Abschnitt 2.1.3 dargestellt.

Es kann zwischen *stratiformen* und *konvektiven* Niederschlagsereignissen unterschieden werden. Konvektive Systeme sind durch niedrige Flächenausdehnung und hohe Regenraten charakterisiert, während stratiforme Systeme sich durch größere horizontale Homogenität und niedrigere Regenraten auszeichnen [Ana04].

### 2.1.2 Wetterradar

Wetterradarsysteme werden zur Messung von atmosphärischen Größen eingesetzt, die so erfassten Daten können zur Auswertung vergangener und Vorhersage zukünftiger Wetterereignisse genutzt werden. Niederschlagsradargeräte erfassen Informationen über Niederschlagsereignisse.

#### Ursprünge der Radartechnologie

Die ersten Radarsysteme (RADAR für *RA*dio *D*etection *A*nd *R*anging) wurden ursprünglich zu militärischen Zwecken entwickelt, etwa zur Entdeckung von feindlichen Flugzeugen und Schiffen. Sie wurden während des zweiten Weltkrieg unter anderem von Großbritannien, Deutschland und den USA eingesetzt und erfuhren daher eine schnelle technische Weiterentwicklung. Echos von Wetterphänomenen stellten dabei zunächst Störungen in den Messdaten dar, da sie die militärischen Ziele verdecken konnten. Nach dem Krieg wurde die zivile, meteorologische Anwendung von Radarsystemen Forschungsgegenstand, mit dem Ziel sie etwa für Unwetterwarnungen und Niederschlagsschätzung einzusetzen [RN18, Preface; Rag03, Kap. 1.1]. Mittlerweile ist die Radarmeteorologie weit verbreitet für die Untersuchung von Wetterstrukturen und die Bereitstellung von Daten über Niederschläge, Unwetter und andere Wetterphänomene.





Abbildung 3: WSR-88D Doppler-Wetterradar in South Dakota. Die Radarantenne wird von einer kugelförmigen Schutzhülle, dem Radom, geschützt. Von Eric Kurth, NOAA Photo Library, CC BY 2.0 [Kur04].

### Grundprinzipien eines Wetterradars

Das Grundprinzip eines Wetterradars ist, dass über eine Antenne elektromagnetische Wellen ausgestrahlt werden, die an Objekten und Teilchen in der Atmosphäre gestreut und reflektiert werden. Das Radarsystem empfängt diese zurückgestreuten Strahlen. Die gemessene Energie dieser Wellen kann über den Laufzeitunterschied und die Antennenstellung einer geographischen Position zugeordnet werden [Wei15]. Es gibt Wetterradargeräte, die mobil in Flugzeugen oder Fahrzeugen eingesetzt werden, bei Niederschlagsradarsystemen handelt es sich aber zumeist um stationäre Messgeräte am Boden, die jeweils die Umgebungsregion erfassen. Ein solches Wetterradar ist beispielhaft in Abb. 3] abgebildet.

Bei klassischen Niederschlagsradarsystemen werden meteorologische Echos über den *Reflektivitätsfaktor*  $Z$  quantifiziert. Dieser wird mittels der Radargleichung aus der Leistung  $P_E$  des zurückgestreuten Signals berechnet. Für Wetterradarsysteme lautet die Radargleichung in vereinfachter Form

$$P_E = \frac{CZ|K|^2}{r^2}, \quad (3)$$

wobei  $C$  eine vom Radarsystem abhängige Konstante,  $r$  die Entfernung zum Radar,  $K$  ein vom Material des Ziels abhängiger Faktor (siehe auch Abschnitt 2.1.4) und  $Z$  der Reflektivitätsfaktor ist [RN18, Kap. 5.4.3; Wei15]. Die Einheit der Reflektivität  $Z$  ist  $\text{mm}^6\text{m}^{-3}$ .

### Radargeometrie

Für die Beobachtung der unteren Atmosphäre im Umkreis eines Radargeräts wird der Radarstrahl in einem Winkel  $\theta$  zur Erdoberfläche abgestrahlt, der *Elevation* genannt wird. Dieser wird in Abhängigkeit von der Topografie der Umgebung gewählt, damit keine Abschirmungseffekte etwa durch Bergkuppen auftreten. In einem Messzyklus, auch *Sweep* genannt, dreht sich die Antenne einmal um die eigene Achse, um Radarstrahlen in alle Richtungen auszusenden und die zurückgestrahlte Energie zu messen. Die Richtung

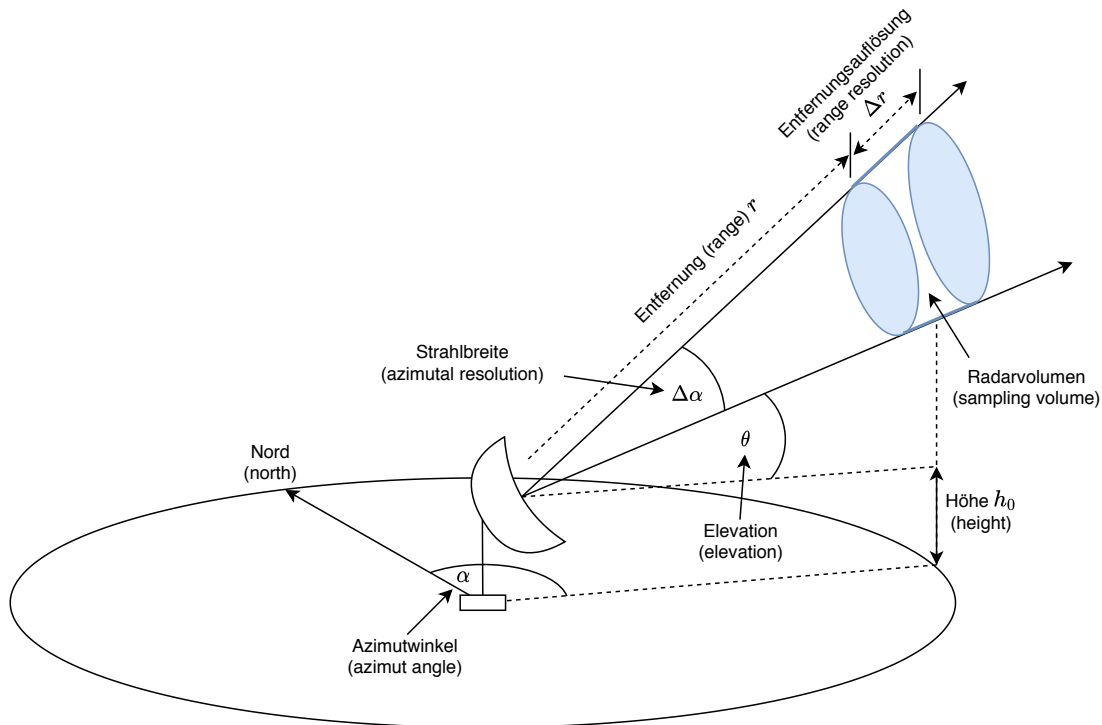


Abbildung 4: Schematische Darstellung der bei einer Radarmessung wichtigen geometrischen Größen und Grundbegriffe. Das Radargerät befindet sich in einer Höhe  $h_0$  über der Erdoberfläche. Im Elevationswinkel  $\theta$  zur Horizontalen werden elektromagnetische Wellen abgestrahlt. Die geografische Richtung eines Radarstrahls wird über den Azimutwinkel  $\alpha$  definiert, dem Winkel zum geografischen Norden. Die Bündelung der Radarimpulse wird über die Strahlbreite  $\Delta\alpha$  beschrieben und definiert die Auflösung der Radarmessung in azimuthaler Richtung. Die Größe  $\Delta r$  beschreibt die Auflösung in radialer Richtung. Durch  $\Delta\alpha$  und  $\Delta r$  sind die Radarvolumina festgelegt, für die die reflektierte Energie der Radarstrahlen gemessen wird.

wird als Winkel zwischen Radarstrahl und dem geografischen Norden angegeben, der als Azimutwinkel  $\alpha$  bezeichnet wird. In Abb. 4] ist die Geometrie einer Radarmessung schematisch dargestellt.

Bei der Messung in einer Elevation ergibt sich also ein zweidimensionales Radarbild in Polarkoordinaten mit einer polaren Auflösung von  $\Delta\alpha$  und einer radialen Auflösung von  $\Delta r$ , wobei der Wert jedes Bildpunktes dem Reflektivitätsfaktor  $Z$  für das Radarvolumen (Abb. 4]) bei entsprechendem Azimutwinkel  $\alpha$  und entsprechender Entfernung  $r$  entspricht. In radialer Richtung werden die einzelnen Bildpunkte auch *Gates* genannt. Im operationellen Betrieb werden oft Sweeps für verschiedene Elevationswinkel durchgeführt, um Volumendatensätze zusammenzustellen [Rag03, Kap. 1.2.6].

### Frequenz und Wellenlänge

Wellenlänge und Frequenz können über den Zusammenhang  $c = f\lambda$  ineinander umgerechnet werden, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist. Typische Frequenzen für Niederschlagsradargeräte sind solche aus den Frequenzbändern S, C und X. S-Band-Radargeräte operieren beispielsweise bei einer Frequenz  $f = 2.8$  GHz bzw. mit einer Wellenlänge  $\lambda = 107$  mm. Die Wahl der Wellenlänge hängt von den spezifischen Anforderungen ab. Ein wichtiger Entscheidungsfaktor ist die Dämpfung: Je größer die Wellenlänge, desto weniger wird das Radarsignal bei der Ausbreitung gedämpft. Die Reichweite steigt mit höherer Wellenlänge. Allerdings benötigen S-Band-Radargeräte auch größere Antennen und mehr Energie als Radargeräte mit niedrigeren Wellenlängen und sind auf eine größere Auflösung beschränkt [RN18, Kap. 2.2; Rag03, Kap. 1.2.21].

### Polarimetrisches Wetterradar

In den 1970er Jahren begann die Forschung zum Einsatz von unterschiedlich polarisierten elektromagnetischen Wellen in der Radarmeteorologie [Zha17, Kap. 1.1]. Ein wichtiger Beitrag dazu war die Arbeit von Seliga und Bringi aus dem Jahr 1976 [SB76], welche die Nutzung von Radarstrahlen mit vertikaler und horizontaler Polarisation zur Verbesserung von Niederschlagsschätzungen vorschlugen. Vertikale bzw. horizontale Polarisation bedeutet hierbei, dass die elektromagnetischen Wellen, die als Transversalwellen beschrieben werden, in vertikaler bzw. horizontaler Richtung linear polarisiert sind [DZ93, Kap. 2.1].

Durch die zueinander orthogonalen Polarisationen können zusätzliche Informationen über die Form der Hydrometeore gewonnen werden, etwa über den Grad der Abflachung von Regentropfen beim Fallen. Der Zusammenhang zwischen Regentropfengröße und -form wird in Abschnitt 2.1.4 näher beleuchtet. In Abb. 5] ist das Prinzip von vertikalen und horizontalen Radarstrahlen, im Folgenden auch Dual-Pol-Radarwellen genannt, vor dem Auftreffen auf einen sphäroiden Hydrometeor dargestellt.

Durch die separate Messung mit horizontaler und vertikaler Polarisation erhält man zwei unabhängige Datensätze für die aktuelle Niederschlagsituation, die auf unterschiedliche Arten verglichen werden können. Die aus diesen Daten abgeleiteten *Radarvariablen* werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

### Radarvariablen

In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Variablen, die mit einem Dual-Pol-Radarsystem aufgenommen werden, erläutert. Die Einheit der jeweiligen Größe ist bei den Gleichungen in eckigen Klammern nachstehend aufgeführt. Ein Überblick über die Variablen ist in Tabelle 1] zu finden.

Bei klassischen Niederschlagsradarsystemen sind die Radarwellen meist horizontal polarisiert. Der oben eingeführte Reflektivitätsfaktor  $Z$  ist also ein Maß für die reflektierte Energie in horizontaler Polarisation und wird daher mit  $Z_h$  benannt. Bei einem Dual-Pol-Radar wird zusätzlich die Reflektivität  $Z_v$  bei vertikal polarisierten Radarimpulsen gemessen [Kum13]. Die Reflektivität wird meist in dBZ, also in logarithmischer Skala, angegeben:

$$Z_H = 10 \log_{10}(Z_h) \text{ [dBZ]}, \quad (4)$$

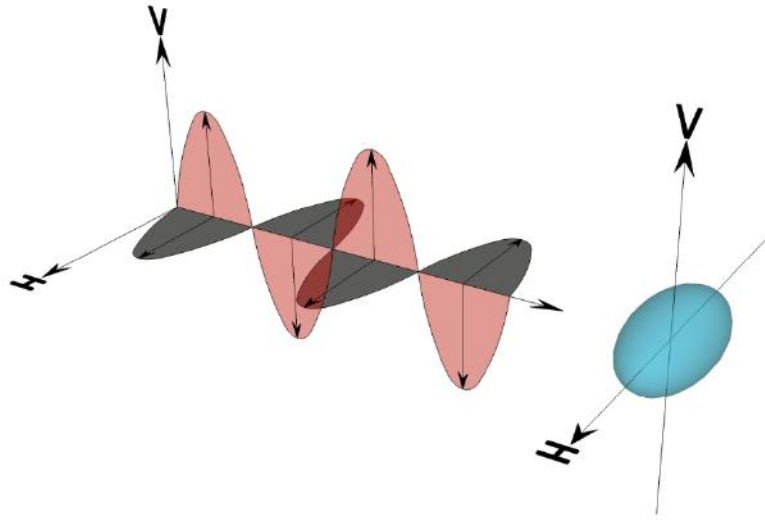


Abbildung 5: Dual-Pol-Radarwellen vor dem Auftreffen auf einen abgeflachten Regentropfen. H und V kennzeichnen die horizontale bzw. vertikale Achse. Grafik siehe [CYZ12, Abb. 2].

$$Z_V = 10 \log_{10}(Z_v) \text{ [dBZ]}. \quad (5)$$

Im Folgenden steht  $Z_h$  bzw.  $Z_v$  für Reflektivität in  $\text{mm}^6\text{m}^{-3}$  und  $Z_H$  bzw.  $Z_V$  für Reflektivität in dBZ.

Über die sogenannte *differentielle Reflektivität*  $Z_{dr}$  können die Reflektivitäten für die beiden Polarisationsrichtungen verglichen werden. Sie ist definiert als die Differenz in logarithmischer Skala:

$$Z_{dr} = 10 \log \frac{Z_h}{Z_v} = Z_H - Z_V \text{ [dBZ]}. \quad (6)$$

$Z_{dr}$  ist ein Maß für das reflektivitäts-gewichtete Achsenverhältnis der Hydrometeore. Für kugelförmige Ziele ist  $Z_{dr}$  nahe 0.

Regentropfen werden beim Fallen abgeflacht und das umso mehr, je größer sie sind. Da ihre Hauptachse horizontal orientiert ist, verursachen sie positive Werte für die differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$ . Die  $Z_{dr}$ -Werte steigen mit der Stärke eines Regenereignisses, da dort auch die Größe der Regentropfen und ihre Abflachung steigt. Außerdem kann die differentielle Reflektivität verwendet werden, um zwischen Hydrometeorarten zu unterscheiden, da beispielsweise taumelnde Hagelkörner im Durchschnitt in beide Richtungen die gleiche Ausdehnung haben und trockener Hagel Werte von  $Z_{dr} = 0$  hervorrufen kann [Kum13].

Wenn sich Radarstrahlung durch Niederschlag hindurch ausbreitet, unterliegt sie einer zusätzlichen Phasenverschiebung im Vergleich zur Ausbreitung in Luft. Wenn die Niederschlagsteilchen abgeflacht sind, breitet sich eine horizontal polarisierte Welle mit geringerer Geschwindigkeit aus als eine vertikal polarisierte, weshalb der Phasenunterschied

Tabelle 1: Überblick über polarimetrische Radarvariablen

Name	Zeichen	Einheit	Beschreibung
Reflektivität	$Z_h, Z_v$	$\text{mm}^6\text{m}^{-3}$	Aus der zurückgestrahlten Leistung berechneter Reflektivitätsfaktor
Reflektivität	$Z_H, Z_V$	dBZ	Logarithmierter Reflektivitätsfaktor
Differentielle Reflektivität	$Z_{dr}$	dBZ	Verhältnis der Reflektivität bei horizontaler Polarisation zur Reflektivität bei vertikaler Polarisation
Differentielle Phase	$\Phi_{dp}$	$^\circ$	Kumulierte Phasenverschiebung zwischen vertikaler und horizontaler Polarisation
Spezifische differentielle Phase	$K_{dp}$	$^\circ\text{km}^{-1}$	Phasenverschiebung zwischen vertikaler und horizontaler Polarisation im Einheitsvolumen
Kopolarer Korrelationskoeffizient	$\rho_{hv}$	-	Korrelation zwischen den Messungen mit horizontaler und vertikaler Polarisation, im Intervall (0,1)
Doppler-Spektrumsbreite	$W$	m/s	Maß für die Variabilität der Geschwindigkeiten einzelner Streuer innerhalb eines Radarvolumens

zwischen den Polarisationen kontinuierlich ansteigt. Dieser Unterschied wird durch die *differentielle Phase*  $\Phi_{dp}$  beschrieben:

$$\Phi_{dp} = \Phi_v - \Phi_h \text{ [}^\circ\text{]}. \quad (7)$$

Die differentielle Phase  $\Phi_{dp}$  steigt normalerweise in Richtung des Radarstrahls monoton an und wird nicht durch Dämpfungseffekte und Unsicherheiten bei der Radarkalibrierung beeinträchtigt. Nicht-meteorologische Echos verursachen stark verrauschte Werte für  $\Phi_{dp}$  [Mei05, Kap. 5.2.4].

Die *spezifische differentielle Phase*  $K_{dp}$  ist die Änderungsrate der differentiellen Phase in radialer Richtung, sie gibt also die auftretende Phasenverschiebung zwischen den Polarisationen innerhalb eines Radarvolumens an:

$$K_{dp}(r) = 0.5 \frac{d\Phi_{dp}(r)}{dr} \text{ [}^\circ\text{km}^{-1}\text{]} \quad (8)$$

Für Regen ergeben sich positive Werte für  $K_{dp}$ . Die Bestimmung von  $K_{dp}$  aus  $\Phi_{dp}$  kann sich allerdings schwierig gestalten, da  $\Phi_{dp}$ -Messungen meist verrauscht sind und sich

als Ableitung unter Umständen negative, nicht-physikalische Werte für  $K_{dp}$  ergeben [Kum13].

Der *kopolare Korrelationskoeffizient*  $\rho_{hv}$  gibt die Korrelation zwischen den Reflektivitäten  $Z_h$  und  $Z_v$  an. Er ist ein Maß für die Variabilität der Formen der Streuteilchen. In Regen, wo die Regentropfen zwar unterschiedliche Größen, aber ähnliche Formen haben, ist er nahe 1. Er sinkt, wenn eine Vielzahl verschiedener Arten, Formen und Orientierungen der Teilchen vorliegt. Mithilfe von  $\rho_{hv}$  können daher nicht-meteorologische Echos herausgefiltert und Hinweise zur Unterscheidung zwischen Hydrometeoren gesammelt werden [Kum13].

Schon vor der Einführung der Dual-Pol-Technologie konnten viele Radarsysteme zusätzlich zur Reflektivität die Doppler-Geschwindigkeit  $V_r$  und die *Doppler-Spektrumsbreite*  $W$  messen. Sich bewegende Objekte erzeugen durch den Doppler-Effekt eine Frequenzverschiebung bei den Radarwellen. Hieraus kann die Geschwindigkeit  $V_r$  der Objekte abgeleitet werden, welche also Rückschlüsse über die Bewegung von Niederschlagsereignissen zulässt [Rin91, Kap. 6]. Die Frequenzverschiebungen können innerhalb eines Samplingvolumens sehr unterschiedlich sein, für  $V_r$  wird die mittlere Frequenzverschiebung herangezogen. Die Spektrumsbreite ist ein Maß für die Bandbreite der verschiedenen auftretenden Frequenzverschiebungen und somit für die Variabilität der Geschwindigkeiten innerhalb eines Radarvolumens [Rin91, Kap. 7].

### **Fehlerquellen und Anwendungsgrenzen der Radarmessung**

Bei Betrachtung der in Abb. 4] dargestellten Messanordnung werden bereits zwei Beschränkungen des Niederschlagsradars deutlich: Zum einen steigt mit größerer Entfernung zum Radar auch die Höhe des vermessenen Radarvolumens. Dies bedeutet, dass die Messergebnisse immer weniger die Situation an der Erdoberfläche widerspiegeln. Für die Hydrologie sind vor allem die Niederschlagsmengen am Boden von Interesse. Das Radarbild projiziert allerdings die Informationen über den Niederschlag in einer bestimmten Höhe an dieselbe Position. Der Niederschlag kann sich aber durch Winde, Verdunstung und Temperaturgefälle auf dem Weg zum Boden noch in Art und Menge verändern. Zum anderen steigt mit der Entfernung zum Radar auch die Größe der Radarvolumina, wodurch Gradienten in den Messwerten und kleinräumige Ereignisse durch Mittelung verschleiert werden können [HDK00].

Folgende weitere Fehlerquellen können die Qualität von Radardaten vermindern [HDK00]:

- *Bodenechos (ground clutter)*: Als Bodenechos werden nicht-meteorologischen Echos bezeichnet, die aus dem Auftreffen des Radarstrahls auf Bodenobjekte resultieren. Diese sind meist stationär und stellen beispielsweise Windparks oder Kraftwerke dar.
- *Strahlblockierung*: Aufgrund der Umgebungstopografie kann die Ausbreitung von Radarstrahlen teilweise oder vollständig durch Berge, Gebäude oder andere Erhebungen aufgehalten werden.
- *Dämpfung*: Bei der Ausbreitung durch Niederschlag verlieren die Radarwellen an Energie und es kommt mit steigender Entfernung zum Radargerät zu vermehr-

ten Dämpfungseffekten. Die Höhe der Dämpfung in einem Punkt ist annähernd proportional zur Regenrate, der Effekt kumuliert in Ausbreitungsrichtung.

Diese möglichen Fehler in den Radarmessungen können durch verschiedene Korrekturmethode ausgeglichen werden [HDK00]. Einige Korrekturen, wie beispielsweise die Eliminierung von Bodenechos, werden schon direkt am Radargerät ausgeführt, sodass diese Fehler in den ausgelieferten Messdaten nicht auftreten.

### 2.1.3 Quantitative Niederschlagsmengenbestimmung

Für die Bestimmung von Niederschlagsmengen werden traditionell Regenschreiber eingesetzt, die lokal den zeitlich kumulierten Niederschlag messen. Im Gegensatz dazu sind Radardaten Flächendaten, weshalb es interessant ist, sie zur Schätzung von Niederschlagsmengen zu nutzen. Da die Radardaten, wie im vorherigen Abschnitt ausgeführt, einigen Einschränkungen unterliegen, ist eine möglichst genaue QPE anhand von Radardaten Forschungsgegenstand.

#### Regenschreiber

Regenschreiber (RS) messen Inkremente des akkumulierten Niederschlags über die Zeit. Diese Inkremente können etwa über Gewicht oder Volumen bestimmt werden. Die einfachsten Modelle sind Behälter, von denen die gesammelte Regenmenge in bestimmten Zeitintervallen abgelesen wird. Das Volumen des Niederschlags kann in Beziehung zur Fläche der Öffnung des Behälters gesetzt werden, um die Regenrate in mm/h zu erhalten. Andere RS-Geräte sind etwa Kippbehälter, die bei einem bestimmten Volumen kippen und einen Zeitstempel setzen, Wäegeräte, die die Regenmenge über das Gewicht bestimmen, sowie optische Messgeräte, die über die Dämpfung von Lichtstrahlen auf die Regenrate schließen. RS-Messungen stellen Punktmessungen dar, die zwar eine hohe Genauigkeit ermöglichen, aber keine flächendeckenden Daten für beliebige Orte liefern [Mic+09]. Sie können zur Validierung von Ergebnissen aus QPE-Methoden verwendet werden.

#### Radarreflektivität

Radardaten sind Flächendaten, die Niederschlagsinformationen mit hoher räumlicher Auflösung bieten. Trotz einiger technischer Grenzen und Fehlerquellen können sie genutzt werden, um Rückschlüsse auf die Regenrate zu ziehen. Anders als bei Regenschreiberdaten handelt es sich bei Radardaten um Momentanmessungen. Es gibt keine einfache physikalische Beziehung zwischen Reflektivitätsfaktor  $Z$  und Regenrate  $R$ . Empirische Studien zum Vergleich von Reflektivitätswerten und Regenraten aus RS-Messungen in verschiedenen Wettersystemen approximieren den Zusammenhang heuristisch über die Gleichung

$$Z_h = aR^b, \quad (9)$$

wobei die Parameter  $a$  und  $b$  empirisch ermittelt werden und  $Z_h$  in  $\text{mm}^6\text{m}^{-3}$  angegeben wird. Die Regenrate  $R$  ergibt sich also als

$$R = \left( \frac{Z_h}{a} \right)^{1/b}. \quad (10)$$

Diese Art von Beziehung wird *Z-R-Beziehung* genannt [RN18, S. 13.4]. Die Parameter  $a$  und  $b$  variieren abhängig von Niederschlagsarten, der Tropfengrößenverteilung (siehe Abschnitt 2.1.5), Jahreszeiten und klimatischen Regionen. Eine Studie aus dem Jahr 2003 [RU03] berichtet von über 200 verschiedenen Beziehungen in der Literatur, die in unterschiedlichen Anwendungsszenarien eingesetzt wurden. Nach [Rag03, Kap. 7.2.3] variieren die Werte von  $a$  zwischen 24 und 865, die Werte für  $b$  zwischen 1.08 und 2.37. Die sogenannte *Marshall-Palmer-Z-R-Beziehung* (MP-Beziehung) mit  $a = 200$  und  $b = 1.6$  ist eine der meistgenutzten Beziehungen [RZ19, Kap. 10.1], wird für stratiforme Niederschlagsereignisse verwendet und wurde unter anderem bei Studien in den USA [Zha17, Kap. 6.3.1] und Thailand eingesetzt [Wet+13]. Für konvektive Niederschläge unterschätzt die MP-Beziehung die Regenrate tendenziell.

### Polarimetrische Radarvariablen

Polarimetrische Radardaten enthalten Informationen über die Art der Hydrometeore sowie die Tropfenform und damit auch die Tropfengröße. Deshalb wurden basierend auf polarimetrischen Radarvariablen empirische Regenratenschätzer entwickelt, die diesen Vorteil nutzen. Beispiele hierfür aus [Zha17, Kap. 6.3.2] sind

$$R(Z_h, Z_{dr}) = aZ_h^b Z_{dr}^c, \quad (11)$$

und

$$R(K_{dp}) = aK_{dp}^b. \quad (12)$$

Die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $c$  werden durch Regression aus beobachteten oder simulierten Daten abgeleitet und können sich je nach Anwendungsfall unterscheiden. Mit der Nutzung von  $Z_{dr}$  kann die Schätzung der Regenrate durch Informationen über Tropfenformen verfeinert werden. Die Schätzung der Regenrate aus  $K_{dp}$  ist weniger von Variabilitäten in der Größenverteilung der Regentropfen abhängig als die *Z-R-Beziehung* [Hua+17].

### Aneichung

Durch eine sogenannte *Aneichung* können die Vorteile von Regenschreiber- und Radarmessungen kombiniert werden. Dabei werden die aus Radardaten berechneten Regenraten an die punktuell vorliegenden Regenschreibermessungen angepasst, sodass die Radarschätzungen im langfristigen Mittel mit den Regenschreiberwerten übereinstimmen. Eine Möglichkeit der Aneichung ist beispielsweise die Berechnung von Bias-Faktoren, die das Verhältnis zwischen RS- und Radarwerten angeben, und die entsprechende Skalierung der Regenrate. Zwischen den Regenschreiberstandorten werden die Bias-Faktoren interpoliert [Mei05, Kap. 2.5; GD09].

### Weitere Ansätze

Bringi und Chandrasekar weisen zusätzlich in [BC01, Kap. 8] auf statistische Methoden und den Einsatz von neuronalen Netzen für Niederschlagsmengenschätzungen hin. In dieser Masterarbeit wird ein Variationsansatz untersucht, der von Hogan im Jahr 2007 [Hog07] veröffentlicht und in weiteren Untersuchungen weiterentwickelt wurde. Die Methodik wird in Kapitel 3 detailliert beschrieben.



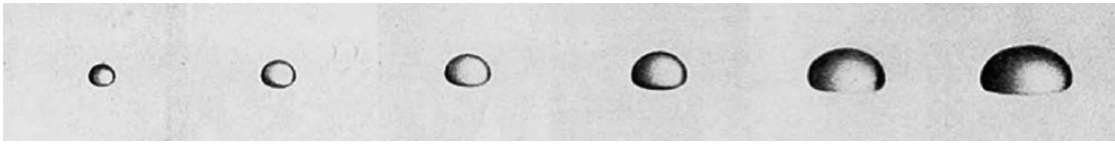


Abbildung 6: Fotos von fallenden Wassertropfen in der Luft (Durchmesser 2.7, 3.45, 5.3, 5.8, 7.75, 8.0 mm). Grafik aus [Zha17, Abb. 2.6], ursprünglich [PK80].

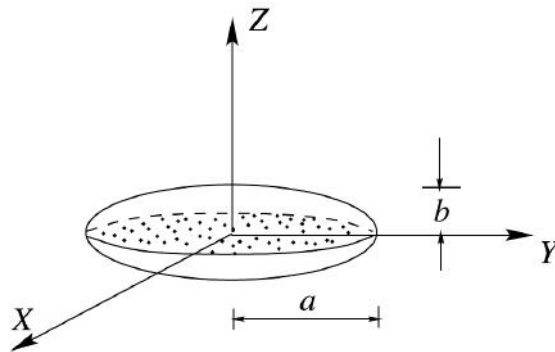


Abbildung 7: Sphäroid-Modell für abgeflachte Regentropfen, mit Rotationsachse  $b$  und horizontale Halbachse  $a$ , Grafik aus [BC01, Abb. 2.7]

#### 2.1.4 Mikrophysikalische Eigenschaften von Niederschlag

Sollen Radarvariablen aus internen Parametern modelliert werden, werden Informationen über die Größenverteilung der Regentropfen und ihre Streuungseigenschaften benötigt. Die relevanten mikrophysikalischen Zusammenhänge werden in diesem Abschnitt erläutert.

##### Tropfenform

Ein Regentropfen ist nicht kugelförmig, sondern wird beim Fallen abgeflacht und dies umso mehr, je größer er ist. Messungen auf Grundlage von Fotoaufnahmen (Abb. 6]) legen nahe, dass die Form eines Tropfens durch ein Sphäroid, das heißt ein Ellipsoid, bei dem zwei Achsen gleich lang sind, annähernd beschrieben werden kann [Zha17, Kap. 2.1.1.2], [Zha17, Kap. 3.5.1].

Die Größe eines solchen Sphäroids wird im Folgenden über den volumenäquivalenten Durchmesser  $D$  beschrieben, also den Durchmesser jener Kugel, die das gleiche Volumen hat.  $D$  nimmt bei Regen Werte von wenigen Mikrometern bis zu 10 mm an. Im Folgenden wird  $D$  immer in der Einheit mm angegeben. Das Sphäroid kann über das Verhältnis der Rotationsachse  $b$  zur horizontalen Achse  $a$  beschrieben werden (Abb. 7]). Empirische Daten wurden dafür verwendet, einen Zusammenhang zwischen diesem Achsenverhältnis  $\gamma = \frac{b}{a}$  und dem Durchmesser  $D$  abzuleiten. In der Literatur finden sich verschiedene dieser Zusammenhänge, die sich in ihrer Datengrundlage und der verwendeten Fittingmethode unterscheiden, zwei davon sind hier aufgeführt:

- Nach [BZV02]:

$$\gamma(D) = 0.9951 + 0.0251D - 0.03644D^2 + 0.005303D^3 - 0.0002492D^4. \quad (13)$$

- Wie in [Hog07] verwendet, zusammengesetzt aus den Gleichungen nach [ABL99] und [God+95] (siehe [RGS05, Gl. (5)]):

$$\gamma(D) = \begin{cases} 1.0048 + 0.00057D - 0.02628D^2 + 0.003682D^3 - 0.0001677D^4, & D < 1.0, \\ 1.012 - 0.01445D - 0.01028D^2, & 1.0 \leq D < 4.5, \\ 1.075 - 0.065D - 0.0036D^2 + 0.0004D^3, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (14)$$

### Brechungseigenschaften von Wasser

Bei meteorologischen Messungen mit Radargeräten werden die optischen Eigenschaften von Wasser genutzt. Um die Streuungseigenschaften von Regentropfen beschreiben zu können, müssen Modellannahmen zur Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  und dem daraus abgeleiteten komplexen Brechungsindex  $n$  gemacht werden. Die Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  wird auch *relative Permittivität* genannt und kann nach [LHM91] folgendermaßen bestimmt werden:

$$\epsilon_r(f, T) = \frac{\epsilon_0(T) - \epsilon_1(T)}{1 - i(f/f_P(T))} + \frac{\epsilon_1(T) - \epsilon_2(T)}{1 - i(f/f_S(T))} + \epsilon_2 \quad (15)$$

mit

- $\theta(T) = 1 - 300/(237.15 + T)$ ,
- $\epsilon_0(T) = 77.66 - 103.3\theta(T)$ ,
- $\epsilon_1(T) = 0.0671\epsilon_0(T)$ ,
- $\epsilon_2(T) = 3.52 + 7.52\theta(T)$ ,
- $f_P(T) = 20.20 + 146.4\theta(T) + 316\theta(T)^2$ ,
- $f_S(T) = 39.8f_P(T)$ ,

wobei  $f$  die Frequenz in GHz und  $T$  die Temperatur in °C angibt. Der komplexe Brechungsindex  $n$  ergibt sich nach [Rag03, Gl. (2.8)] aus der relativen Permittivität  $\epsilon_r$  und der magnetischen Permeabilität  $\mu$  als

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu} \quad (16)$$

und der dielektrische Faktor  $K$  nach [Zha17, Gl. (4.55)] als

$$K = \frac{(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)}. \quad (17)$$

Bei der Ausbreitung der Radarwellen in der Atmosphäre kann  $\mu = 1$  angenommen werden [Rag03, Gl. 2.8], sodass sich in diesem Anwendungsfall Gleichung (16) zu  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  vereinfacht. Diese Größen gehen in die Modellierung der Streuung von Radarwellen an einem einzelnen Regentropfen ein, was im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

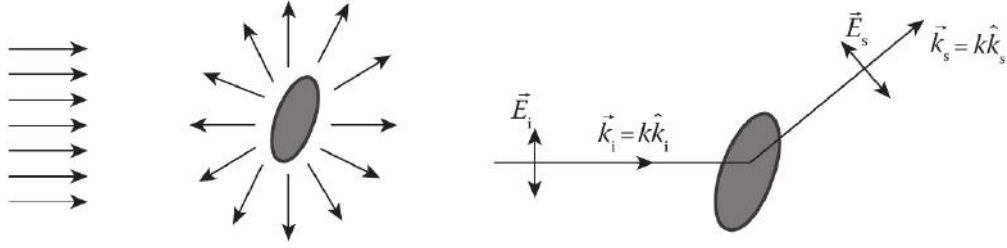


Abbildung 8: Eintreffende linear polarisierte elektromagnetische Wellen werden an einem Hydrometeor in Abhängigkeit von seiner Form und seinen Brechungseigenschaften in alle Richtungen gestreut.  $\vec{E}_i$  bezeichnet das elektrische Feld der einfallenden,  $\vec{E}_s$  das der gestreuten Welle. Grafik siehe [Zha17, Abb. 3.8].

### Streuungsamplituden

Trifft eine elektromagnetische Welle auf einen Hydrometeor, wird ein Teil der Energie reflektiert, ein Teil propagiert hindurch, ein Teil wird absorbiert und der verbleibende Rest in alle Richtungen gestreut. Die Eigenschaften der Absorption und Streuung hängen von der Wellenfrequenz und -polarisation und von den Charakteristiken des Hydrometeors ab. Die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in Raum und Zeit kann durch ein elektrisches Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  beschrieben werden, wobei  $\vec{r}$  die Orts- und  $t$  die Zeitkomponente ist. Durch die Darstellung mit komplexer Amplitude lassen sich die Orts- und Zeitabhängigkeit trennen:  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}]$ . Im Folgenden werden linear polarisierte, ebene Wellen mit konstanter Frequenz  $\omega$  bei Ausbreitung in einem Medium mit konstanter Permittivität und Permeabilität betrachtet. Durch Anwendung der Maxwell-Gleichungen erhält man für das elektrische Feld der einfallenden Welle die Lösung

$$\vec{E}_i = \hat{e}_i E_0 e^{-j(\vec{k}_i, \vec{r})}, \quad (18)$$

wobei  $\hat{e}_i$  die Polarisation,  $E_0$  die Amplitude und  $\vec{k}_i$  den Wellenvektor der Welle angibt. Der Wellenvektor setzt sich mit  $\vec{k}_i = k\hat{k}_i$  aus der Wellenzahl  $k = \omega\sqrt{\epsilon_r\mu}$  und dem Einheitsvektor der Ausbreitungsrichtung  $\hat{k}_i$  zusammen. Beim Auftreffen auf ein Teilchen wird ein Teil der Energie in Form elektromagnetischer Wellen in alle Richtungen gestreut. Von einem entfernten Beobachtungspunkt (*far field*) aus kann das elektrische Feld dieser Streuung als kugelförmige Welle aufgefasst und durch

$$\vec{E}_s = \vec{s}(\hat{k}_s, \hat{k}_i) E_0 \frac{e^{jkr}}{r} \quad (19)$$

dargestellt werden, wobei  $\vec{s}(\hat{k}_s, \hat{k}_i)$  die Streuungsamplitude und -phase angibt (Abb. 8) [Zha17, Kap. 3.1.3].

Der Term  $\vec{s}(\hat{k}_s, \hat{k}_i)$  ist dabei neben der Richtung und Polarisation der Wellen abhängig von den elektromagnetischen Eigenschaften (Permittivität und Permeabilität) und der Form des Partikels. Es gibt verschiedene Arten, das Koordinatensystem zur Beschreibung der eintreffenden und gestreuten Wellen festzulegen. Abhängig davon lässt sich die

Streuungsmatrix  $\mathbf{S}$  definieren, die die Amplituden- und Phaseninformationen enthält. Die Streuungsmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{hh} & s_{hv} \\ s_{vh} & s_{vv} \end{bmatrix}$$

besteht auf der Diagonalen aus den kopolaren Komponenten  $s_{hh}$  und  $s_{vv}$  für horizontale bzw. vertikale Polarisation und den kreuzpolaren Komponenten  $s_{hv}$  und  $s_{vh}$  [Zha17, Kap. 3.2.1].

Die Streuungsamplitude ist unterschiedlich groß, je nachdem wie groß der Winkel zwischen einfallenden und gestreuten Strahlen ist. Von Vorwärtsstreuung (*forward scattering*) wird bei einem Winkel von  $\alpha \approx 0$  gesprochen, wenn also die gestreuten Strahlen in etwa die gleiche Ausbreitungsrichtung haben wie die einfallenden Strahlen. Rückwärtsstreuung (*back scattering*) bedeutet einen Streuwinkel von  $\alpha \approx 180^\circ$  [RZ19, Kap. 5.1]. Die entsprechenden Streuungsamplituden werden mit  $s_{hh}(\pi)$  und  $s_{vv}(\pi)$  für Rückwärtsstreuung bzw.  $s_{hh}(0)$ ,  $s_{vv}(0)$  für Vorwärtsstreuung gekennzeichnet.

Für Teilchen, deren Durchmesser klein im Vergleich zur Wellenlänge der einfallenden Welle ist, wird die Streuung als *Rayleigh-Streuung* bezeichnet. Das Teilchen wird polarisiert und wirkt dadurch als eine Dipol-Antenne, die wiederum selbst elektromagnetisches Licht ausstrahlt [Zha17, Kap. 3.3]. Für sphäroide Partikel gibt es eine mathematische Beschreibung der Rayleigh-Streuung, mit der die Streuungsmatrix bestimmt werden kann. Die Streuung an Hydrometeoren kann allerdings nicht vollständig durch Rayleigh-Streuung erklärt werden. Für die Berechnung der Streuungsmatrix rotationssymmetrischer Partikel kann stattdessen ein numerisches Verfahren, die *T-Matrix-Methode*, eingesetzt werden [Zha17, Kap. 3.5.3].

Mit diesen Aussagen darüber, wie elektromagnetische Wellen an einem einzelnen Tropfen gestreut werden, können Schlüsse über die Streuung an einer Menge an Regentropfen gezogen und daraus die Werte für Radarvariablen abgeleitet werden (siehe Abschnitt 3.3).

### 2.1.5 Tropfengrößenverteilung

Die Tropfengrößenverteilung (*drop size distribution, DSD*) gibt die Anzahl  $N(D)$  der Regentropfen mit Durchmesser  $D$  in einem Einheitsvolumen an. Gemessen werden kann sie mit einem *Disdrometer*, das mit Kameras die fallenden Tropfen in einem kleinen Bereich mit ihrer Größe, Form und Geschwindigkeit aufnimmt. In der Anwendung werden DSDs meist mithilfe analytischer Funktionen dargestellt [Zha17, Kap. 2.1.1.1]. Eine konventionelle Methode ist das exponentielle Modell [Mei05]:

$$N(D) = N_0 \exp(-\Lambda D), \tag{20}$$

wobei über  $N_0$  der Ordinatenabschnitt und über  $\Lambda$  die Steigung angepasst wird. Neuere Methoden, die eine bessere Übereinstimmung mit Messungen aufweisen, beruhen auf dem Ulbrich-Modell einer Gamma-Verteilung mit drei freien Parametern,

$$N(D) = N_0 D^\mu \exp(-\Lambda D), \tag{21}$$

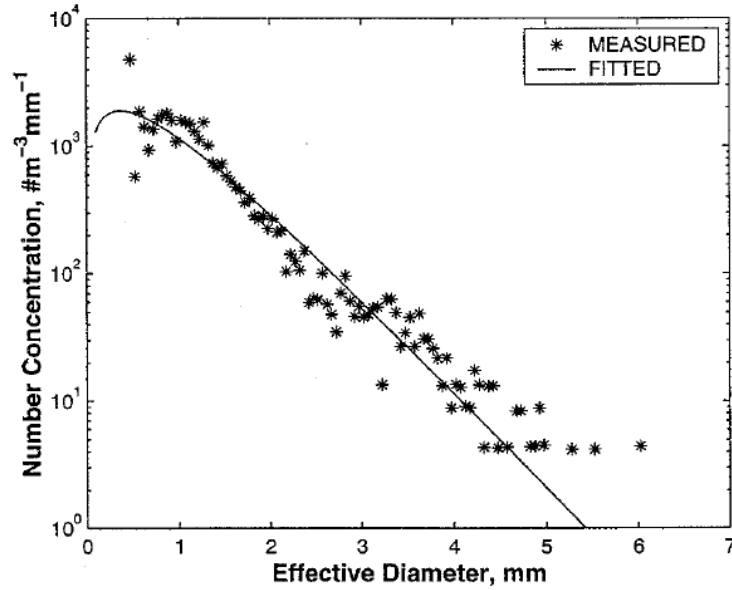


Abbildung 9: Beispielmessung einer DSD mit gefitteter Gamma-Verteilung. Aufgetragen ist die Anzahl der Tropfen im Einheitsvolumen [ $\#\text{mm}^{-3}\text{mm}^{-1}$ ] gegen Durchmesser  $D$  [mm]. Die Sterne kennzeichnen die Disdrometer-Messungen, die durchgezogene Linie die angepasste Gamma-Verteilung. Grafik aus [ZVB01, Abb. 2]

wobei  $N_0$  der Konzentrations-,  $\mu$  der Form- und  $\Lambda$  der Steigungsparameter ist [Ulbr83]. In Abb. 9] sind beispielhaft Messdaten für eine Tropfengrößenverteilung und eine daran angepasste Gamma-Verteilung dargestellt.

Testud et al. [Tes+01] führten das Konzept der normalisierten Tropfengrößenverteilung (*normalized-gamma distribution, NGD*) ein:

$$N(D) = N_w f(\mu) \left(\frac{D}{D_0}\right)^\mu \exp(-\Lambda D), \quad (22)$$

mit  $\Lambda = \frac{3.67+\mu}{D_0}$  und  $f(\mu) = \frac{6}{(3.67)^4} \frac{(3.67+\mu)^{\mu+4}}{\Gamma(\mu+4)}$ , wobei  $D_0$  der Median der Tropfendurchmesser ist. Der Vorteil der Normalisierung ist, dass der Konzentrationsparameter  $N_w$  im Gegensatz zu  $N_0$  die konventionelle physikalische Einheit  $\text{mm}^{-1}\text{m}^{-3}$  hat. Dadurch wird der Vergleich von DSDs mit verschiedenen Wassergehalten möglich.

Ein weiteres Modell, welches *constrained-gamma distribution* (CGD) genannt wird, ist eine Anpassung des Ulbrich-Modells, bei dem eine empirisch ausgewertete Abhängigkeit zwischen den Parametern  $\Lambda$  und  $\mu$  ausgenutzt wird. Sie geht auf [ZVB01] zurück; in [Cao+08] ist eine Weiterentwicklung folgender Form zu finden:

$$\mu = -0.0201\Lambda^2 + 0.902\Lambda - 1.718. \quad (23)$$

In [CZ09] wurde gezeigt, dass der Informationsgehalt bei der Verwendung der CG-DSD (23) äquivalent ist zu dem der NG-DSD (22). Beide Zusammenhänge werden in Variationsmethoden aus der Literatur genutzt. In dieser Arbeit wird unter anderem auch untersucht, ob eine der beiden Darstellungen der DSD einen Vorteil bei der Verwendung im Vorwärtsmodell zeigt.

## 2.2 Mathematische Grundlagen

Die Grundlage für die variationelle Methode zur Niederschlagsschätzung bildet die Theorie der optimalen Schätzung (*optimal estimation theory, OET*) aus der Atmosphärenwissenschaft. Dieses Verfahren entspricht aus statistischer Sicht einer Maximum-a-posteriori-Schätzung. Die OET wird hier in die mathematische Theorie der Variationsrechnung eingeordnet. Anschließend wird das L-BFGS-Optimierungsverfahren und das in dieser Arbeit verwendete Prinzip der Schrittweitsuche beschrieben.

### 2.2.1 Theorie der optimalen Schätzung

Die Theorie der optimalen Schätzung (OET) beschreibt statistische Verfahren zum Lösen von inversen Problemen, geht auf ein Buch von Rodgers aus dem Jahr 2000 [Rod00] zurück und wird vor allem in den Atmosphärenwissenschaften eingesetzt.

Die grundlegende Problemstellung ist, dass der Zustand der Atmosphäre über Parameter beschrieben werden soll, die nicht direkt gemessen werden können. Es ergibt sich ein inverses Problem, bei dem aus Messungen auf diese internen Parameter geschlossen werden soll. Die unbekannt Parameter werden in einem sogenannten *Zustandsvektor* gesammelt und aus ihnen werden über ein *Vorwärtsmodell* die physikalischen Messgrößen modelliert.

Es gibt einige Unsicherheiten bei dieser Herangehensweise, die von der OET-Methode berücksichtigt werden: Zum einen enthalten die Messungen Messfehler, zum anderen kann das Vorwärtsmodell physikalische Prozesse nur annähernd modellieren. Bei der Beschreibung der Atmosphäre sind vor allem kontinuierliche Größen von Relevanz, in der OET werden diese allerdings über den Zustandsvektor nur diskretisiert abgebildet. Daher finden alle Berechnungen in endlichdimensionalen Vektorräumen und nicht in Funktionenräumen statt. Die Auflösung der Diskretisierung muss so gewählt werden, dass die kontinuierlichen Funktionen mit gewünschter Genauigkeit approximiert werden.

#### **Bemerkung 1** (*Inverses Problem [Rod00, Kap. 2.1]*)

Seien  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  und  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Abbildung. Ein Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  heißt *Lösung des inversen Problems*  $(H, \mathbf{y})$  mit Messfehler  $\epsilon$ , wenn

$$\mathbf{y} = H(\mathbf{x}) + \epsilon. \tag{24}$$

In dem Fall nennen wir  $\mathbf{x}$  *Zustandsvektor* und  $\mathbf{y}$  *Beobachtungsvektor*. Die Komponenten  $x_1, \dots, x_n$  des Zustandsvektors sind die internen Parameter, die Komponenten  $y_1, \dots, y_m$  des Beobachtungsvektors die Messungen. Die Abbildung  $H$  heißt *Vorwärtsmodell*.

Für die Lösung des Problems wird der Satz von Bayes in seiner Form für kontinuierliche Zufallsvariablen angewandt. Dafür definieren wir zunächst die *bedingte Dichte*:

**Definition 1 (Bedingte Dichte [Koc07, (2.97)])**

Seien  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Die Abbildungen  $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  und  $f_Y : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty)$  bezeichnen die Dichtefunktionen von  $X$  und  $Y$  und  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty)$  die gemeinsame Dichte. Die Abbildung  $f_{Y|X} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  mit

$$f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{f_X(\mathbf{x})}, & \text{falls } f_X(\mathbf{x}) \neq 0 \\ f_Y(\mathbf{y}), & \text{falls } f_X(\mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

heißt *bedingte Dichte von Y gegeben X*.

Mithilfe der Definition der bedingten Dichte lässt sich die für kontinuierliche Zufallsvariablen generalisierte Variante des Satzes von Bayes formulieren:

**Satz 1 (Satz von Bayes [Koc07, (2.121)])**

Seien  $X, Y, f_X$  und  $f_Y$  wie in Definition 1. Dann gilt für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$  mit  $f_Y(\mathbf{y}) > 0$

$$f_{X|Y}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x})f_X(\mathbf{x})}{f_Y(\mathbf{y})}. \quad (26)$$

Der Term  $f_{X|Y}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  wird *a-posteriori-Dichte* genannt.

Der Beobachtungsvektor  $\mathbf{y}$  kann als Realisierung einer Zufallsvariablen  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  betrachtet und seine Unsicherheit mittels der Dichtefunktion  $f_{Y|X}$  beschrieben werden. Die Annahme eines normalverteilten Fehlers ist häufig eine gute Approximation des tatsächlichen Fehlers und ist günstig für algebraische Umformungen [Rod00, Kap. 2.3.1]:

$$f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 \det(\mathbf{R})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))^\top \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))\right). \quad (27)$$

Für eine günstigere Formulierung des Problems wird die Dichtefunktion logarithmiert betrachtet:

$$\ln f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))^\top \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x})) + c_1. \quad (28)$$

Dabei bezeichnet  $c_1$  eine von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  unabhängige Konstante und  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  die Kovarianzmatrix mit

$$\mathbf{R}_{i,j} = \mathbf{E}[(Y_i - \bar{Y}_i)(Y_j - \bar{Y}_j)]. \quad (29)$$

Wenn die einzelnen Komponenten von  $Y$  unkorreliert sind, ist  $\mathbf{R}$  eine Diagonalmatrix.

Gibt es Vorwissen über den Zustand der Atmosphäre, kann dieses ebenfalls in das inverse Problem integriert werden. Im Folgenden wird angenommen, dass die Abweichung zwischen wahren Zustand  $\mathbf{x}$  und Vorwissen normalverteilt ist, sodass man die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\ln f_X(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^\top \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) + c_2 \quad (30)$$

erhält, wobei  $\mathbf{x}^b \in \mathbb{R}^n$  die a-priori-Annahme für den Zustand ist und  $\mathbf{B}$  die dazugehörige Kovarianzmatrix. Durch Einsetzen der Gleichungen (28) und (30) in den Satz von Bayes (26) ergibt sich

$$\ln f_{X|Y}(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}((\mathbf{y}-H(\mathbf{x}))^\top \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y}-H(\mathbf{x})) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}^b)^\top \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^b)) / f_Y(\mathbf{y}) + c_3. \quad (31)$$

Die Größe  $f_{X|Y}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass die Messungen  $\mathbf{y}$  den Zustand  $\mathbf{x}$  widerspiegeln. Es wird derjenige Zustand  $\hat{\mathbf{x}}$  gesucht, für den die rechte Seite von (31) maximal wird. Dies wird auch *Maximum-a-posteriori-Schätzung* genannt:

**Definition 2 (*Maximum-a-posteriori-Schätzung [Koc07, (3.30)]*)**

Seien  $X, Y, f_X$  und  $f_Y$  wie in Definition 1. Im Fall einer Beobachtung  $Y = \mathbf{y}$  wird eine Realisierung  $\hat{\mathbf{x}}$  von  $X$  *Maximum-a-posteriori-Schätzer* (MAP-Schätzer) genannt, wenn sie die a-posteriori-Dichte maximiert:

$$\hat{\mathbf{x}} \in \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x})f_X(\mathbf{x})}{f_Y(\mathbf{y})} = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_{Y|X}(\mathbf{y}|\mathbf{x})f_X(\mathbf{x}). \quad (32)$$

Aus Gleichung (31) ergibt sich also folgender MAP-Schätzer für den Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  unter den Beobachtungen  $\mathbf{y}$  und mit dem Vorwissen  $\mathbf{x}^b$ :

$$\hat{\mathbf{x}} \in \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))^\top \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x})) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^\top \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b). \quad (33)$$

Unter der Annahme, dass  $H$  stetig differenzierbar ist, ist eine notwendige Bedingung für die Minimiereigenschaft das Verschwinden des Gradienten der Zielfunktion:

$$0 = -(\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}))^\top \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - H(\mathbf{x})) + \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b). \quad (34)$$

Für ein lineares Vorwärtsmodell  $H(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  kann dieses Problem explizit gelöst werden, für nicht-lineare Vorwärtsmodelle muss auf iterative Verfahren zurückgegriffen werden.

### 2.2.2 Variationsrechnung

In der Literatur im Bereich Radarmeteorologie werden Verfahren, die auf der OET beruhen, häufig auch Variationsmethoden genannt, unter anderem in [Hog07], [Zha17, Kap. 7.3] und [Hua+18]. Aus mathematischer Sicht handelt es sich dabei allerdings nicht im engeren Sinne um Methoden der Variationsrechnung, weshalb hier beruhend auf [GH04] und [BL11] die Zusammenhänge erklärt werden.

In der Variationsrechnung werden Funktionale, also Abbildungen, die andere Funktionen auf reelle Skalare abbilden, untersucht. Eine typische Problemstellung ist die Suche nach Funktionen, für die das Funktional den minimalen bzw. maximalen Wert annimmt. Häufig haben die betrachteten Funktionale Integralform. Deshalb definieren wir:



**Definition 3 (Variationsproblem [GH04, Kap. 2.1])**

Sei  $S \subset \mathbb{R}^p$  eine offene Menge und  $U$  ein Raum von Funktionen  $u : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $\nabla u$  im schwachen oder starken Sinne existiert. Außerdem sei  $I : U \rightarrow \mathbb{R}$  das Funktional

$$I(u) = \int_S \Psi(x, u(x), \nabla u(x)) dx, \quad (35)$$

wobei  $\Psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times p} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reellwertige Funktion ist, so dass das obige Integral für alle Funktionen in  $U$  existiert. Das zugehörige *Variationsproblem* ist die Untersuchung von  $I$  auf die Existenz und Eigenschaften (wie etwa Eindeutigkeit) von Minimierern und stationären Punkten, oder kurz

$$\inf_{u \in U} I(u). \quad (36)$$

Variationsmethoden können für die Lösung von inversen Problemen der Art  $v = H(u)$  angewendet werden. Häufig kann ein solcher Ansatz als

$$\inf_{u \in U} D_v(u) + \lambda R(u) \quad (37)$$

mit  $D_v = D(v - H(\cdot))$  dargestellt werden [BL11, Kap. 5.1]. Dabei sind  $u \in U$  und  $v \in V$  Funktionen in den Funktionenräumen  $U$  bzw.  $V$ ,  $H : U \rightarrow V$  ein Vorwärtsmodell (analog zum endlichdimensionalen Fall in Bemerkung 1) und  $D : V \rightarrow \mathbb{R}$  ein Distanzmaß. Der *Diskrepanz-* oder auch *Datenterm*  $D_v : U \rightarrow \mathbb{R}$  quantifiziert, wie nah ein  $u$  an der Lösung des inversen Problems liegt. Das Funktional  $R : U \rightarrow \mathbb{R}$  bewertet, wie gut die Funktion  $u$  bestimmte geforderte Eigenschaften erfüllt, etwa wie glatt sie ist, und heißt *Regularisierer*. Der Regularisierer enthält in der Bildverarbeitung im einfachsten Fall ein Integral über den Gradienten  $\nabla u$ :

$$R(u) = \int_D \|\nabla u(x)\|_2^2 dx. \quad (38)$$

Wie im vorherigen Abschnitt bereits erwähnt, spielen in der Atmosphärenwissenschaft häufig kontinuierliche Größen eine Rolle. Eine interessierende skalare Zustandsgröße kann folgendermaßen als Funktion über den euklidischen Raum definiert werden:  $u \in U : S \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $S \subseteq \mathbb{R}^2$  oder  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , wobei  $S$  eine offene Menge und  $U$  ein geeigneter Funktionenraum sei. Sei außerdem  $v : T \rightarrow \mathbb{R}$  aus einem Funktionenraum  $V$  eine theoretische Messung auf der Menge  $T \subseteq \mathbb{R}^2$  oder  $T \subseteq \mathbb{R}^3$ . In der Variationsrechnung kann das inverse Problem äquivalent zu (24) mit dem Schätzer aus (33) unter Annahme eines normalverteilten Messfehlers formal beschrieben werden als

$$\inf_{u \in U} \int_T \int_T [v(x) - H(u)(x)] K_o(x, y) [v(y) - H(u)(y)] dx dy, \quad (39)$$

wobei  $K_o(x, y)$  die Kovarianz der theoretischen Messung für die Punkte  $x$  und  $y$  mittels der Funktion  $K_o : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  angibt.

Das Zielfunktional in Gleichung (39) besteht nur aus einem Datenterm  $D_v(u)$ . A-priori-Wissen kann über folgenden Regularisierer in das Modell integriert werden, wobei  $K_b(x, y)$  die Korrelation der Punkte  $x$  und  $y$  angibt:

$$R(u) = \int_S \int_S [u^b(x) - u(x)] K_b(x, y) [u^b(y) - u(y)] dx dy. \quad (40)$$

Es sind auch andere Regularisierer denkbar, beispielsweise um Rauschen in den Schätzungen des Vorwärtsmodells zu unterdrücken:

$$R(u) = \int_T \|\nabla[H(u)](x)\|_2^2 dx. \quad (41)$$

Da eine kontinuierliche Messung  $v$  physikalisch unmöglich ist und um eine numerische Lösung für das Variationsproblem zu finden, muss das Problem diskretisiert werden. Anschließend kann es mit numerischen Methoden gelöst werden. Eine Möglichkeit für die Diskretisierung ist, die Funktion  $u$  auf einer diskreten Menge  $G_s = \{x_1, \dots, x_n\}$  auszuwerten und die Werte in einem Vektor zusammenzufassen:  $\mathbf{u} = (u(x_1), \dots, u(x_n))^T \in \mathbb{R}^n$ . Ebenso wird die Funktion  $v$  auf einer diskreten Menge  $G_o = \{y_1, \dots, y_m\}$  ausgewertet und als diskreter Vektor repräsentiert:  $\mathbf{v} = (v(y_1), \dots, v(y_m))^T \in \mathbb{R}^m$ . Falls die diskrete Menge  $G_s$  nicht mit  $G_o$  übereinstimmt, auf der die Messung  $v$  definiert ist, muss das Vorwärtsmodell  $H$  eine Transformation von  $G_s$  nach  $G_o$ , etwa durch Interpolation, enthalten, um den Vergleich im Datenterm zu ermöglichen. Wenn auch das Vorwissen  $u^b$  sowie  $K_o$  und  $K_b$  so diskretisiert werden, erhält man das OET-Problem aus Gleichung (33).

### 2.2.3 Optimierungsmethoden

Bei Rodgers [Rod00] wird beschrieben, wie das Problem aus Gleichung (34) für nicht-lineare Vorwärtsmodelle über das Gauss-Newton-Verfahren iterativ gelöst werden kann. Im Gegensatz zum Newton-Verfahren wird hierbei die Hesse-Matrix nur approximiert. In dieser Arbeit wird stattdessen mit dem L-BFGS-Verfahren ein anderes Quasi-Newton-Verfahren verwendet, das im Folgenden beschrieben wird. Die Informationen sind aus dem Buch von Nocedal und Wright [NW06] zusammengefasst.

#### L-BFGS-Verfahren

Das BFGS-Verfahrens ist ein Quasi-Newton- und damit auch ein Liniensuchverfahren, dass auf Broyden [Bro70], Fletcher [Fle70], Goldfarb [Gol70] und Shanno [Sha70] zurückgeht. Diese Optimierungsmethode und ihre Anpassung für große Probleme (L-BFGS) ist bei [NW06, Kap. 6.1, 7.2] beschrieben.

Für eine Zielfunktion  $f$  lautet ein Iterationsschritt bei diesem Verfahren

$$x_{i+1} = x_i - \alpha_i B_i^{-1} \nabla f_i, \quad (42)$$

wobei  $\nabla f_i$  der Gradient ausgewertet an der Stelle  $x_i$  ist. Die Matrix  $B_i$  ist eine symmetrisch positiv definite Matrix, die eine Approximation der Hesse-Matrix darstellt und

in jedem Iterationsschritt angepasst wird. Die Schrittweite  $\alpha_i$  sollte so gewählt werden, dass die Wolfe-Bedingungen, die im nächsten Abschnitt diskutiert werden, erfüllt sind. Es werden die Vektoren  $s_i = x_{i+1} - x_i$  und  $y_i = \nabla f_{i+1} - \nabla f_i$  definiert. Die Matrix  $H_i = B_i^{-1}$  soll nun so angepasst werden, dass sie als Approximation der inversen Hesse-Matrix die Änderung des Gradienten in einer Iteration erklärt, weshalb die Sekantenbedingung

$$H_{i+1}y_i = s_i \tag{43}$$

aufgestellt wird. Außerdem soll die Krümmungsbedingung

$$s_i^\top y_k > 0 \tag{44}$$

erfüllt sein. Wenn die Schrittweitenbestimmung das Einhalten der Wolfe-Bedingungen garantiert, ist (44) immer gegeben und es existiert ein  $H_{i+1}$ , das die Sekantenbedingung erfüllt. Wird außerdem gefordert, dass  $H_{i+1}$  möglichst nah an  $H_i$  liegt, ergibt sich folgendes Update für die Approximation der inversen Hesse-Matrix:

**Satz 2 (BFGS-Update [NW06, (6.16), (6.17)])**

Sei  $H_i$  eine symmetrische positiv definite Matrix in einem iterativen Verfahren mit der Vorschrift  $x_{i+1} = x_i - \alpha_i H_i \nabla f_i$ . Dann ist

$$H_{i+1} = (I - \rho_i s_i y_i^\top) H_i (I - \rho_i y_i s_i^\top) + \rho_i s_i s_i^\top \tag{45}$$

mit  $s_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $y_i = \nabla f_{i+1} - \nabla f_i$  und  $\rho_i = \frac{1}{y_i^\top s_i}$  die eindeutige Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \min_H & \|H - H_i\| \\ \text{s.t. } & H = H^\top, \quad H y_i = s_i. \end{aligned} \tag{46}$$

Für große Probleme, bei denen die vollständige Berechnung oder Speicherung der Matrix  $H_i$  nicht möglich ist, gibt es eine Anpassung des Verfahrens, das sogenannte *limited-memory-BFGS*- oder auch *L-BFGS*-Verfahren. Dabei werden anstatt der  $n \times n$ -Matrix mehrere Vektoren gespeichert, die die Approximation implizit enthalten, sodass das Produkt  $H_i \nabla f_i$  ohne explizites Wissen von  $H_i$  berechnet werden kann. Der rekursive Algorithmus für die Bestimmung des Produkts sieht für den  $i$ -ten Iterationsschritt folgendermaßen aus:

**Algorithmus 1** (*L-BFGS-Schleife* [NW06, Algo. 7.4])

```

 $q \leftarrow \nabla f_i$ 
for  $k = i - 1, i - 1, \dots, i - m$  do
     $\alpha_k \leftarrow \rho_k s_k^\top q$ 
     $q \leftarrow q - \alpha_k y_k$ 
end for
 $r \leftarrow H_i^0 q$ 
for  $k = i - m, i - m + 1, \dots, i - 1$  do
     $\beta \leftarrow \rho_k y_k^\top r$ 
     $r \leftarrow r + s_k(\alpha_k - \beta)$ 
end for
return  $H_i \nabla f_i = r$ 

```

Gibt es ein gewisses Vorwissen über die Hesse-Matrix der Zielfunktion, kann dieses für die Initialisierung  $H_i^0$  in jedem Iterationsschritt genutzt werden. Ist dies nicht der Fall, kann die in [NW06, (7.20)] aufgeführte Heuristik

$$H_i^0 = \frac{s_{i-1}^\top y_{i-1}}{y_{i-1}^\top y_{i-1}} I, \quad (47)$$

für die Initialisierung  $H_i^0$  verwendet werden. Diese Initialisierung stellt sicher, dass die resultierende Suchrichtung  $d$  sinnvoll skaliert ist, sodass in den meisten Fällen eine Schrittweite von etwa 1 angewendet werden kann.

**Schrittweitenbestimmung**

Ist bei einem Liniensuchverfahren die Suchrichtung  $d$  ermittelt worden, bleibt noch die Frage, wie groß die Schrittweite  $\alpha$  gewählt werden soll. Wenn die exakte Berechnung der optimalen Schrittweite nicht möglich oder zu aufwändig ist, können sogenannte inexakte Verfahren eingesetzt werden, die iterativ Schrittweiten ausprobieren und stoppen, wenn bestimmte Bedingungen erfüllt sind [NW06, Kap. 3.1].

Weit verbreitet ist die Nutzung der Armijo-Bedingung, die eine genügende Verringerung des Wertes der Zielfunktion verlangt:

$$f(x_i + \alpha d_i) \leq f(x_i) + c_1 \alpha \nabla f_i^\top d_i \quad (48)$$

Dabei ist  $c_1$  eine Konstante im Bereich  $(0, 1)$ . Diese Bedingung alleine kann allerdings nicht sicherstellen, dass der Algorithmus sich ausreichend schnell dem Optimum nähert. Wird zusätzlich die Krümmungsbedingung

$$\nabla f(x_i + \alpha_i d_i)^\top d_i \geq c_2 \nabla f_i^\top d_i \quad (49)$$

mit  $0 < c_1 < c_2 < 1$  eingeführt, wird von den sogenannten Wolfe-Bedingungen gesprochen. Die Krümmungsbedingung verhindert zu kleine Schrittweiten. Sie kann so modifiziert werden, dass die Schrittweite  $\alpha_i$  in der Nähe der optimalen Schrittweite liegt, indem

$$|\nabla f(x_i + \alpha_i d_i)^\top d_i| \geq c_2 |\nabla f_i^\top d_i| \quad (50)$$

gefordert wird. Wird diese Bedingung zusammen mit der Armijo-Bedingung verwendet, wird von den starken Wolfe-Bedingungen gesprochen [NW06, Kap. 3.1]:

**Definition 4 (*Starke Wolfe-Bedingungen*)**

Bei einem Optimierungsproblem mit Zielfunktion  $f$  und der iterativen Vorschrift  $x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$ , wobei  $\alpha_i$  die Schrittweite und  $d_i$  die Suchrichtung ist, werden folgende Bedingungen an  $\alpha_i$  die *starken Wolfe-Bedingungen* genannt:

$$\begin{aligned} \text{Armijo - Bedingung : } & f(x_i + \alpha d_i) \leq f(x_i) + c_1 \alpha \nabla f_i^\top d_i \\ \text{Krümmungsbedingung : } & |\nabla f(x_i + \alpha_i d_i)^\top d_i| \geq c_2 |\nabla f_i^\top d_i| \end{aligned} \quad (51)$$

Die Suche nach einer validen Schrittweite wird in zwei Stufen durchgeführt: In der ersten Phase (*bracketing phase*) wird ein Intervall bestimmt, das annehmbare Schrittweiten enthält. Anschließend wird in der *selection phase* die finale Schrittweite durch Verkleinerung des Intervalls und Nutzung von Informationen aus dem vorherigen Iterationsschritt errechnet. Details zu diesem Vorgehen sind bei [NW06, Kap. 3.5] zu finden.



---

## Kapitel 3: OET-Variationsmethode zur Niederschlags-schätzung

Der OET-Ansatz kann auf polarimetrische Radardaten angewendet werden, um Parameter zur Beschreibung von Niederschlag abzuleiten. Als Beobachtungen dienen dabei Messungen von polarimetrischen Radarvariablen. Verschiedene Methoden aus der Literatur werden in diesem Kapitel vorgestellt und verglichen. Die Ansätze aus [Hog07] und [CZX13] werden ausführlich beschrieben, da sie für diese Arbeit implementiert und zur QPE auf Radardaten angewandt werden.

### 3.1 Literaturübersicht

Ein Variationsansatz zur quantitativen Niederschlagsschätzung wurde zum ersten Mal in [Fur05] und [Hog07] angewandt. Der Ansatz geht auf die *Optimal Estimation Theory* (OET) aus [Rod00] zurück, welche schon vorher als variationelle Methode in den Geowissenschaften, etwa bei der Auswertung von Satellitenbildern oder der Datenassimilation, Anwendung fand. Zuvor wurden zur Niederschlagsmengenschätzung meist empirisch begründete Regenratenschätzer verwendet (siehe Abschnitt 2.1.3).

Die variationelle Methode verspricht eine Integration verschiedener Messgrößen mit gleichzeitiger Berücksichtigung von Unsicherheiten und Dämpfungseffekten. Auch in [Zha+19] wird die Bedeutung von vereinheitlichenden statistischen Ansätzen für die Verknüpfung von polarimetrischen Radardaten und Zustandsparametern physikalischer Modelle zur Atmosphärenbeschreibung betont, die auch eine Integration in Modelle zur numerischen Wettervorhersage (*numerical weather prediction, NWP*) ermöglichen.

In der Literatur finden sich verschiedene variationelle Methoden zur Extraktion von Niederschlagsparametern aus polarimetrischen Radarbilder. Nicht alle dieser Methoden werden explizit zur QPE angewandt, können aber dementsprechend angepasst werden. Im Folgenden werden die relevanten Arbeiten anhand der wichtigsten Aspekte kurz vorgestellt und verglichen.

- Explizit zur QPE wird der Variationsansatz in [Hog07], [Cha+16] und [Hua+18] genutzt. Die Ansätze [CZX13; YCU14; Mah+19] zielen in erster Linie auf die Bestimmung der DSD-Parameter bzw. damit verwandter physikalischer Parameter ab. Da aus diesen Parametern die Regenrate  $R$  berechnet werden kann, können sie als QPE-Methode angepasst werden.
- Die Methoden unterscheiden sich darin, ob sie direkt auf das 2D-Radarbild [CZX13], auf jeden Radarstrahl [Hog07; Cha+16; Hua+18; Mah+19] oder sogar für jedes Gate einzeln [YCU14] angewandt werden. Für die Anwendung auf das gesamte Bild wird entsprechend Speicherplatz benötigt, dafür ist die Verarbeitung effizienter als iterative Verfahren über einzelne Radarstrahlen und Glättungsstrategien können direkt in das Modell integriert werden.
- Als Zustandsparameter werden entweder die Regenrate  $R$  [Hua+18], der Parameter

$a$  der  $Z$ - $R$ -Beziehung [Hog07; Cha+16], DSD-Parameter [CZX13; YCU14] oder physikalische Parameter der Atmosphäre [Mah+19] verwendet. Letztere beiden ermöglichen die direkte Integration der Ergebnisse in NWP-Modelle.

- Als Beobachtungen werden unterschiedliche Kombinationen der Radarvariablen  $Z_H$ ,  $Z_{dr}$ ,  $K_{dp}$  und  $\Phi_{dp}$  genutzt. Der Informationsgewinn durch zusätzliche Nutzung von  $Z_{dr}$  und  $K_{dp}$  im Gegensatz zur alleinigen Nutzung von  $Z_H$  ist in Abschnitt 2.1.3 beschrieben. Die Berechnung von  $K_{dp}$  ist fehleranfällig, weshalb die direkte Verwendung von  $\Phi_{dp}$  von Vorteil ist.
- Bei den meisten Methoden ist eine Dämpfungskorrektur im Vorwärtsmodell integriert, allerdings wurden sie teilweise nur bei S-Band-Radardaten getestet, bei denen Dämpfungseffekte recht gering sind [Hog07; Mah+19]. In [Hua+18] wird nur  $K_{dp}$  verwendet, sodass keine Dämpfungskorrektur möglich ist.
- Die Methoden unterscheiden sich darin, ob der Zustandsvektor auf dem Radargitter [CZX13; YCU14; Mah+19] oder auf einem größeren Gitter definiert ist und durch die Nutzung von Basisfunktionen upgesamlet wird [Hog07; Hua+18]. Die Verwendung durch Basisfunktionen ist nur sinnvoll, wenn davon ausgegangen werden kann, dass die räumliche Variabilität der Zustandsparameter geringer als die der Beobachtungen ist, beispielsweise bei dem Parameter  $a$ . Ob dies bei der Regenrate angenommen werden kann, wie in [Hua+18] vorausgesetzt, ist fraglich.
- Eine Glättung in Azimutrichtung findet entweder gar nicht [Mah+19], über die Verwendung eines iterativen Verfahrens, das einem Kalman-Filter gleicht [Hog07], oder über eine Regularisierung über das 2D-Bild [CZX13] statt. Bei [Mah+19] wurde festgestellt, dass es Diskontinuitäten in Azimutrichtung gibt.
- Es werden unterschiedliche Schätzungen für die Fehlerkovarianzmatrix der Beobachtungen verwendet: Bei [Hog07; Mah+19] werden feste Werte für die Varianzen der Radarvariablen angenommen. Bei einer Anwendung der [Hog07]-Methode in [Fig+10] werden die Varianzen aus  $\rho_{hv}$  berechnet. In [Cha+16] wird ein Verfahren zur adaptiven Bestimmung der Kovarianzmatrix beschrieben.

Für diese Arbeit wird die Methode von [Hog07] mit Erweiterungen implementiert, da sie die Verwendung einer Variationsmethode zur QPE eingeführt hat. Außerdem steht hierfür der Quellcode [Hog09] zum Vergleich der Ergebnisse zur Verfügung.

Als zweite Methode wird die Methode nach [CZX13] mit Anpassungen umgesetzt, da die Verwendung von DSD-Parametern im Zustandsvektor eine direktere Modellierung möglich macht. Der Parameter  $a$  aus [Hog07] enthält selbst keine direkte Information über den Niederschlag, nur in Kombination mit einer  $Z_H$ -Messung kann er zur Bestimmung der Regenrate verwendet werden. Im Gegensatz dazu beschreiben die Parameter  $N_0$  und  $\Lambda$  tatsächliche Eigenschaften des Regenfeldes.

Die Methode aus [Mah+19] ist sehr interessant, wenn es zusätzlich zur Bestimmung der Regenrate darum geht, die Ergebnisse für die internen Parameter in NWP-Modellen



zu integrieren. Da in dieser Arbeit das Hauptaugenmerk auf der QPE liegt, wird sie nicht weiterverfolgt.

### Evaluation

In [Hog07] wird die Funktionsweise des Verfahrens an Beispielfällen demonstriert, die zeigen, dass die Struktur der Messungen generell gut nachgebildet werden kann. Es wird darauf hingewiesen, dass die Performance stark von der Datenqualität abhängt. In [Hua+18] wurde die [Hog07]-Methode auf S-Band-Daten angewandt und anhand von RS-Daten evaluiert. Bei leichtem Regen konnten die Niederschlagsmengen gut angenähert werden, bei stärkeren Regenfällen kam es zu größeren Abweichungen. In [Fig+10] wurde das Verfahren für C-Band-Radardaten anhand von RS-Messungen mit anderen Methoden verglichen. Im Vergleich weist der Variationsansatz eine schlechtere Übereinstimmung mit den RS-Daten auf, vor allem in Gebieten höherer Intensität, weshalb die Verfeinerung der Integration von Dämpfungseffekten und Messfehlern empfohlen wird.

Der Ansatz aus [CZX13] wurde bisher nicht zur QPE eingesetzt. In der Veröffentlichung wird das Verfahren daran evaluiert, wie gut es die gemessenen Radarvariablen modellieren kann. Das Fazit ist, dass das Verfahren großes Potential zur Bestimmung der DSD-Parameter hat, die Ergebnisse aber von der Datenqualität abhängen.

## 3.2 Variationsansatz

Im Folgenden wird zunächst formal ein Variationsansatz zur Regenratenbestimmung beschrieben, um anschließend auszuführen, wie dieser Ansatz in [Hog07] und [CZX13] umgesetzt wurde. Es sei darauf hingewiesen, dass in [CZX13] nicht explizit die Regenrate bestimmt wird, das Verfahren sich aber dahingehend erweitern lässt.

Formal formuliert sieht der Variationsansatz zur QPE folgendermaßen aus: Der Zustandsvektor  $\mathbf{x} \in X$  besteht aus den internen Parametern für die einzelnen Punkte des Radargitters  $G_x$  mit  $n = \#G_x$  Gitterpunkten. Mit  $X = \mathbb{R}^{p \cdot n}$  wird der Zustandsraum bezeichnet, wobei  $p$  die Anzahl der verschiedenen Zustandsparameter angibt. Der Beobachtungsvektor  $\mathbf{y} \in Y$  enthält die Messwerte für die verschiedenen Radarvariablen (siehe Abschnitt 2.1.2) auf dem Radargitter  $G_y$  mit  $m = \#G_y$  Gitterpunkten. Hier bezeichnet  $Y = \mathbb{R}^{q \cdot m}$  den Beobachtungsraum und  $q$  die Anzahl der gemessenen Radarvariablen. Das Vorwärtsmodell  $H : X \rightarrow Y$  gibt eine Schätzung für die Radarvariablen auf Grundlage des Zustandsvektors ab.

Für die Radargitter gilt  $G_x, G_y \subset \mathbb{R}$  bzw.  $G_x, G_y \subset \mathbb{R}^2$ , abhängig davon, ob jeder Radarstrahl einzeln oder das gesamte Radarbild behandelt wird. Falls  $G_x$  und  $G_y$  nicht übereinstimmen, muss das Vorwärtsmodell auch eine Transformation vom Zustands- auf das Beobachtungsgitter enthalten.

Die Schätzungen des Modells werden mit den Messdaten  $\mathbf{y}$  verglichen, es ergibt sich folgender Datenterm  $D(\mathbf{y}; \cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$D(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = (\mathbf{y} - H(\mathbf{x}))^\top \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - H(\mathbf{x})) \quad (52)$$

Die Matrix  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(q \cdot m) \times (q \cdot m)}$  ist die Kovarianzmatrix für die Messunsicherheiten der

Radarvariablen. Das Optimierungsproblem mit Regularisierer  $R$  lautet

$$\inf_{\mathbf{x} \in X} \{D(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + R(\mathbf{x})\}, \quad (53)$$

welches mit geeigneten numerischen Optimierungsmethoden gelöst wird. Regularisierungsmethoden werden in Abschnitt 3.4 diskutiert.

Aus dem resultierenden Minimierer  $\mathbf{x}^*$  kann anschließend die Regenrate  $R(\mathbf{x}^*)$  auf dem Radargitter bestimmt werden. Dafür kann der Zusammenhang zwischen DSD und Regenrate

$$R = 6\pi \times 10^{-4} \int_{D_{min}}^{D_{max}} D^3 v(D) N(D) dD \quad (54)$$

verwendet werden [Zha17, Kap. 2.1.1.1]. In Gleichung (54) wird über den Durchmesser  $D$  der Regentropfen integriert, wobei  $D_{min}$  bzw.  $D_{max}$  der kleinste bzw. größte betrachtete Durchmesser ist. Die Größe  $v(D)$  gibt die terminale Fallgeschwindigkeit eines Tropfens mit dem Durchmesser  $D$  an und wird nach [FD69] bestimmt.

Im Folgenden werden die Kernaspekte, die verwendeten Zustands- und Beobachtungsvektoren und die Berechnung der Regenrate für die Methoden nach [Hog07] und [CZX13] beschrieben. In den nachfolgenden Abschnitten werden die verwendeten Vorwärtsmodelle und Regularisierer erläutert.

### Methoden nach [Hog07]

Bei [Hog07] wird als Zustandsvektor der Parameter  $a$  der  $Z$ - $R$ -Beziehung  $Z = aR^b$  (9) verwendet, während  $b$  auf einen festen Wert gesetzt wird (die Anzahl der Zustandsparameter ist also  $p = 1$ ). Um unphysikalische negative Werte für  $a$  zu verhindern, wird  $\ln(a)$  statt  $a$  genutzt. Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  wird auf einem Gitter  $G_x$  definiert, das gröber als das Beobachtungsgitter ist (es gilt also  $n < m$ ). Dies geschieht aus Effizienzüberlegungen und beruhend auf der Annahme, dass  $a$  eine geringere räumliche Variabilität als die Messungen hat:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \ln(a_1) \\ \vdots \\ \ln(a_n) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Das Verfahren aus [Hog07] löst das Optimierungsproblem für jeden Radarstrahl separat auf äquidistanten Gittern  $G_x, G_y \subset \mathbb{R}$  in radialer Richtung.

Vor dem Anwenden des Vorwärtsmodells wird der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  mittels kubischer Splines auf dem Radargitter  $G_y$  mit  $m$  Gates interpoliert:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{M}\mathbf{x}, \quad (56)$$

wobei  $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die Gewichtsmatrix der Spline-Interpolation ist. Das Vorwärtsmodell  $H$  enthält also vor der Berechnung der Radarvariablen zunächst die Transformation auf das Radargitter der Beobachtungen durch die Multiplikation mit der Matrix  $\mathbf{M}$ .

In das Vorwärtsmodell  $H$  gehen bei diesem Verfahren neben dem Zustandsvektor auch die Messergebnisse für die Reflektivität  $Z_h$  ein. Daraus werden die differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$  und die differentielle Phase  $\Phi_{dp}$  geschätzt. Die Details des Vorwärtsmodells sind in Abschnitt 3.3 beschrieben. Im Beobachtungsvektor werden die Ergebnisse für  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$  aneinander gehängt, sodass  $q = 2$  und  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2m}$  gilt:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} (Z_{dr})_1 \\ \vdots \\ (Z_{dr})_m \\ (\Phi_{dp})_1 \\ \vdots \\ (\Phi_{dp})_m \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Nach der Optimierung wird der gefundene Kandidat für den Minimierer  $\mathbf{x}^*$  mittels kubischer Splines auf das Beobachtungsgitter transformiert ( $\hat{\mathbf{x}}^* = \mathbf{M}\mathbf{x}^*$ ), um daraus anschließend die Regenrate  $R$  mithilfe der  $Z$ - $R$ -Beziehung 10 zu berechnen:

$$R(\hat{\mathbf{x}}^*, Z_h) = \left( \frac{Z_h}{\exp(\hat{\mathbf{x}}^*)} \right)^{1/b} \quad (58)$$

In die Berechnung fließt die Reflektivität  $Z_h$  und der fest gewählte Parameter  $b$  ein.

In der Veröffentlichung wird außerdem vorgestellt, wie der variationelle Ansatz gleichzeitig auch zur Hagelerkennung eingesetzt werden kann. Darauf wird in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen, es stellt aber eine interessante Erweiterungsmöglichkeit dar.

Für die in [Hog07] beschriebene Methode ist der Quellcode unter [Hog09] öffentlich verfügbar. Dieser enthält allerdings nicht die Berechnung der Streuungsamplituden, welche Teil des Vorwärtsmodells sind. Für diese liegen nur vorberechnete Tabellen vor.

### Methodenach [CZX13]

Im Gegensatz zum Verfahren aus [Hog07] wird bei dieser Variante nicht der Parameter  $a$  der  $Z$ - $R$ -Beziehung als interner Zustandsparameter gewählt, sondern direkt die Parameter einer DSD-Funktion. Es wird dabei das *constrained-gamma-distribution*-Modell verwendet, das in Abschnitt 2.1.5 mit den Gleichung (21) und (23) eingeführt wurde:

$$N(D) = N_0 D^{-0.0201\Lambda^2 + 0.902\Lambda - 1.718} \exp(-\Lambda D). \quad (59)$$

Die beiden freien Parameter sind dort der Konzentrationsparameter  $N_0$  und der Steigungsparameter  $\Lambda$ , sodass  $p = 2$  und  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2m}$  gilt. Aus numerischen Gründen wird für die Optimierung  $N'_0 = \log_{10} N_0$  verwendet:

$$\mathbf{x}_i = (N'_0)_i \text{ für } i = 1, \dots, m \text{ und } \mathbf{x}_i = \Lambda_i \text{ für } i = m + 1, \dots, 2m \quad (60)$$

In [CZX13] wird das Variationsproblem direkt auf dem polaren äquidistanten 2D-Radargitter gelöst, auf dem auch die Messungen aufgenommen wurden. Es gilt also  $G_x = G_y \subset \mathbb{R}^2$ .

Das Vorwärtsmodell  $H$  schätzt aus diesem Zustandsvektor die Reflektivität  $Z_H$ , die differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$  und die spezifische differentielle Phase  $K_{dp}$ , sodass  $q = 3$  (siehe Abschnitt 3.3). Diese Schätzungen der Radarvariablen werden mittels des Daten-terms der Zielfunktion mit den Messwerten verglichen. Mit dem aus der Optimierung resultierenden Minimierer  $\mathbf{x}^* = (N_0^*, \Lambda^*)$  lässt sich zunächst die DSD-Funktion definieren

$$N_{N_0^*, \Lambda^*}(D) = 10^{N_0^*} D^{\mu(\Lambda^*)} \exp^{-\Lambda^* D}. \quad (61)$$

Soll die Methode zur QPE verwendet werden, kann anschließend über (54) die Regenrate  $R$  auf dem Radargitter berechnet werden.

### 3.3 Vorwärtsmodell

Grundlage für das Vorwärtsmodell der Variationsmethode bilden Vorwärtsoperatoren, die aus mikrophysikalischen Parametern die einzelnen Radarvariablen ableiten. Das Ergebnis des Vorwärtsmodells setzt sich aus den Ergebnissen eines oder mehrerer Vorwärtsoperatoren zusammen.

In die Vorwärtsoperatoren gehen die in Abschnitt 2.1.4 beschriebenen Streuungsamplituden und elektromagnetischen Eigenschaften von Wassertropfen ein. Durch Integration über den Tropfendurchmesser und Gewichtung mittels DSD können die für einzelne Tropfen gemachten Aussagen zur Streuung auf ein Ensemble von Tropfen hochgerechnet werden. Das ermöglicht die Schätzung der verschiedenen Radarvariablen. Die nachfolgend aufgeführten Gleichungen stammen aus [CYZ12]. Die folgenden Größen gehen in die Gleichungen ein:

- $\lambda$ : Wellenlänge des Radars,
- $K$ : Dielektrischer Faktor (siehe 2.1.4),
- $D$ : Durchmesser des Tropfens,
- $N(D)$ : Tropfengrößenverteilung/DSD (siehe 2.1.5),
- $D_{min}, D_{max}$ : Minimum bzw. Maximum der Tropfendurchmesser,
- $s_{hh}(\alpha, D), s_{vv}(\alpha, D)$ : Komplexe Streuungsamplitude eines Tropfens des Durchmessers  $D$  bei horizontaler bzw. vertikaler Polarisation. Für  $\alpha = 0$  handelt es sich um die Vorwärtsstreuung, bei  $\alpha = \pi$  um die Rückstreuung (siehe 2.1.4).

Die Reflektivität  $Z_{h,v}$  in horizontaler bzw. vertikaler Polarisation ergibt sich für jeden Bildpunkt als

$$Z_h = \frac{4\lambda^4}{\pi^4 |K|^2} \int_{D_{min}}^{D_{max}} |s_{hh}(\pi, D)|^2 N(D) dD, \quad [\text{mm}^6 \text{m}^{-3}], \quad (62)$$

$$Z_v = \frac{4\lambda^4}{\pi^4 |K|^2} \int_{D_{min}}^{D_{max}} |s_{vv}(\pi, D)|^2 N(D) dD, \quad [\text{mm}^6 \text{m}^{-3}]. \quad (63)$$

Daraus lässt sich durch Gleichung (6) die differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$  berechnen.

Die spezifische differentielle Phase  $K_{dp}$  ergibt sich aus Streuungsamplituden und DSD als

$$K_{dp}(r) = \frac{180\lambda}{\pi} \int_{D_{min}}^{D_{max}} \operatorname{Re}[s_{hh}(0, D) - s_{vv}(0, D)]N(D, r)dD, \quad [^\circ \text{ km}^{-1}], \quad (64)$$

wobei die Berechnung über die Länge eines Radarstrahls durchgeführt wird und  $r$  die Entfernung zum Radar angibt. Aus  $K_{dp}$  wird wiederum die differentielle Phase  $\Phi_{dp}$  als Integral über den Radarstrahl berechnet:

$$\Phi_{dp} = 2 \int_0^r K_{dp}(r')dr', \quad [^\circ]. \quad (65)$$

Zusätzlich kann für jeden Bildpunkt die *spezifische Dämpfung*  $A_h$  bzw.  $A_v$  bestimmt werden, welche angibt, um wie viel die Reflektivität in horizontaler bzw. vertikaler Polarisation durch Dämpfung abgemildert wird:

$$A_h = 8.686\lambda \int_{D_{min}}^{D_{max}} \operatorname{Im}[s_{hh}(0, D)N(D)dD, \quad [\text{dB km}^{-1}], \quad (66)$$

$$A_v = 8.686\lambda \int_{D_{min}}^{D_{max}} \operatorname{Im}[s_{vv}(0, D)N(D)dD, \quad [\text{dB km}^{-1}]. \quad (67)$$

Entsprechend ergibt sich die *spezifische differentielle Dämpfung*  $A_{dp}$  als

$$A_{dp} = A_h - A_v, \quad [\text{dB km}^{-1}]. \quad (68)$$

Die Dämpfungswerte kumulieren sich in radialer Richtung, weshalb für die Reflektivität und differentielle Reflektivität eines Radarstrahls folgendermaßen Dämpfungseffekte einberechnet werden können:

$$Z_h^{\text{att}}(r) = Z_h(r) - 2 \int_0^r A_h(r')dr', \quad (69)$$

$$Z_v^{\text{att}}(r) = Z_v(r) - 2 \int_0^r A_v(r')dr', \quad (70)$$

$$Z_{dr}^{\text{att}}(r) = Z_{dr}(r) - 2 \int_0^r A_{dp}(r')dr'. \quad (71)$$

Wenn also die Größen  $Z_h$ ,  $Z_v$  und  $Z_{dr}$  die Werte der Reflektivität und differentielle Reflektivität ohne Dämpfungseinfluss angeben, beschreiben die Größen  $Z_h^{\text{att}}$ ,  $Z_v^{\text{att}}$  und  $Z_{dr}^{\text{att}}$ , welche Werte tatsächlich unter Dämpfungseinfluss vom Radarsystem aufgenommen werden.

Wie die einzelnen physikalischen Parameter im Zusammenhang stehen und in die Berechnung der Radarvariablen eingehen, ist in Abbildung 10 dargestellt.

Die verschiedenen Varianten der Variationsmethoden setzen die Vorwärtsoperatoren (62)-(71) unterschiedlich ein, was im Folgenden beschrieben wird.

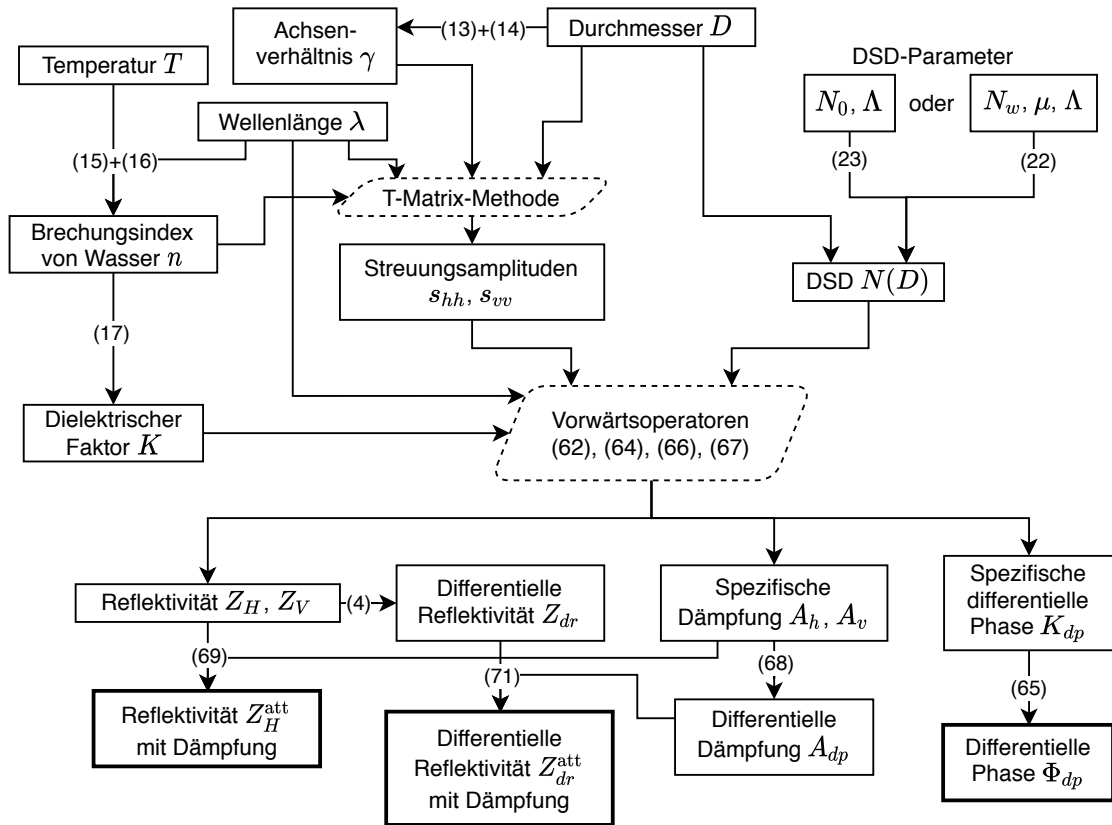


Abbildung 10: Darstellung der Zusammenhänge zwischen den physikalischen Größen, die in die Berechnung der Radarvariablen  $Z_h^{\text{att}}$ ,  $Z_{dr}^{\text{att}}$  und  $\Phi_{dp}$  eingehen. Die Zahlen in den Klammern weisen auf die entsprechenden Gleichungen in dieser Arbeit hin.

### Vorwärtsmodell in [Hog07]

In der Veröffentlichung [Hog07] wird als DSD-Funktion die *normalized-gamma distribution* (22) verwendet. Die Streuungsamplituden werden für Tropfen mit einem Durchmesser zwischen 0.1 und 10 mm im Voraus berechnet, wobei für die Bestimmung des Brechungsindex  $n$  aus Radarfrequenz  $f$  und Temperatur  $T$  auf das Modell aus [LMH89] verwiesen wird. In [Hog07] für das Achsenverhältnis  $\gamma$  der Tropfen der Zusammenhang (14) definiert.

Als Eingabegröße des Vorwärtsmodell  $H : X \rightarrow Y$  dient der Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  mit Angaben über den Parameter  $a$ . Außerdem geht der fest gewählte Wert für  $b$  und die gemessene Reflektivität, die aufgrund der enthaltenen Dämpfungseffekte hier explizit  $Z_h^{\text{att}}$  genannt wird, in die Berechnung mit ein. Der iterative Algorithmus zur Bestimmung der Größen  $Z_{dr}^{\text{att}}$  und  $\Phi_{dp}$  für einen einzelnen Radarstrahl mit  $r$  Gates und damit des Beobachtungsvektors  $\mathbf{y}$  lässt sich folgendermaßen darstellen:

**Algorithmus 2 (Vorwärtsmodell [Hog07, Kap. 3.a])**

```

Gegeben: Zustand  $a_i$  und  $b_i$ , Reflektivität  $(Z_h^{\text{att}})_i$  für  $i = 1, \dots, r$ 
 $(\Phi_{dp})_1 \leftarrow 0$ 
 $A_h \leftarrow 0$ 
 $A_v \leftarrow 0$ 
for  $i = 1, \dots, r$  do
   $Z_h \leftarrow (Z_h^{\text{att}})_i 10^{0.1A_h}$  ▷ Ausgleich der Dämpfung
   $q_{Z_h,R} \leftarrow a^{1/b} Z_h^{1-1/b}$  ▷ Umstellen der  $Z$ - $R$ -Beziehung

   $q_{K_{dp},Z_h} \leftarrow l_1(q_{Z_h,R})$  ▷ Anwenden der LUT
   $q_{A_h,Z_h} \leftarrow l_2(q_{Z_h,R})$ 
   $q_{A_v,Z_h} \leftarrow l_3(q_{Z_h,R})$ 
   $Z_{dr} \leftarrow l_4(q_{Z_h,R})$ 

   $K_{dp} \leftarrow q_{K_{dp},Z_h} Z_h$  ▷ Phasenverschiebung in diesem Gate
   $(\Phi_{dp})_{i+1} \leftarrow (\Phi_{dp})_i + 2 \Delta r K_{dp}$  ▷ Kumulierung der Phasenverschiebung
   $A_h \leftarrow A_h + 2 \Delta r q_{A_h,Z_h} Z_h$  ▷ Kumulierung der Dämpfung
   $A_v \leftarrow A_v + 2 \Delta r q_{A_v,Z_h} Z_h$ 
   $A_{dp} = A_h - A_v$ 
   $(Z_{dr}^{\text{att}})_i \leftarrow Z_{dr} - A_{dp}$  ▷ Einrechnen der Dämpfung
end for
return  $(Z_{dr}^{\text{att}})_i, (\Phi_{dp})_i$  für  $i = 1, \dots, r$ 

```

Die Größe  $q_{\cdot}$  gibt jeweils das Verhältnis der beiden Größen an, also beispielsweise gilt  $q_{K_{dp},Z_h} = K_{dp}/Z_h$ . Die Zusammenhänge  $l_1, l_2, l_3$  und  $l_4$  werden durch eine *Lookup-Tabelle* (LUT) realisiert. Dafür werden die jeweiligen  $q$ -Größen für einen Bereich des DSD-Parameters  $D_0$  über die Vorwärtsoperatoren berechnet und in Tabellenform abgespeichert. Da es sich bei allen verwendeten Größen um Verhältnisse handelt, kürzt sich der Parameter  $N_w$  in der DSD-Funktion heraus und kann ignoriert werden. Der Parameter  $\mu$  wird fest gewählt. Mit der Standardeinstellung aus [Hog09] wird der Bereich von  $D_0$  als  $[0, 6]$  und die Auflösung als 0.1 gewählt. Bei der Anwendung der LUT wird zwischen den Einträgen linear interpoliert.

**Vorwärtsmodell in [CZX13]**

Bei dieser Variante werden die Vorwärtsoperatoren direkt eingesetzt, anstatt zuerst eine LUT mit ihrer Hilfe zu erstellen. Der Zustandsvektor enthält die Parameter  $N_0$  und  $\Lambda$ , mit denen die DSD-Funktion definiert wird. Die Größen  $Z_H, Z_{dr}$  und  $K_{dp}$  werden mittels der Gleichungen (62), (6) und (64) für jeden Punkt des Radargitters  $G_y$  berechnet, wobei bei  $Z_H$  und  $Z_{dr}$  jeweils um die Dämpfung  $A_h$  bzw.  $A_{dp}$  korrigiert werden. Die Größe  $K_{dp}$  wird nicht direkt gemessen, sondern muss zunächst aus  $\Phi_{dp}$  berechnet werden, um mit der Schätzung aus dem Vorwärtsmodell verglichen werden zu können. Auf welche Art  $K_{dp}$  in [CZX13] aus  $\Phi_{dp}$  bestimmt wird, ist nicht angegeben. Die Berechnung ist, wie bereits in Abschnitt 2.1.2 erwähnt, aufgrund des Rauschlevels in der  $\Phi_{dp}$ -Messung fehleranfällig

und die Entwicklung von stabilen Methoden ist noch Forschungsgegenstand, siehe unter anderem [MIM12], [GML13] und [RUR18].

### 3.4 Regularisierung

Die Zielfunktion enthält einen Regularisierer, um bestimmte Eigenschaften der Lösung zu unterstützen, etwa um sie zu glätten:

$$\inf_{\mathbf{x} \in X} \{D(\mathbf{y}; \mathbf{x}) + R(\mathbf{x})\} \quad (72)$$

In der OET entspringt der Regularisierer direkt aus der Formulierung als MAP-Schätzung. Entsprechend wird bei den Verfahren aus [Hog07; CZX13; Mah+19] der gleiche Regularisierer verwendet, der sowohl die Ergebnisse glättet als auch eine Nähe zu a-priori-Annahmen unterstützt. A-priori-Wissen fließt über die Definition eines a-priori-Zustandsvektors  $\mathbf{x}^b$  ein. Unter der Annahme, dass die Ergebnisse zweier Punkte im Radargitter stärker miteinander korreliert sind, je geringer die Entfernung zwischen ihnen ist, wird der Regularisierer als

$$R_b(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^\top \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \quad (73)$$

gewählt, wobei  $\mathbf{B}$  folgendermaßen definiert wird:

$$\mathbf{B}_{i,j} = \mathbf{B}_{i,i} \exp(-d_{i,j}). \quad (74)$$

Dabei ist  $d_{i,j}$  ein Abstandsmaß. Entsprechend der Wahl des Zustandsvektors gilt bei [Hog07]  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und bei [CZX13]  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ , wobei bei letzterem die Matrix so angepasst werden muss, dass die beiden Parameter  $N_0$  und  $\Lambda$  keine Korrelation verbindet.

Die Diagonalelemente sind mit  $\mathbf{B}_{i,i} = \sigma_b^2$  konstant und repräsentieren die Unsicherheit des a-priori-Wissens. Die Größe  $d_{i,j}$  ist ein Distanzmaß und wird in [Hog07] als

$$d_{i,j} = \frac{|r_{ij}|}{r_0} \quad (75)$$

und in [CZX13] als

$$d_{i,j} = \frac{1}{2} \left( \frac{r_{ij}}{r_0} \right)^2 \quad (76)$$

gewählt, wobei  $r_{ij}$  die Entfernung der den Indizes  $i$  und  $j$  entsprechenden Punkten im Radargitter  $G_x$  und  $r_0$  die Dekorrelationslänge angibt.  $\mathbf{B}$  ist damit eine symmetrische Toeplitzmatrix und gibt die Korrelation zweier Punkte beruhend auf ihrer Distanz an. Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ist eine symmetrische Toeplitzmatrix, wenn der Eintrag  $A_{i,j}$  nur von der absoluten Differenz  $|i - j|$  abhängt [Dow02].

Bei Rodgers [Rod00] wird die Verwendung des absoluten Distanzmaßes in Gleichung (2.83) eingeführt. Die Wahl des quadratischen Distanzmaßes ist bei Kalnay [Kal03] in Gleichung (5.4.52) zu finden und beruht auf der Annahme einer normalverteilten Fehlerkorrelation.



In [CZX13] wird, um eine numerische Invertierung der vollbesetzten Matrix  $\mathbf{B}$  zu umgehen, der Zustandsvektor zu  $\mathbf{v} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)$  mit  $\mathbf{D}\mathbf{D}^\top = \mathbf{B}$  abgeändert und die Zielfunktion entsprechend umgeschrieben.

In [Hog07] wird das Variationsproblem einzeln für jeden Radarstrahl gelöst, sodass durch einen Regularisierungsterm keine Glättung in azimuthaler Richtung durchgesetzt werden kann. Daher wird ein iteratives Verfahren in Azimutrichtung angewendet, bei dem die Zielfunktion jeweils um einen Term erweitert wird, der den Abstand zum benachbarten Strahl bestraft.

### 3.5 Zusammenfassung

Die beiden Verfahren [Hog07] und [CZX13] unterscheiden sich hauptsächlich darin, dass unterschiedliche Zustandsparameter verwendet werden, was allerdings auch zu einer anderen Anwendung der Vorwärtsoperatoren führt. Mit [Hog07] wird im Grunde eine über den Ort und die Zeit variable  $Z$ - $R$ -Beziehung bestimmt, während in [CZX13] physikalische Parameter resultieren. Die indirekte Verwendung der Vorwärtsoperatoren in [Hog07] zur Erstellung einer LUT führt dazu, dass im Vorwärtsmodell für einen Strahl über jedes Gate iteriert werden muss, was rechnerisch aufwändig ist.

Im nächsten Kapitel wird beschrieben, wie die beiden Methoden für diese Arbeit implementiert und angepasst wurden.



---

## Kapitel 4: Eigene Umsetzung und Implementierung der Variationsmethode

In diesem Kapitel wird die Umsetzung und Anpassung der in Kapitel 3 diskutierten Variationsmethoden von Hogan [Hog07] und Cao et al. [CZX13] beschrieben. Die eigene Implementierung der Methoden wird im Folgenden `Hog07kh` bzw. `CZX13kh` genannt.

Die Implementierung wurde in Python 3.8 umgesetzt, wobei für die Optimierung und automatische Differenzierung der Zielfunktion das Paket PyTorch (Version 1.7) zum Einsatz kommt. Für das Einlesen und Vorverarbeiten der Daten wird der von MeteoSwiss gepflegte Fork [Fig+17] der Bibliothek Py-ART [HC16] verwendet, in dem zusätzlich eine Methode zur Korrektur der Systemphase für einen kompletten Radarscan verfügbar ist.

Die implementierte Methode kann für einen einzelnen Radarstrahl oder für ein gesamtes Radarbild angewandt werden. Die Ein-, Ausgabe und Vorverarbeitung der Rohdaten sowie die Konfiguration, Initialisierung und Ausführung der Optimierungsroutine werden in der Klasse `ProcessorVarQPE` koordiniert. Die Pfade zu den Eingabedaten sowie die Einstellungen und Parameter für das Vorwärtsmodell und die Optimierung werden bei der Initialisierung aus einer Konfigurationsdatei eingelesen. Bei der Anwendung auf Messdaten werden die Daten zunächst, wie im nächsten Abschnitt 4.1 beschrieben, vorverarbeitet. Das Vorwärtsmodell (siehe Abschnitt 4.3) wird entsprechend der Konfiguration initialisiert. Die relevanten Daten werden anschließend an den Optimierer (Abschnitt 4.2) übergeben und verarbeitet. Das resultierende Ergebnis für den Zustandsvektor, die aus dem Vorwärtsmodell geschätzten Radarvariablen sowie die Regenrate werden im NetCDF-Format (von UCAR/Unidata) abgespeichert.

Die Abb. 11] illustriert die Datenströme sowie das Zusammenwirken der verschiedenen Implementierungsbestandteile.

### 4.1 Vor- und Nachverarbeitung

Vor der Anwendung der Variationsmethode werden die Eingabedaten in einigen Schritten vorverarbeitet. Die Radardaten liegen als Volumendaten vor, sodass zunächst eine vorher festgelegte Elevation extrahiert wird. Die Elevation wird in Abwägung zwischen auftretenden Strahlblockierungen durch die Umgebungstopologie und höhere Unsicherheiten durch Messung in größerer Höhe gewählt. Anschließend werden die Daten für die Reflektivität bei horizontaler Polarisation  $Z_H$ , für die differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$  und für die differentielle Phase  $\Phi_{dp}$  über folgende Kriterien maskiert:

- Es gibt einen Messwert für die Spektrumsbreite  $W$ .
- Die Reflektivität  $Z_H$  ist größer als 3 dBZ.
- Der Korrelationskoeffizient  $\rho_{hv}$  ist größer als 0.6.

Für die Bildpunkte, an denen eines dieser Kriterien nicht erfüllt ist, wird angenommen, dass sie kein meteorologisches Echo von Regen enthalten, und sie werden von der weite-

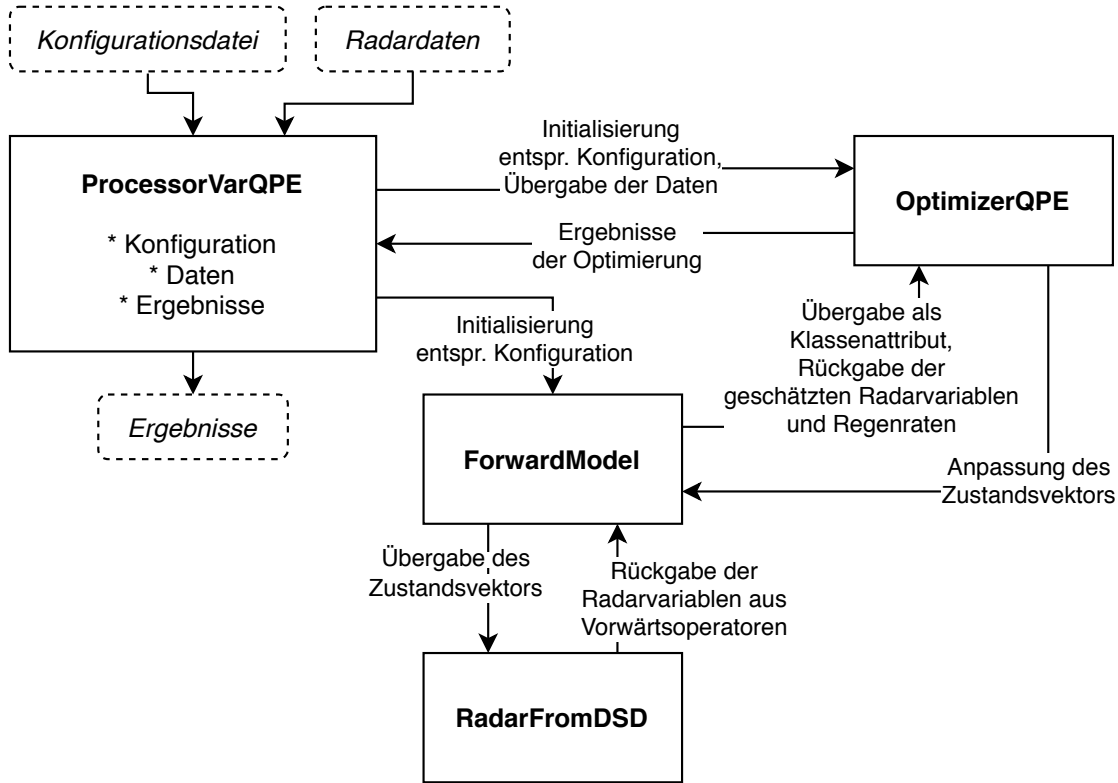


Abbildung 11: Struktur der Implementierung; Verknüpfung der verschiedenen Teile der Umsetzung der Variationsmethode zur Niederschlagsmengenschätzung

ren Verarbeitung ausgeschlossen. Das Radargitter  $G_y$  und bei der Implementierung der [CZX13]-Methode auch  $G_x$  werden entsprechend maskiert.

Die Daten für die differentielle Phase enthalten einen Offset, der auf die Systemphase des Radargeräts zurückzuführen ist. Um die Daten zu korrigieren, wird die Funktion `correct.correct_sys_phase()` aus der Bibliothek Py-Art verwendet. Strahlweise wird die Systemphase geschätzt und die differentielle Phase entsprechend angepasst. In Abb. 12] sind die unverarbeiteten  $\Phi_{dp}$ -Daten und das Ergebnis der Korrektur für ein beispielhaftes Radarbild dargestellt, zu beachten ist die Verschiebung in der Farbskala.

Auf eine Glättung oder eine andere Methode der Rauschunterdrückung in der Vorverarbeitung der Radarvariablen wird verzichtet, da dies bei der Optimierung über die Anwendung eines Regularisierers gesteuert werden kann.

Außerdem wird die Standardabweichung der Radarmessungen für  $Z_H$ ,  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$  beruhend auf den Gleichungen (5.23), (5.28) und (5.32) aus [Zha17, Kap. 5.2] geschätzt. Aus der Radarwellenlänge  $\lambda$  und Spektrumsbreite  $W$  berechnet sich die Korrelationszeit als  $\tau_c = \frac{\lambda}{4\pi W}$ . Aus der Scanrate  $G$  und der Azimut-Auflösung  $\Delta\alpha$  ergibt sich die Verweilzeit (*dwell time*), also die Messdauer für einen Radarstrahl, als  $T_d = \frac{\Delta\alpha}{G}$  (siehe [BC01, Gl. (6.145)]). Damit erhält man die Anzahl der unabhängigen Samples als  $M_I = \frac{T_d}{\sqrt{\pi}\tau_c}$ .

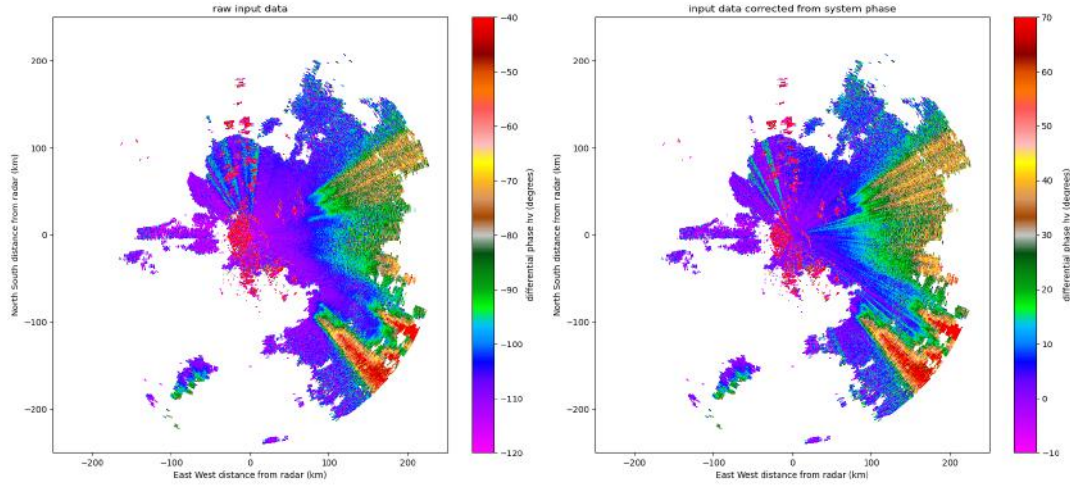


Abbildung 12: Messung der differentiellen Phase  $\Phi_{dp}$  des Omkoi-Radars am 21.05.2019 um 15:30 Uhr. Links die unverarbeiteten Messdaten, rechts die Daten nach Korrektur der Systemphase mit Py-ART (zu beachten die verschiedenen Farbskalen). Bei der Korrektur handelt es sich hauptsächlich um eine Verschiebung der Werte, sodass die Phasenverschiebung am Radargerät bei 0 startet.

Die Standardabweichungen der Radarvariablen können dann folgendermaßen geschätzt werden:

$$\sigma_{Z_H} \approx 10 \log\left[1 + \frac{1}{\sqrt{M_I}}\right], \quad (77)$$

$$\sigma_{Z_{dr}} \approx 4.343 \sqrt{\frac{2}{M_I} (1 - \rho_{hv}^2)}, \quad (78)$$

$$\sigma_{\Phi_{dp}} \approx \frac{180}{\pi \rho_{hv}} \sqrt{\frac{1 - \rho_{hv}^2}{2M_I}}. \quad (79)$$

Die Verweildauer ist durch das Radarsystem vorgegeben, eine längere Dauer bedeutet geringere Unsicherheiten. Die Standardabweichung der Messungen wird außerdem umso geringer geschätzt, je näher der gemessene kopolare Korrelationskoeffizient  $\rho_{hv}$  bei 1 liegt.

Die Messunsicherheiten an verschiedenen Orten werden als unkorreliert angenommen, sodass man für die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{(q \cdot m) \times (q \cdot m)}$  aus (52) eine Diagonalmatrix erhält. Bei Hog07kh ist  $q = 2$  und

$$\mathbf{R}_{i,j} = \begin{cases} (\sigma_{Z_{dr}}^{-2})_i, & \text{falls } i = j \wedge 1 \leq i \leq m, \\ (\sigma_{\Phi_{dp}}^{-2})_i, & \text{falls } i = j \wedge m + 1 \leq i \leq 2m, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (80)$$

bei CZX13kh ist  $q = 3$  und

$$\mathbf{R}_{i,j} = \begin{cases} (\sigma_{Z_H}^{-2})_i, & \text{falls } i = j \wedge 1 \leq i \leq m, \\ (\sigma_{Z_{dr}}^{-2})_i, & \text{falls } i = j \wedge m + 1 \leq i \leq 2m, \\ (\sigma_{\Phi_{dp}}^{-2})_i, & \text{falls } i = j \wedge 2m + 1 \leq i \leq 3m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (81)$$

## 4.2 Optimierung

Die in der Literatur beschriebenen Verfahren, die einen variationellen Ansatz verfolgen, wie [Hog07], [Hua+18] oder [Mah+19], lösen das Optimierungsproblem über eine Linearisierung des Vorwärtsmodells. In [Hog07] wird das Gauss-Newton-Verfahren zur Optimierung eingesetzt. Durch die Linearisierung des Vorwärtsmodells in der  $i + 1$ -ten Iteration

$$H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}_i) + \nabla H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad (82)$$

wobei  $\mathbf{x}_i$  der Zustandsvektor aus der  $i$ -ten Iteration und  $\nabla H$  die Jacobi-Matrix von  $H$  ist, ergibt sich ein Problem mit quadratischer Zielfunktion. Anschließend kann die Hesse-Matrix der Zielfunktion geschätzt und dadurch der Iterationsschritt entsprechend des Newton-Verfahrens bestimmt werden. Bei dieser Methode muss die Jacobi-Matrix des Vorwärtsmodells explizit berechnet werden.

Um die fehleranfällige explizite Berechnung von Ableitungen zu umgehen, wird in dieser Arbeit das `autograd`-Framework von PyTorch zum automatischen Differenzieren genutzt. Dabei wird bei der Berechnung des Zielfunktionswertes jede einzelne Rechenoperation protokolliert, um anschließend durch wiederholte Anwendung der Kettenregel (*Backpropagation*) den Gradienten der Eingabegröße zu bestimmen.

Da das Gradientenabstiegsverfahren bei ersten Tests keine Lösung für das Variationsproblem finden konnte, wird für die Optimierung das in Abschnitt 2.2.3 beschriebene L-BFGS-Verfahren verwendet. Der dafür benötigte Gradient der Zielfunktion  $\nabla J$  wird über Backpropagation bestimmt. Das L-BFGS-Verfahren ist im PyTorch-Modul `torch.optim` implementiert und wurde für die Verwendung in dieser Arbeit folgendermaßen durch Modifikation des Quellcodes angepasst:

- In der PyTorch-Implementierung wird die in Abschnitt 2.2.3 beschriebene heuristische Initialisierung für die Hesse-Matrix-Schätzung  $H_i^0$  genutzt. Der Quellcode wurde so angepasst, dass eine Matrix  $\mathbf{H}$  übergeben werden kann, die stattdessen als Initialisierung verwendet wird.
- Es werden die Abbruchkriterien nach Gill, Murray und Wright [GMW97] verwendet (siehe unten).

Die Fehlerkovarianzmatrix  $\mathbf{B}$  aus der Definition (72) des  $R_b$ -Regularisierers ist zugleich die Hesse-Matrix dieses Regularisierers. Kommt dieser Regularisierer zum Einsatz, kann  $\mathbf{B}$  als Approximation der Hesse-Matrix der Zielfunktion gesehen werden. Bei Tests, bei

denen die Matrix  $H_0^i$  des L-BFGS-Verfahrens auf  $\mathbf{B}$  gesetzt wurde, wurde das Optimierungsverfahren allerdings instabil. Deshalb wird die heuristische Initialisierung aus Abschnitt 2.2.3 verwendet.

Als Abbruchkriterien werden die Kriterien nach Gill, Murray und Wright [GMW97] verwendet. Für die Zielfunktion  $J$ , eine festgelegte maximale Anzahl an Iterationen  $n_{\text{iter}}$  und die Toleranzen  $\epsilon_g$  und  $\epsilon_c$  sind diese folgendermaßen definiert:

1.  $J(\mathbf{x}_{i-1}) - J(\mathbf{x}_i) \leq \epsilon_c(1 + |J(\mathbf{x}_i)|)$ ,
2.  $\|\mathbf{x}_{i-1} - \mathbf{x}_i\| \leq \sqrt{\epsilon_c}(1 + \|\mathbf{x}_i\|)$ ,
3.  $\|\nabla J(\mathbf{x}_i)\| \leq \sqrt[3]{\epsilon_c}(1 + |J(\mathbf{x}_i)|)$ ,
4.  $\|\nabla J(\mathbf{x}_i)\| \leq \epsilon_g$ ,
5.  $i \geq n_{\text{iter}}$ .

Die Optimierung wird abgebrochen, wenn die Kriterien 1., 2. und 3. oder eines der Kriterien 4. und 5. erfüllt sind. Zusätzlich zu diesen Abbruchkriterien wird die Optimierung auch nach einer bestimmten Anzahl an Funktionsauswertungen gestoppt (bei mehr als  $1.25 \cdot n_{\text{iter}}$  Funktionsauswertungen). Dies dient ebenso wie die maximale Iterationszahl dazu, ungewöhnlich lange Optimierungsdauern zu verhindern, da es bei der Schrittweitenbestimmung zu vielen Funktionsauswertungen kommen kann.

Für die Schrittweitsuche wird ein Verfahren verwendet, das eine Schrittweite ermittelt, die die starken Wolfe-Bedingungen (siehe Abschnitt 2.2.3) erfüllt. Das Verfahren ist im PyTorch-Modul `torch.optim` implementiert. Tests mit fester Schrittweite  $\alpha = 1$  und einer Schrittweitsuche basierend auf der Armijo-Bedingung zeigten keine zufriedenstellenden Ergebnisse.

Der Optimierungsprozess mittels des L-BFGS-Verfahrens ist in der Klasse `OptimizerQPE` umgesetzt. Bei der Initialisierung wird das gewählte Vorwärtsmodell (Instanz der Klasse `ForwardModelHogan` oder `ForwardModelCao`, siehe Abschnitt 4.3) übergeben. Der im Vorwärtsmodell definierte Zustandsvektor ist der PyTorch-Parameter, die Zielvariable der Optimierung.

## 4.3 Vorwärtsmodell

### Implementierungsdetails

Die Zusammenhänge zwischen Zustandsparametern und Radarvariablen, also die Vorwärtsoperatoren aus Abschnitt 3.3, sind in der Klasse `RadarFromDSD` umgesetzt. Folgende Konfigurationparameter gehen in die Berechnung ein:

- Als DSD-Funktion stehen CGD und NGD (siehe 2.1.5) zur Auswahl.
- Für die Abhängigkeit des Achsenverhältnisses  $\gamma$  vom Durchmesser  $D$  kann zwischen den Gleichungen nach [BZV02] und [Hog07] (siehe 2.1.4) gewählt werden.

- Der minimale und maximale Durchmesser der Tropfen sowie die Auflösung der numerische Integration über den Durchmesser werden festgelegt. Standardmäßig wird  $[0.1, 0.2, 0.3, \dots, 9.9, 10]$  wie in [Hog09] als Vektor mit allen zu berücksichtigenden Durchmessern verwendet.
- Die Temperatur wird als  $27^\circ\text{C}$  angenommen, was nach dem Klimabericht des thailändischen Wetterdienstes [Cli15] der mittleren Temperatur in der Regenzeit entspricht.
- Die Frequenz  $f$  und das Radargitter  $G_y$  sind durch das Radarsystem vorgegeben.

Da in der in [Hog07] zitierten Arbeit [LMH89] die Gleichung zur Berechnung des Brechungsindex  $n$  fehlerhaft ist, wird der Zusammenhang aus [LHM91] (16) genutzt.

Die Streuungsamplituden  $s_{hh}$  und  $s_{vv}$  werden mithilfe der Bibliothek PyTMatrix [Lei14] bestimmt. Die PyTMatrix-Bibliothek ist ein Python-Wrapper für den Code von Mishchenko [MT94], der die Berechnung der Streuungsmatrizen für Regentropfen über die T-Matrix-Methode (siehe Abschnitt 2.1.4) ermöglicht. Die Streuungsmatrix wird damit in Abhängigkeit von der Radarwellenlänge  $\lambda$ , dem Brechungsindex von Wasser  $n$ , dem Tropfendurchmesser  $D$ , dem davon abhängigen Achsenverhältnis  $\gamma$  und der Streuungsgeometrie bestimmt. Der Brechungsindex  $n$  ist dabei abhängig von der Radarwellenlänge  $\lambda$  und der angenommenen Temperatur  $T$ . Als Streuungsgeometrie wird sowohl Vorwärts- als auch Rückwärtsstreuung berücksichtigt.

Die Eingangsparameter für die Berechnung der Tropfenkonzentration  $N(D)$  sind die DSD-Parameter  $N_0$  und  $\Lambda$  für die CGD bzw.  $N_w$ ,  $\mu$  und  $D_0$  für die NGD. Die Radarvariablen werden entsprechend der Gleichungen (62) bis (71) bestimmt, wobei die Integrale numerische mithilfe der Trapezregel umgesetzt werden, bei der die Fläche unter der Funktion über Trapeze unter dem Graphen angenähert wird.

Die beiden Klassen `ForwardModelHogan` und `ForwardModelCao` wenden die Vorwärtsoperatoren für die Methoden `Hog07kh` und `CZX13kh` wie in Abschnitt 3.3 beschrieben mit folgenden zusätzlichen Anpassungen an:

- Bei `Hog07kh` kann zusätzlich zum Parameter  $a$  auch der Parameter  $b$  aus der  $Z$ - $R$ -Beziehung im Zustandsvektor verwendet werden. Dadurch kann auf eine größere Variabilität bei diesem empirischen Zusammenhang zurückgegriffen werden. Der Parameter  $b$  wird dabei in der Form  $\sqrt{\ln b}$  im Zustandsvektor verwendet, um sicherzustellen, dass stets  $b \geq 1$  gilt.
- Bei `Hog07kh` ist auch die Verwendung der CG-DSD- statt der NG-DSD-Funktion möglich. Für die Erstellung der LUT wird dafür der Wert von  $\Lambda$  in dem Bereich  $[0.1, 40]$  variiert.
- Bei `CZX13kh` wird im Beobachtungsvektor direkt die  $\Phi_{dp}$ -Messung verwendet anstatt zunächst  $K_{dp}$ -Werte aus dieser zu bestimmen. Dadurch kann die Berechnung von  $K_{dp}$ , welche wie oben erwähnt durch das stark verrauschte Profil  $\Phi_{dp}$  fehleranfällig ist, umgangen werden.



- Bei CZX13kh wird im Zustandsvektor der Parameter  $\Lambda$  in der Form  $\Lambda' = \sqrt[4]{\Lambda}$  verwendet. In [Zha17, Kap. 7.2.2] wird anhand von Disdrometer-Messungen dargestellt, dass  $\Lambda'$  annähernd normalverteilt ist, was bei der Verwendung im Variationsansatz numerische Vorteile hat.

Strahlweise wird die resultierende Regenrate  $R$  für Lücken aus bis zu 5 Bildpunkten linear interpoliert, für alle anderen maskierten Bildpunkte auf 0 gesetzt.

### Bemerkungen zum Vorwärtsmodell aus [Hog07]

Wird zur Berechnung der Streuungsamplituden die Achsenverhältnisfunktion  $\gamma$  wie in [Hog07] (14) beschrieben verwendet, ergaben sich bei der Anwendung auf Radardaten `nan`-Werte für die  $\Phi_{dp}$ -Schätzung. Der Grund dafür ist, dass nach dieser  $\gamma$ -Funktion für kleine Durchmesser  $D$  das Achsenverhältnis  $\gamma > 1$  gilt und somit  $K_{dp} < 0$ . In der LUT werden die Werte logarithmiert abgespeichert, weshalb es zu den `nan`-Werten kommt. Deshalb wird die Funktion  $\gamma$  in (14) für Durchmesser  $D < 1$  mm auf  $\gamma = 1$  gesetzt.

Bei der Implementierung und dem Testen des in [Hog07] beschriebenen Vorwärtsmodells fiel auf, dass die Ergebnisse aus der Veröffentlichung für die LUT nicht reproduziert werden konnten. Die in [Hog09] verwendeten Tabellen mit den Streuungsamplituden unterscheiden sich von den eigenen Berechnungen, obwohl die angegebenen Zusammenhänge und Konfigurationen verwendet wurden. Der Grund für die Unterschiede liegt vermutlich in der Anwendung der T-Matrix-Methode. Der Autor konnte leider nicht erreicht werden. Als Resultat weichen auch die Ergebnisse für die LUT, die in Abbildung 13c dargestellt sind, von den entsprechenden Ergebnissen aus [Hog07, Abb. 2+3] ab. Vor allem bei der Abhängigkeit zwischen  $K_{dp}/Z_h$  und  $Z_h/R$  ist in [Hog07] das Maximum bei etwa  $10^2$  deutlich ausgeprägter.

In Abbildung 13 sind die LUT für unterschiedliche Achsenverhältnisfunktionen  $\gamma$  und für die beiden DSD-Funktionen dargestellt. Die Diagramme weisen darauf hin, dass die Wahl von  $\gamma$  deutlichen Einfluss auf die LUT hat, die Wahl der DSD-Funktion dagegen weniger.

Einen genaueren Einblick in die Unterschiede zwischen den DSD-Funktionen bietet Abb. 14]: Dort sind die Größen der LUT für die NG- und die CG-DSD-Funktion bei gleichem  $\gamma$  dargestellt, wie sie auch tatsächlich intern abgespeichert werden. Der Verlauf der Funktionen aus den linear interpolierten LUT-Werten ist annähernd gleich. Jedoch unterscheidet sich die Auflösung der LUT, in der Abbildung als vertikale Striche dargestellt: Bei Verwendung der NGD ist die LUT im höheren Wertebereich für  $\ln Z_h/R$  hoch- und nach unten hin immer gröber aufgelöst, bei Verwendung der CGD ist es andersherum.

Dass die Unterschiede zwischen den DSD-Funktionen gering sind, ist nicht verwunderlich, da sie wie in Abschnitt 2.1.5 erwähnt den gleichen Informationsgehalt haben. Ob die unterschiedlichen Stützpunkte der LUT Einfluss auf die Ergebnisse hat, wird in späteren Experimenten getestet.

## 4.4 Regularisierung

### Regularisierung aus der Literatur

In den Arbeiten [Hog07; CZX13; Mah+19] wird wie in Abschnitt 3.4 beschrieben der Regularisierer

$$R_b(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^\top \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) \quad (83)$$

verwendet, wobei  $\mathbf{x}^b$  eine a-priori-Annahme und  $\mathbf{B}$  die zugehörige Fehlerkovarianzmatrix ist. In dieser Arbeit wird die Matrix  $\mathbf{B}$  wie in (75) mit absolutem Distanzmaß als

$$\mathbf{B}_{i,j} = \sigma_b^2 \exp\left(-\frac{|r_{ij}|}{r_0}\right) \quad (84)$$

definiert. Dies hat im Gegensatz zu dem quadratischen Distanzmaß aus (76) den Vorteil, dass der Abstand zwischen den Werten der Gegendiagonalen von  $\mathbf{B}$  nach außen hin abfällt, was nach [Rou98] ein hinreichendes Kriterium für eine nichtnegative Determinante ist. Dies gilt auch für alle auf der Diagonalen zentrierten Untermatrizen und somit sind alle führenden Hauptminoren nichtnegativ und die Matrix  $\mathbf{B}$  ist positiv semidefinit. Damit ist die Nichtnegativität der Zielfunktion garantiert, was mit einem quadratischen Distanzmaß  $r_{ij}^2$  im Exponent nicht notwendigerweise gegeben ist.

Die Inverse der Matrix  $\mathbf{B}$  lässt sich nach [Dow02] bestimmen als

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\sigma_b^2(1 - \kappa^2)} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa & \cdots & 0 \\ -\kappa & 1 + \kappa^2 & -\kappa & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -\kappa \\ 0 & \cdots & -\kappa & 1 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

mit  $\kappa = e^{-\frac{\Delta r}{r_0}}$ . Mit einem diskretisierten eindimensionalen Laplace-Operator  $\Delta$  mit Neumann-Randbedingungen

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (86)$$

kann die Matrix  $\mathbf{B}^{-1}$  dargestellt werden als

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\sigma_b^2(1 - \kappa^2)} \left( \kappa \Delta + (1 + \kappa^2 - 2\kappa)\mathbf{I} + \mathbf{M} \right). \quad (87)$$

Die Matrix  $\mathbf{M}$  ist die Nullmatrix mit Eckelementen  $\kappa - \kappa^2$ .

Für den Laplace-Operator  $\Delta$  gilt

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^\top \Delta (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)^\top \nabla^\top \nabla (\mathbf{x} - \mathbf{x}^b) = \|\nabla \mathbf{x} - \nabla \mathbf{x}^b\|_2^2, \quad (88)$$

wobei  $\nabla$  die entsprechende Finite-Differenzen-Diskretisierung des Gradientenoperators sei.

Für  $\Delta r \ll r_0$  ist  $\kappa$  nahe bei 1, sodass  $2\kappa \approx 1 + \kappa^2$  gilt. Nach zweiter binomischer Formel gilt zudem  $2\kappa < 1 + \kappa^2$ . Falls  $\mathbf{x}^b$  konstant gewählt wird, bedeutet dies, dass wegen  $\nabla \mathbf{x}^b = 0$  durch den Regularisierer  $R_b$  vor allem der Gradient des Zustandsvektors  $\nabla \mathbf{x}$  bestraft wird. Wegen  $2\kappa \approx 1 + \kappa^2$  wird durch den Term  $(1 + \kappa^2 - 2\kappa)\mathbf{I}$  der Abstand des Zustandsvektors zum a-priori-Vektor nur im geringen Maße bestraft.

### Weitere Regularisierungsmöglichkeiten

Als Ersatz für die iterative Glättung in Azimut-Richtung bei [Hog07] können stattdessen die finiten Differenzen der Zustandsparameter in azimuthaler Richtung einzeln durch folgenden Regularisierer bestraft werden:

$$R_s(\mathbf{x}) = \lambda \|\nabla \mathbf{x}\|_2^2, \quad (89)$$

mit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{r \times g}$  Zustandsparameter auf  $G_y$  und  $m = rg$ , wobei  $r$  die Anzahl der Strahlen und  $g$  die Anzahl der Gates angibt, und  $\nabla$  entsprechender Finite-Differenzen-Operator für die Ableitung in azimuthaler Richtung. Das Gewicht  $\lambda$  kann so angepasst werden, dass die Parameter  $a$  und  $b$  in Azimuthrichtung im gleichen Maße variieren wie durch die Verwendung der kubischen Splines in radiale Richtung. Bei [Hog07] wird eine Korrelation der Werte in einem Umkreis von 2-5 km angenommen. In dem Experiment aus Abschnitt 5.2 wird getestet, ob die Anwendung von  $R_s$  vergleichbar mit dem iterativen Verfahren aus [Hog07] ist. Eine andere Möglichkeit zur azimuthalen Glättung wäre die Verwendung von bikubischen Splines, was aufgrund des Implementierungsaufwandes in dieser Arbeit nicht weiterverfolgt wird.

Werden wie bei [CZX13] als Zustandsparameter die Parameter einer DSD-Funktion gewählt, können kaum valide Vorannahmen für deren Werte getroffen werden, es sei denn es liegen wie bei [CZX13] weitere unabhängige Messungen vor. Außerdem ist die Verwendung von kubischen Splines als Basisfunktionen nicht sinnvoll, da die Parameter in gleichen Maße von Gate zu Gate variieren wie die Radarvariablen und Regenrate auch. Deshalb wird in dieser Arbeit die Verwendung anderer Regularisierer für die CZX13kh-Methode vorgeschlagen. Mit dem Regularisierer

$$R_o(\mathbf{x}) = \lambda \|\nabla H(\mathbf{x})\|_2^2 \quad (90)$$

wird der Gradient der geschätzten Radarvariablen entsprechend der Gewichtung  $\lambda$  bestraft, sodass die Schätzungen geglättet werden. Für die einzelnen Radarvariablen können unterschiedliche Gewichte gewählt werden. Außerdem ist es möglich direkt die resultierende Regenrate zu regularisieren:

$$R_r(\mathbf{x}) = \lambda \|\nabla R(\mathbf{x})\|_2^2. \quad (91)$$

Die Regularisierer  $R_o$  und  $R_r$  können sowohl zur Regularisierung in radialer als auch in azimuthaler Richtung dienen.

Die in [CZX13] verwendete Umschreibung der Zielfunktion mit neuem Zustandsvektor  $\mathbf{v} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^b)$  mit  $\mathbf{D}\mathbf{D}^\top = \mathbf{B}$  ist in der eigenen Implementierung nicht nötig. Auch wenn der  $R_b$ -Regularisierer angewandt werden würde, ist die Invertierung der Matrix  $\mathbf{B}$  auf Grund der expliziten Gleichung (85) nicht problematisch.

Die Experimente in Kapitel 5 untersuchen die Wirkungsweisen der Regularisierer. Dort werden auch Vor- und Nachteile diskutiert.

#### 4.5 Zusammenfassung

Von den in der Literatur beschriebenen variationellen Ansätzen zur Ermittlung der Regenrate aus polarimetrischen Radardaten wurden für diese Arbeit die Methoden aus [Hog07] und [CZX13] mit den folgenden Anpassungen als `Hog07kh` und `CZX13kh` implementiert:

- Bei `Hog07kh` ist die Optimierung der Parameter  $a$  und  $b$  aus der  $Z$ - $R$ -Beziehung statt nur von  $a$  möglich.
- Bei `CZX13kh` wird direkt die  $\Phi_{dp}$ -Messung im Beobachtungsvektor verwendet, anstatt zunächst die recht unsichere Berechnung von  $K_{dp}$  durchzuführen.
- Die `CZX13kh`-Methode wird erstmals zur Bestimmung der Regenrate eingesetzt.
- Es sind zusätzliche bzw. andere Regularisierungsmethoden möglich.
- Es wird statt des Gauss-Newton-Verfahrens der L-BFGS-Optimierer von PyTorch eingesetzt, womit eine manuelle Bestimmung der Jacobi-Matrix nicht nötig ist und die Zielfunktion einfach variiert werden kann.
- Eine flexible Änderung und damit Vergleich der verwendeten Achsenverhältnis- und DSD-Funktionen ist möglich.

Im nächsten Kapitel werden die beiden Methoden `Hog07kh` und `CZX13kh` und ihre Konfigurationsmöglichkeiten sowohl anhand von simulierten als auch anhand realer Radardaten evaluiert.

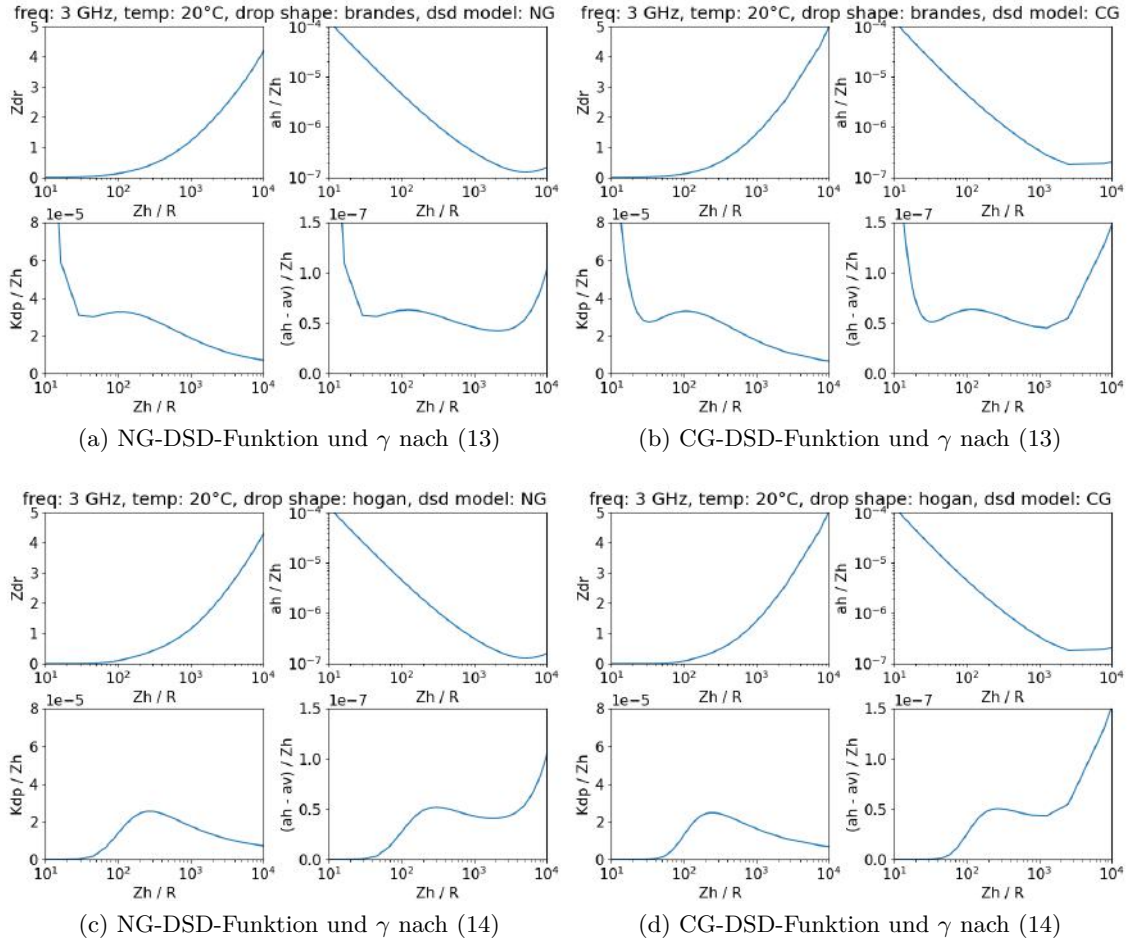


Abbildung 13: Grafische Darstellung der Lookup-Tabelle, wie in [Hog07] definiert. Die vier Plots zeigen jeweils die Abhängigkeit von  $Z_{dr}$ ,  $K_{dp}/Z_h$ ,  $a_h/Z_h$  und  $(a_h - a_v)/Z_h$  von der Größe  $Z_h/R$ . Dabei wurde  $\mu = 5$  und  $T = 20^\circ\text{C}$  gewählt. Bei (a) und (b) ist die Achsenverhältnisfunktion nach [BZV02] (13), bei (c) und (d) nach [Hog07] (14). Als DSD-Funktion wurde bei (a) und (c) die NGD (22), bei (b) und (d) die CGD (23) angewendet. Die Unterschiede zwischen den DSD-Funktionen sind gering, zwischen den  $\gamma$ -Zusammenhängen hingegen deutlich erkennbar, vor allem für die Verhältnisse  $K_{dp}/Z_h$  und  $(a_h - a_v)/Z_h$ .

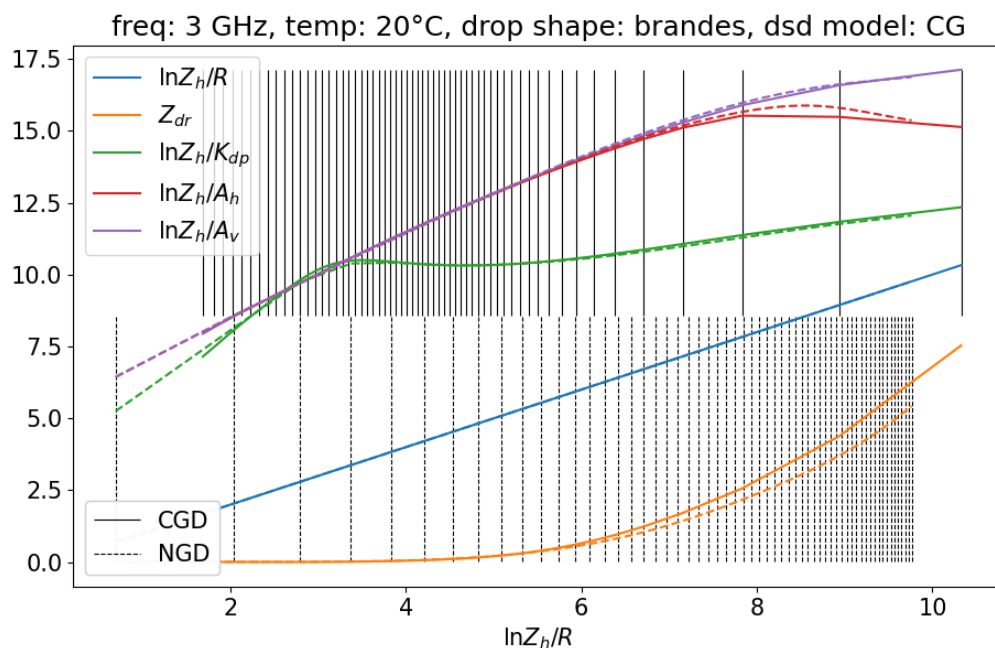


Abbildung 14: Werte der LUT des Vorwärtsmodells der Hog07kh-Methode. Zwischen den Stützpunkten wird linear interpoliert. Farblich gekennzeichnet sind die verschiedenen Größen, die in Abhängigkeit von  $\ln Z_h/R$  dargestellt sind. Als durchgezogene bzw. gestrichelte Linien sind die Ergebnisse bei Verwendung der CGD bzw. NGD als DSD-Funktion zu sehen. Vertikale Linien kennzeichnen die Auflösung der LUT, oben für CGD und unten für NGD.

---

## Kapitel 5: Experimente und Ergebnisse

Mit den für diese Arbeit implementierten Variationsmethoden `Hog07kh` und `CZX13kh`, die auf den Veröffentlichungen [Hog07] und [CZX13] beruhen, können Regenraten aus polarimetrischen Radarbildern bestimmt werden. In diesem Kapitel werden die implementierten Verfahren auf Robustheit bzgl. Messrauschen und Plausibilität der modellierten Radarvariablen und der internen Parameter untersucht. Auch Regularisierungsmöglichkeiten, die die räumliche Kontinuität der Schätzungen garantieren sollen, werden analysiert. Schließlich wird über den Vergleich mit Regenschreiberdaten, die die *ground truth* für am Boden gemessene Regenmengen angeben, die Validität der berechneten Regenraten überprüft.

### 5.1 Anwendung auf simulierte Radarstrahlen

In diesen Experimenten soll die grundsätzliche Funktion des Optimierungsalgorithmus bei Vorliegen von Messrauschen, der Einfluss der Regularisierer in radialer Richtung und die Robustheit der Verfahren bei unterschiedlichen Rauschleveln der Radarvariablen untersucht werden.

Um Daten für einzelne Radarstrahlen zu simulieren, werden randomisiert Vektoren mit DSD-Parametern erstellt und daraus über die Vorwärtsoperatoren Radarvariablen berechnet. Diese simulierten Radardaten werden mit additivem Rauschen versehen und bilden anschließend den Beobachtungsvektor im inversen Problem. Die Ergebnisse für die DSD-Parameter und die Regenrate können anschließend mit den ursprünglich erzeugten Werten verglichen werden.

An die simulierten Daten wird nicht der Anspruch gestellt, dass sie reale Regenereignisse möglichst genau repräsentieren können, sondern es werden nur Grundstrukturen von Regengefeldern modelliert, um die Dynamiken der Verfahren zu testen.

#### 5.1.1 Konstruktion der Testdaten

Zur Konstruktion der Testdaten werden Ergebnisse für die Verteilung der DSD-Parameter  $N_0$  und  $\Lambda$  des CGD-Modells aus Video-Disdrometer-Messungen zu Grunde gelegt, die in [Zha17, Kap. 7.2.2] dargestellt sind.

Es werden randomisiert für einen Radarstrahl mit  $m = 960$  Gates und einer radialen Auflösung von  $\Delta r = 0.25$  km Daten für die DSD-Parameter erzeugt. Dafür werden zufällig 2 bis 6 Zentren auf dem Radarstrahl ausgewählt, in deren Umfeld mehrere Gaußglocken mit unterschiedlicher Standardabweichung und unterschiedlicher Gewichtung überlagert werden. Die mehreren Clustergebiete stellen verschiedene Niederschlagsfelder dar und die einzelnen Gaußglocken sollen die Variabilität innerhalb eines Feldes approximieren. Diese Werte repräsentieren den Parameter  $\log_{10} N_0$ , der etwa im Bereich  $[0, 6]$  liegt. Daraus ergibt sich der Datenvektor für den Parameter  $N_0$ . Der Datenvektor für den Parameter  $\Lambda$  wird wiederum über einen aus [Zha17, Abb. 7.3] von Hand geschätzten linearen Zusammenhang zwischen  $\sqrt[4]{\Lambda}$  und  $\log_{10} N_0$  bestimmt und anschließend geglättet.

Aus den DSD-Parametern werden über die Vorwärtsoperatoren mit  $\gamma$  nach (13) die dämpfungsbeeinflusste Reflektivität  $Z_H$  und differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$  sowie die differentielle Phase  $\Phi_{dp}$  und die Regenrate  $R$  berechnet. Als gültige Bildpunkte werden alle Punkte mit  $Z_H > 3$  dBZ definiert.

Die künstlichen Radarvariablen werden mit additivem normalverteiltem Rauschen belegt. Als Grundannahme für die Standardabweichungen werden die Werte  $\sigma_{Z_H} = 1$  dBZ,  $\sigma_{Z_{DR}} = 0.2$  dBZ und  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 5^\circ$  aus [Mah+19] verwendet. In Abb. 15] ist ein Beispiel für einen simulierten Radarstrahl dargestellt, mit sowohl DSD-Parameter, Radarvariablen als auch Regenrate.

### 5.1.2 Vergleich der Regularisierer

#### Fragestellung

Für die beiden implementierten Verfahren `Hog07kh` und `CZX13kh` soll zum einen deren generelle Funktionalität zur Lösung des inversen Problems, zum anderen der Einfluss der verschiedenen in Abschnitt 4.4 diskutierten Regularisierer untersucht werden.

#### Vorgehen

Es werden 10 Radarstrahlen konstruiert, deren Radarvariablen für jeweils 5 verschiedene Seeds mit Rauschen der entsprechenden Standardabweichungen versehen werden. Der Vergleich der Regularisierungskonfigurationen wird bei einem Rauschen mit  $\sigma_{Z_H} = 1$  dBZ,  $\sigma_{Z_{DR}} = 0.2$  dBZ und  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 5^\circ$  durchgeführt.

Als Qualitätsmaß dient der RMSE (*root mean square error*) zwischen der simulierten Regenrate  $R_{sim}$  und der durch die Variationsmethode geschätzten Regenrate  $R_{var}$ :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\sum_{i=0}^m \frac{(R_{sim}(i) - R_{var}(i))^2}{m}}. \quad (92)$$

Der RMSE wird über alle Radarstrahlen und Rauschrealisierungen gemittelt, um zu einem skalaren Score für eine Konfiguration zu gelangen.

Für die hier dargestellte Ergebnisse werden für die `CZX13kh`-Methode die Optimierungsparameter als  $n_{iter} = 100$ ,  $\epsilon_g = 1$  und  $\epsilon_c = 0.0005$  gesetzt und der Zustandsvektor wie bei [CZX13] konstant mit  $N_0 = 1000$  und  $\Lambda = 5$  initialisiert. Für die `Hog07kh`-Methode sind  $n_{iter} = 20$ ,  $\epsilon_g = 20$  und  $\epsilon_c = 0.01$  für die Optimierung gewählt und die Parameter der MP-Beziehung werden als Initialisierung für den Zustandsvektor verwendet. Wie in [Hog07] empfohlen, werden die Stützstellen in einem Abstand von 3 km definiert, womit sich für eine Reichweite von 240 km die Anzahl der Stützpunkte als  $n = 80$  ergibt.

Als Regularisierer wird bei `Hog07kh`  $R_b$  aus Gleichung (83) mit verschiedenen Varianzen  $\sigma_b^2$  der a-priori-Annahme und einer Dekorrelationslänge von  $r_0 = 5$  km angewendet. Bei `CZX13kh` werden sowohl  $R_o$  und  $R_r$  aus den Gleichungen (90) und (91) als Regularisierer mit unterschiedlichen Gewichten  $\lambda$  getestet.



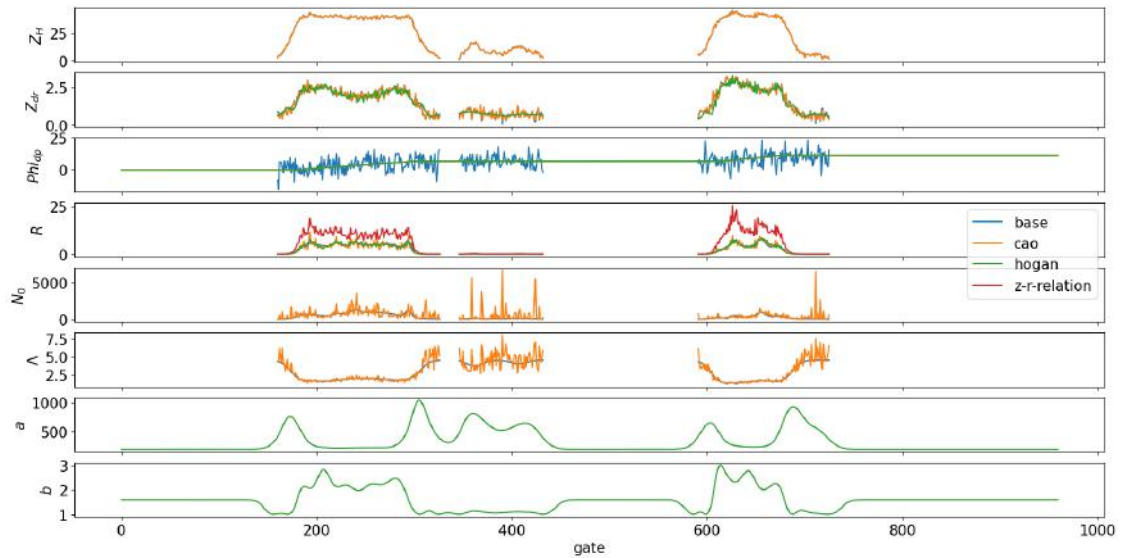


Abbildung 15: Anwendung der Variationsverfahren `Hog07kh` und `CZX13kh` ohne Regularisierung auf künstliche Beobachtungsdaten. Blau: künstliche Daten für die DSD-Parameter  $N_0$  und  $\Lambda$ , die Regenrate  $R$  und die Radarvariablen  $Z_H$ ,  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$ , die jeweils mit einem normalverteilten Rauschen mit  $\sigma_{Z_H} = 1$  dBZ,  $\sigma_{Z_{DR}} = 0.2$  dBZ und  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 5^\circ$  belegt sind. Die Radarvariablen bilden als Beobachtungsvektor die Eingabedaten des Variationsansatzes. Orange: Aus `Hog07kh` resultierende Zustandsparameter  $a$  und  $b$  sowie geschätzte Radarvariablen und Regenrate  $R$ . Grün: Aus `CZX13kh` resultierende Zustandsparameter  $N_0$  und  $\Lambda$  sowie geschätzte Radarvariablen und Regenrate  $R$ . Rot: Regenrate  $R$  aus MP-Beziehung. Beide Verfahren können die Radarvariablen und die Regenrate gut modellieren, anders als die MP-Beziehung, die große Unterschiede in der Regenrate zeigt.

## Ergebnisse

In Abb. 15] sind die Ergebnisse aus `Hog07kh` und `CZX13kh` für die Optimierung ohne Regularisierer dargestellt. Qualitativ kann die Beobachtung gemacht werden, dass die Schätzungen der beiden Methoden die künstlichen Radarvariablen und die Regenrate gut modellieren. Die Ergebnisse unterscheiden sich darin, dass sich das Rauschen aus den simulierten Beobachtungen bei der `Hog07kh`-Methode weniger stark in der Regenrate niederschlägt als bei der `CZX13kh`-Methode. Die über die MP-Beziehung berechnete Regenrate unterscheidet sich hingegen deutlich von der ursprünglichen Regenrate, an den meisten Stellen um etwa Faktor 2. Der mittlere Fehler über alle Radarstrahlen liegt bei der Anwendung der MP-Beziehung bei  $RMSE=68.65$  mm.

Die Ergebnisse für die Regularisierung bei `Hog07kh` sind in Tabelle 2a] dargestellt. Folgende Beobachtungen können gemacht werden:

- Die Verwendung der CGD für das Erstellen der Lookup-Tabelle zeigt bessere Ergebnisse als die NGD. Dies kann damit erklärt werden, dass die Testdaten unter

Tabelle 2: Mittelwert des RMSE zwischen konstruierter Regenrate und mittels Variationsmethode geschätzter Regenrate über mehrere Radarstrahlen und Rauschrealisierungen. Vergleich verschiedener Regularisierer. Bei **Hog07kh** hat der  $R_b$ -Regularisierer wenig Einfluss auf die Ergebnisse, bei stärkerer Gewichtung steigt der Fehler sogar an. Die CGD als DSD-Funktion liefert bessere Ergebnisse als die NGD. Bei **CZX13kh** zeigt der  $R_o$ -Regularisierer die besten Ergebnisse.

(a) **Hog07kh**: RMSE bei Anwendung des  $R_b$ -Regularisierers für verschiedene Varianzen  $\sigma_b^2$ . Es wird unterschieden zwischen der Optimierung der Parameter  $a$  und  $b$  oder nur von  $a$  mit festem  $b = 1.6$  sowie zwischen den DSD-Funktionen CGD und NGD.

Reg.	Fehler	RMSE [mm]		
		$a, b$		$a$
		CGD	NGD	CGD
ohne		10.89	17.01	11.89
$R_b$	10	10.89	-	-
	5	<b>10.83</b>	-	11.74
	1	10.86	16.96	11.87
	0.1	11.06	-	12.17
	0.01	12.33	18.44	-
	0.001	14.64	-	-

(b) **CZX13kh**: RMSE bei Anwendung des  $R_o$  und  $R_r$ -Regularisierers für verschiedene Gewichte  $\lambda$

Reg.	Gewicht	RMSE [mm]
ohne		17.72
$R_o$	0.1, 1, 0.1	15.87
	1, 10, 1	11.11
	2, 50, 2	<b>9.0</b>
	2, 200, 2	9.11
$R_r$	0.2	12.02
	1	11.72
	2	12.25
	5	13.81
	15	16.6

Verwendung der CG-DSD-Funktion erzeugt wurden.

- Der Regularisierer  $R_b$  hat kaum einen Einfluss auf den RMSE: Ohne Regularisierung gilt RMSE=10.89 mm und das beste Ergebnis wird für  $\sigma_b^2 = 5$  mit RMSE=10.83 mm erreicht. Im Gegenteil, je kleiner die Standardabweichung des Vorwissens gewählt wird, also je höher es gewichtet wird, desto größer wird auch der RMSE. Ein Grund für den geringen Einfluss der Regularisierung ist sicherlich, dass der Zustandsvektor durch die Interpolation bereits stetig ist und das Rauschen in der resultierenden Regenrate aus der  $Z_H$ -Messung stammt, die nicht beeinflusst werden kann.
- Bei der Optimierung der beiden Parameter  $a$  und  $b$  ist der RMSE etwas geringer als bei der Fixierung von  $b$ .

Die Ergebnisse der **CZX13kh**-Methode für unterschiedliche Gewichtungsfaktoren  $\lambda$  sind in Tabelle 2b) dargestellt. Beide Regularisierer können den RMSE verringern, das beste Ergebnis ergibt sich für  $R_o$  mit Gewichten von  $\lambda_{Z_h} = 2$ ,  $\lambda_{Z_{dr}} = 50$  und  $\lambda_{\Phi_{dp}} = 2$  mit RMSE=9.0 mm. Das Gewicht wird für  $Z_{dr}$  am größten gewählt, da das Rauschen dieser Radarvariable den größten Einfluss auf das Ergebnis zu haben scheint.

**Fazit**

Die beiden Variationsmethoden zeigen grundsätzlich die Fähigkeit, Zustandsvektoren zu finden, die die simulierten Radarvariablen über das Vorwärtsmodell modellieren. Diese Fähigkeit muss allerdings noch an realen Radarmessungen verifiziert werden.

Außerdem zeigt sich, dass die MP-Beziehung die durch die DSD-Parameter simulierten Niederschlagsverhältnisse nur sehr ungenügend abbilden kann und deutlich abweichende Regenraten produziert.

Für die **Hog07kh**-Methode scheint der Regularisierer  $R_b$  in radiale Richtung die Ergebnisse nur geringfügig zu beeinflussen. In den folgenden Experimenten mit realen Radardaten wird er dennoch mit dem in [Hog07] vorgeschlagenen Fehler  $\sigma_b^2 = 1$  im Vergleich zur Optimierung ohne Regularisierungsterm in radialer Richtung getestet.

Für die **CZX13kh**-Methode zeigen die beide Regularisierer  $R_o$  und  $R_r$  gute Ergebnisse und werden in folgenden Experimenten verwendet. Die Gewichte müssen unter Umständen noch angepasst werden, um der Situation bei realen Radardaten gerecht zu werden.

**5.1.3 Untersuchung der Robustheit unter Rauscheinfluss****Fragestellung**

In diesem Experiment soll die Robustheit der Verfahren **Hog07kh** und **CZX13kh** bei verschiedenen Rauschleveln der Radarvariablen getestet werden.

**Vorgehen**

Es wird die gleiche Auswertungsmethode über den RMSE und die gleiche Konfiguration der Verfahren wie im Experiment aus Abschnitt 5.1.2 verwendet.

Bei **CZX13kh** wird  $R_o$  mit den Gewichten  $w_{Z_h} = 2$ ,  $w_{Z_{dr}} = 50$  und  $w_{\Phi_{dp}} = 2$  verwendet, während **Hog07kh** jeweils für die Optimierung von  $a$  und  $b$  und für die Optimierung nur von  $a$  mit CGD als DSD-Funktion und ohne Regularisierung angewandt wird.

Für die Sensitivitätsanalyse wird von den Standardabweichungen  $\sigma_{Z_H} = 1$  dBZ,  $\sigma_{Z_{DR}} = 0.2$  dBZ und  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 5^\circ$  immer jeweils eine variiert und anschließend der mittlere RMSE zwischen simulierter und geschätzter Regenrate bestimmt, um die Güte des Ergebnisses zu bewerten.

**Ergebnisse**

Die Ergebnisse für die unterschiedlichen Rauschlevel der Radarvariablen sind in Abbildung 16 dargestellt, die Werte sind zusätzlich in Tabelle A1] im Anhang aufgeführt.

Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass eine Änderung des Rauschlevels in der differentiellen Phase  $\Phi_{dp}$  kaum Auswirkungen auf die Stabilität und die Leistung der beiden Verfahren hat. Dies weist darauf hin, dass in diesem Anwendungsfall kaum Informationen aus der Phase extrahiert werden.

Das Ansteigen des Rauschlevels bei der differentiellen Reflektivität  $Z_{dr}$  führt bei **CZX13kh** zunächst zu einem abrupten Anstieg des RMSE, danach bleibt er annähernd konstant. Bei **Hog07kh** mit optimierten  $a$  und  $b$  steigt der RMSE kontinuierlich bis zu

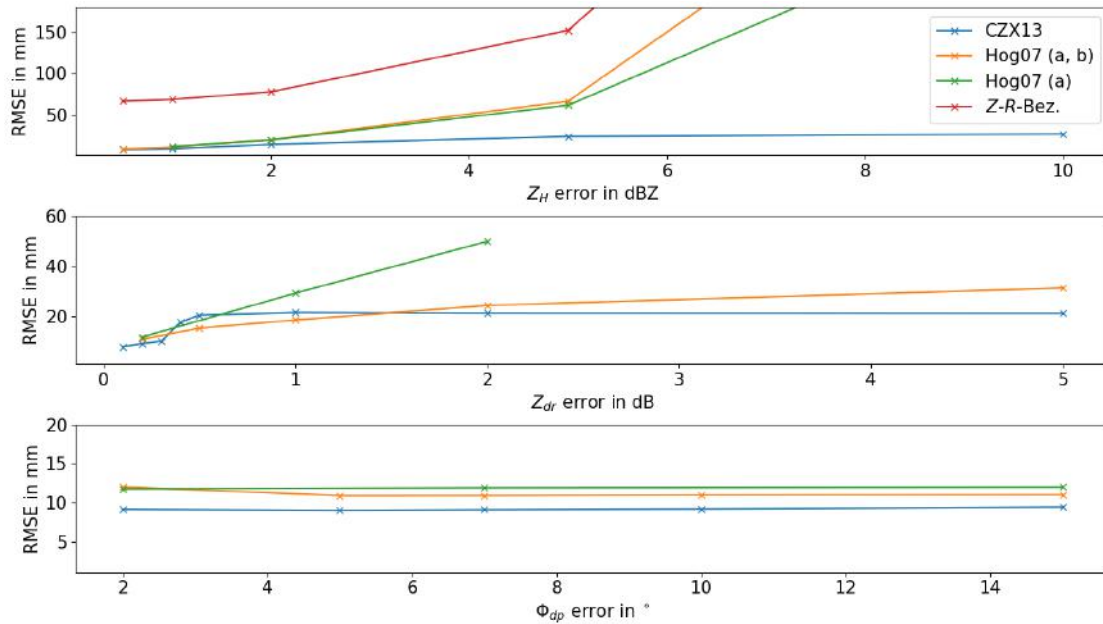


Abbildung 16: Gemittelter RMSE zwischen konstruierter Regenrate und mittels Variationsmethode geschätzter Regenrate über mehrere Radarstrahlen und Rauschrealisierungen in Abhängigkeit von verschiedenen Rauschleveln der Radarvariablen. Blau: CZX13kh, Orange: Hog07kh mit optimiertem  $a$  und  $b$ , Grün: Hog07kh mit optimiertem  $a$  und festem  $b = 1.6$ , Rot: MP-Beziehung. Alle Methoden reagieren vor allem empfindlich auf einen steigenden Fehler in der  $Z_H$ -Messung. Das Rauschen in der  $\Phi_{dp}$ -Messung beeinflusst die Ergebnisse kaum.

einem  $\text{RMSE} = 31.3 \text{ mm}$  bei  $\sigma_{Z_{DR}} = 5 \text{ dBZ}$  an. Bei festem  $b$  ist der RMSE bei höherem Rauschen in  $Z_{dr}$  deutlich höher, bei  $\sigma_{Z_{DR}} = 2 \text{ dBZ}$  liegt er bereits bei  $49.93 \text{ mm}$ .

Auf ein höheres Rauschlevel bei der Reflektivität  $Z_H$  reagieren beide Verfahren am empfindlichsten. Während jedoch bei CZX13kh bei einer Standardabweichung von  $\sigma_{Z_H} = 10 \text{ dBZ}$  der RMSE lediglich auf knapp über  $28 \text{ mm}$  steigt, wird der Fehler bei Hog07kh schnell groß. Bereits bei einem Rauschlevel von  $\sigma_{Z_H} = 5 \text{ dBZ}$  ergibt sich ein RMSE von über  $60 \text{ mm}$ , welcher danach schnell ansteigt, sowohl für variables  $a$  und  $b$  als auch für variables  $a$  und festes  $b$ .

### Fazit

Die Sensitivitätsanalyse deutet darauf hin, dass die Leistung der Verfahren von der Datenqualität der Radarvariablen abhängt. Besonders bei der Hog07kh-Methode steigt der Fehler in den Ergebnissen mit höheren Fehlern in der Reflektivität  $Z_H$  stark an. Das Rauschen in der differentiellen Phase  $\Phi_{dp}$  hat in diesem Szenario wenig Einfluss auf die Güte der Resultate. Die MP-Beziehung zeigt auch stark ansteigende Abweichungen bei steigendem Fehler der  $Z_H$ -Messung. Die CZX13kh-Methode reagiert insgesamt weniger empfindlich auf Rauschen als die Hog07kh-Methode.

## 5.2 Vergleich mit Methode aus der Literatur

### Fragestellung

Für diese Arbeit wurde die Methode aus [Hog07] mit einigen Änderungen und Anpassungsmöglichkeiten implementiert, genannt **Hog07kh**. In diesem Experiment wird untersucht, ob bei einer ähnlichen Konfiguration der Methoden die Ergebnisse vergleichbar sind.

### Vorgehen

Die in [Hog07] veröffentlichten Ergebnisse wurden mit dem Quellcode aus [Hog09] erzeugt. Da für diese Arbeit nur Daten eines Radarsystems mit  $f = 2.8$  GHz vorliegen und die Implementierung [Hog09] vorberechnete Tabellen der Streuungsamplituden nur für eine Frequenz  $f = 3$  GHz enthält, kann der Code aus der Literatur nicht auf eigene Daten angewandt werden. Stattdessen wird die eigene Implementierung an einem Beispielbild des polarimetrischen Radargeräts in Chilbolton aus der Veröffentlichung [Hog07, Abb. 4] getestet.

Die [Hog09]-Implementierung wird mit den in [Hog07, Kap. 4.a] beschriebenen Einstellungen ausgeführt. Für die **Hog07kh**-Methode werden folgende Aspekte aus dem Experiment in [Hog07] übernommen: Sie wird mit der NGD als DSD-Funktion und Gleichung (14) als Achsenverhältnisfunktion  $\gamma$  ausgeführt. Es werden  $b = 1.5$  als Parameter der  $Z$ - $R$ -Beziehung und  $\sigma_{Z_{DR}} = 0.2$  dBZ und  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 3^\circ$  als über das Radarbild konstante Standardabweichungen festgelegt. Für jeden Radarstrahl einzeln wird der Regularisierer  $R_b$  (83) mit  $\sigma_b^2 = 1$  und  $r_0 = 5$  km angewendet.

In folgenden Punkten unterscheidet sich der **Hog07kh**-Durchlauf von den Angaben aus [Hog07]:

- Statt des iterativen Verfahrens zur Glättung in Azimutrichtung aus [Hog07, Kap. 2.e] wird der Regularisierer  $R_s$  (89) mit  $\lambda = 0.0002$  eingesetzt.
- Für Bildpunkte, bei denen für eine der Messgrößen  $Z_H$ ,  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$  keine Werte vorliegen, wird kein Ergebnis berechnet.
- Statt eines Temperaturfeldes mit nach außen abfallenden Temperaturen wird eine konstante Temperatur  $T = 10^\circ\text{C}$  verwendet.
- Die Optimierung wird mit dem L-BFGS- statt mit dem Gauss-Newton-Verfahren durchgeführt. Die Optimierungsparameter sind  $n_{\text{iter}} = 30$ ,  $\epsilon_g = 100$  und  $\epsilon_c = 0.001$ .

Zusätzlich wird ein Durchlauf mit verdreifachter Standardabweichung für die  $\Phi_{dp}$ -Messung, also  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 9^\circ$ , durchgeführt. Die Ergebnisse werden geplottet und qualitativ verglichen.

### Ergebnisse

Für einen Sektor eines Radarbildes sind vorkorrigierte Messdaten  $Z_H$ ,  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$  in Abb. 17a, 17c und 17d dargestellt. Sie weisen auf ein stratiformes Niederschlagsereignis mit einem konvektiven Gebiet mit hoher Intensität bei einer Entfernung von etwa

35 km hin. Die Berechnung der Regenrate mit der MP-Beziehung ergibt Regenraten bis 120 mm/h (Abb. 17b).

Die Ergebnisse der Implementierungen [Hog09] und Hog07kh sind in ebenfalls in Abbildung 17 zu sehen. Dargestellt ist der Parameter  $a$  und die aus den Vorwärtsoperatoren resultierenden Werte für  $R$ ,  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$ .

Zunächst kann festgestellt werden, dass der Regularisierer  $R_s$  einen ähnlichen Grad der Glättung des Parameters  $a$  in azimuthaler Richtung wie das iterative Verfahren aus [Hog07, Kap. 2.e] erzielt.

Auffällig ist, dass in dem Bereich mit den höchsten Reflektivitätswerten bei Hog07kh sehr niedrige Werte für  $a$  resultieren (Abb. 17i) und die Struktur der  $Z_{dr}$ -Messung durch die Schätzung des Vorwärtsoperators nicht abgebildet wird (Abb. 17k). Die in diesem Ort entstehende Phasenverschiebung  $\Phi_{dp}$  fällt auch geringer und die Regenrate  $R$  deutlich höher als bei [Hog09] aus (Abb. 17j und 17l).

Der Grund für den Unterschied kann sein, dass die dem Vorwärtsmodell zugrunde liegende LUT aus [Hog09] wie in Abschnitt 4.3 beschrieben nicht reproduziert werden kann. Die eigene Berechnung der LUT ergibt geringere Werte für die spezifische differentielle Phase  $K_{dp}$  bei gleichen Werten für  $a$ .

Wird die Standardabweichung von  $\Phi_{dp}$  auf  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 9^\circ$  erhöht, wird der Unterschied zur  $\Phi_{dp}$ -Messung im Datenterm (52) geringer gewichtet. Damit liegt der Fokus auf der Angleichung der  $Z_{dr}$ -Messung, was auch im Ergebnis (Abb. 17o) zu erkennen ist. Auch die Inhomogenität im Resultat für  $a$  in dem Bereich der hohen Intensität ist in Abb. 17m ausgeglichen.

Die Verwendung einer konstanten Temperatur anstatt eines Temperaturfeldes hat keinen erkennbaren Einfluss auf die Ergebnisse.

### Fazit

Grundsätzlich kann festgestellt werden, dass [Hog09] und Hog07kh die Messungen  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$  modellieren können, ohne dabei Rauschen aus den Messungen zu reproduzieren. Es zeigen sich allerdings teilweise Unterschiede zwischen der eigenen Implementierung und der Methode aus der Literatur bei ähnlicher Konfiguration.

In der Veröffentlichung [Hog07] werden die Ergebnisse nur auf ihre Struktur untersucht und keine Aussagen zu der Nähe zu tatsächlichen Niederschlagsmengen gemacht. Es kann also nicht bewertet werden, wie gut die jeweiligen Resultate für die Regenrate  $R$  sind.

In den folgenden Experimenten wird die Standardabweichung stets für jeden Bildpunkt aus dem kopolaren Korrelationskoeffizienten  $\rho_{hv}$  bestimmt anstatt einen konstanten Wert für das ganze Bild anzunehmen. Damit findet eine explizitere Gewichtung der Beobachtungen im Datenterm der Zielfunktion statt, was eventuell Inhomogenitäten wie in diesem Beispiel abschwächen kann.

### 5.3 Anwendung auf gemessene Radardaten

Der folgende Teil der Arbeit entstand im Rahmen des Projektes *HII composite of 9 radars with forecast*, das von der hydro & meteo GmbH für das thailändische Hydro-Informatics Institute mit Daten des Royal Rainmaking Department durchgeführt wird.



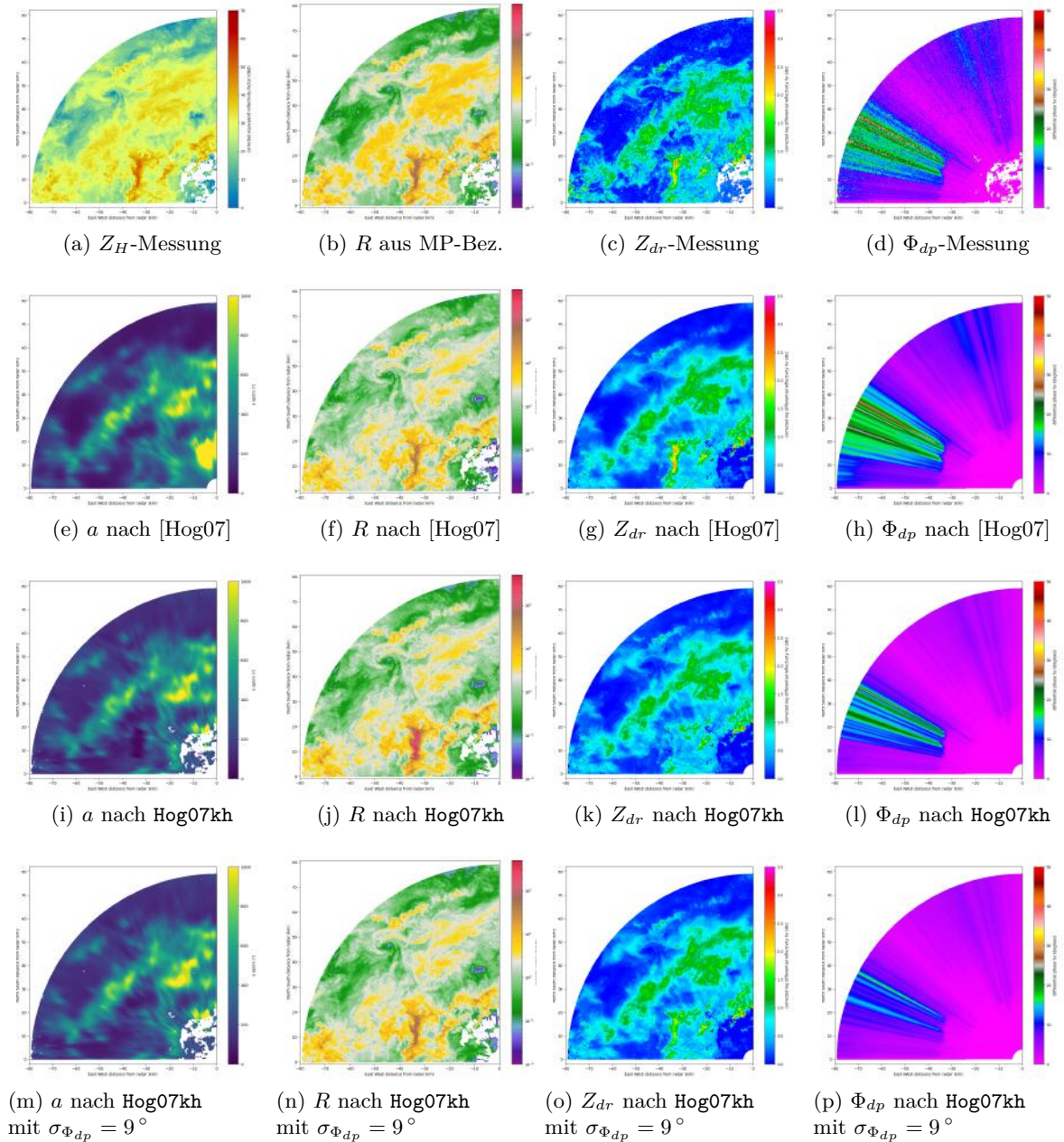


Abbildung 17: Vergleich der Hog07kh-Methode mit der Implementierung aus [Hog09] anhand von Messdaten für die Radarvariablen  $Z_H$ ,  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$ . Dargestellt sind die Ergebnisse für den Parameter  $a$ , die Regenrate  $R$  und die Radarvariablen  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$ . Die Resultate der Variationsmethoden ähneln sich bis auf den Bereich mit hoher Reflektivitätsintensität. Die Differenzen könnten auf die nicht reproduzierbare LUT des Vorwärtsmodells zurückgehen. Die Erhöhung der Standardabweichung  $\sigma_{\Phi_{dp}}$  (siehe letzte Zeile) nähert die Werte an und verbessert die Modellierung von  $Z_{dr}$ . Die Regenraten aus dem Variationsansatz unterscheiden sich von dem Resultat der MP-Beziehung.

Die Variationsverfahren werden anhand von realen Radarmessungen evaluiert. Dazu werden Daten eines S-Band-Radargeräts und Regenschreibern aus Thailand verwendet. Im Gegensatz zu der Studie [Fig+10] mit C-Band-Daten, sind die hier verwendeten Daten aufgrund der niedrigeren Frequenz weniger von Dämpfungseffekten beeinflusst, weshalb eine bessere Leistung der Verfahren erhofft wird.

### 5.3.1 Beschreibung der Daten

Es liegen aktuelle Radardaten für die Jahre 2019 und 2020 für mehrere Radarstandorte in Thailand im *Universal Format* [Bar80] vor. Für die Evaluation werden Daten des Radars am Standort Omkoi im Nordwesten des Landes verwendet. Das Radar wird mit einer Frequenz von  $f = 2.8$  GHz bzw. einer Wellenlänge von  $\lambda = 107.03$  mm betrieben, es handelt sich also um ein S-Band-Radar. Die Radardaten haben eine zeitliche Auflösung von sechs Minuten, sodass es jeweils für eine Stunde 10 Radarbilder gibt. Die Dateien enthalten folgende Datensätze:

- Vorkorrigierte Reflektivität  $Z_H$ ,
- Vorkorrigierte differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$ ,
- Differentielle Phase  $\Phi_{dp}$ ,
- Kopolare Korrelationskoeffizient  $\rho_{hv}$ ,
- Spektrumsbreite  $W$ .

Die Daten wurden teilweise direkt am Radargerät korrigiert, etwa von Bodenechos befreit, dazu liegt jedoch keine Dokumentation vor.

Jeder Datensatz hat die Dimension  $s \times r \times m$ , wobei  $s = 14$  die Anzahl der Sweeps,  $r = 341$  bzw.  $r = 421$  die Anzahl der Strahlen und  $m = 960$  die Anzahl der Gates in einem Radarstrahl ist. Die Anzahl der Strahlen ist nicht einheitlich und nimmt einen der beiden genannten Werte an. Die Evaluation wird für die unterste Elevation mit  $\theta = 0.48^\circ$  durchgeführt, weshalb sich die Größe der Datensätze auf  $341 \times 960$  bzw.  $421 \times 960$  reduziert. Die Reichweite des Radars beträgt 240 km. Die azimutale Auflösung ist also  $\Delta\alpha = 1.139^\circ$  bzw.  $\Delta\alpha = 0.855^\circ$  und die radiale Auflösung  $\Delta r = 0.25$  km. Die Scanrate des Radarsystems ist  $G = 17^\circ/\text{s}$ , es braucht also für einen Sweep etwa 20 s.

Es liegen aktuelle Regenschreiberdaten von Anfang 2018 bis April 2020 für 600 Regenschreiber in Thailand in stündlicher Auflösung vor. 116 Regenschreiber liegen dabei im 240 km-Radius von Omkoi-Radar. Für die Evaluation wird allerdings ein Radius von 180 km betrachtet, um die in 2.1.2 beschriebene Probleme der Messhöhe des Radars zu umgehen und einen validen Vergleich mit Regenschreibern zu ermöglichen.

Für die Evaluation werden die Ergebnisse aus den Radardaten mit Regenschreiberdaten für Regenereignisse an den Tagen 21.05.2019 und 30.08.2019 verglichen, für die in Abb. 18] die auf der MP-Beziehung beruhenden Tagessummenbilder der Niederschlagsmenge dargestellt sind. Dort sind außerdem die Standorte der Regenschreiber verzeichnet.



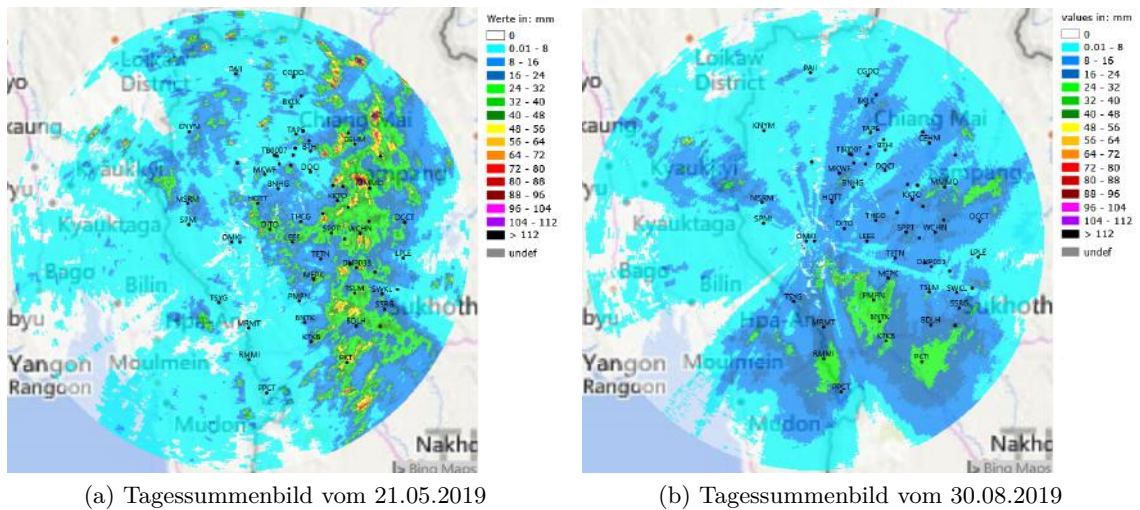


Abbildung 18: Über einen Tag summierte geschätzte Regenmenge, die Regenrate wurde über die MP-Beziehung bestimmt. Dargestellt sind außerdem RS-Standorte im 180 km Radius. Bilder erzeugt mit ScoutView der hydro & meteo GmbH.

In den Tagessummenbildern, vor allem in Abb. 18b, sind Strahlblockierungen zu erkennen. In diesen Bereichen werden die Niederschlagsmengen vom Radar systematisch unterschätzt. Daher werden bei der Validierung diejenigen Regenschreiber ignoriert, die sich in den betroffenen Gebieten befinden. Nachdem auch diejenigen Regenschreiber ausgeschlossen wurden, die für die betrachteten Zeiträume nur lückenhafte Daten ausweisen, bleiben 32 RS-Stationen für die Auswertung.

Die Unsicherheiten der Messungen werden anhand der Gleichungen (77) bis (79) bestimmt. Für den 21.05.2019 liegen die mittleren Standardabweichungen bei  $\sigma_{Z_H} = 1.43$  dBZ,  $\sigma_{Z_{dr}} = 1.24$  dBZ und  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 15.39^\circ$ , für den 30.08.2019 bei  $\sigma_{Z_H} = 1.48$  dBZ,  $\sigma_{Z_{dr}} = 1.27$  dBZ und  $\sigma_{\Phi_{dp}} = 16.6^\circ$ . In Abbildung 19 sind Histogramme für beiden Tage mit den Anteilen der gesamten Bildpunkte mit entsprechenden Standardabweichungen für die drei gemessenen Radarvariablen dargestellt.

Unter der Annahme, dass die Ergebnisse der Robustheitsanalyse aus Abschnitt 5.1.3 auch bei realen Radardaten ähnliche Gültigkeit haben, liegen die Varianzen der Messungen größtenteils in nicht-kritischen Bereichen. Die Standardabweichungen der  $Z_H$ -Messung sind niedriger als die Werte, bei denen die Leistung von Hog07kh deutlich abfiel. Die  $\Phi_{dp}$ -Messungen weisen an einigen Orten sehr hohe Unsicherheiten von  $> 20^\circ$  auf und erhalten entsprechend an diesen Stellen kaum Gewicht im Datenterm (52). Die Messunsicherheiten sollten aber grundsätzlich eine erfolgreiche Anwendung der Variationsmethoden nicht verhindern.

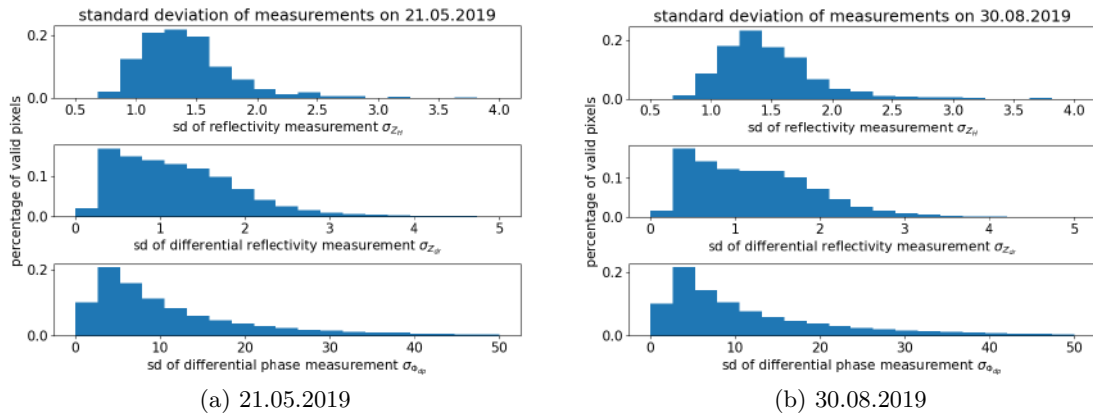


Abbildung 19: Standardabweichungen der Messungen  $Z_H$ ,  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$  für Tage 21.05.2019 und 30.08.2019. Dargestellt ist jeweils der Anteil der Bildpunkte, für die eine Standardabweichung  $\sigma$  im entsprechenden Intervall berechnet wurde. Berechnung über Gleichungen (77) bis (79) aus dem kopolaren Korrelationskoeffizienten  $\rho_{hv}$  und der Spektrumsbreite  $W$ . Die Standardabweichungen dienen in der Zielfunktion der Variationsmethode der Gewichtung der Messungen. Werden die Ergebnisse aus der Robustheitsanalyse aus Abschnitt 5.1.3 als Referenz angenommen, liegen die Werte größtenteils in nicht-kritischen Bereichen.

### 5.3.2 Einzelnes Radarbild

#### Fragestellung

In diesem Experiment wird die Funktionalität des Variationsansatzes bei der Anwendung auf ein reales Radarbild geprüft. Die eigenen Implementierungen `Hog07kh` und `CZX13kh` können in verschiedenen Konfigurationen angewandt werden. Hier wird deshalb außerdem untersucht, welche qualitativen und strukturellen Unterschiede in den Ergebnissen durch die Wahl der Variante, DSD-Funktion, Achsenverhältnisfunktion und Regularisierer erzeugt werden.

#### Vorgehen

Für das Experiment wird ein einzelnes Radarbild vom 30.08.2019 14:06 Uhr betrachtet. Die Messungen der Radarvariablen sind in Abb. 20 dargestellt. Das Bild stellt eine Momentanmessung eines großflächigen stratiformen Niederschlagsereignisses mit einigen konvektiven Zellen dar. Die konvektiven Zellen zeichnen sich durch hohe  $Z_H$ -Intensität aus.

Für die `Hog07kh`-Methode werden die Unterschiede zwischen der NG- und CG-DSD-Funktion, den Achsenverhältnisfunktionen (13) und (14) und der Wahl des Parameters  $b$  als fester Wert oder Zustandsparameter untersucht. Außerdem wird der Einfluss der Regularisierer  $R_b$  und  $R_s$  getestet. Der Regularisierer  $R_b$  wird wie in [Hog07] mit  $\sigma_b^2 = 1$  und  $R_s$  mit den Gewichten  $\lambda_a = 0.0001$  und  $\lambda_b = 0.01$  angewandt.

Für die `CZX13kh`-Methode wird der Einfluss der Achsenverhältnisfunktion  $\gamma$  und der

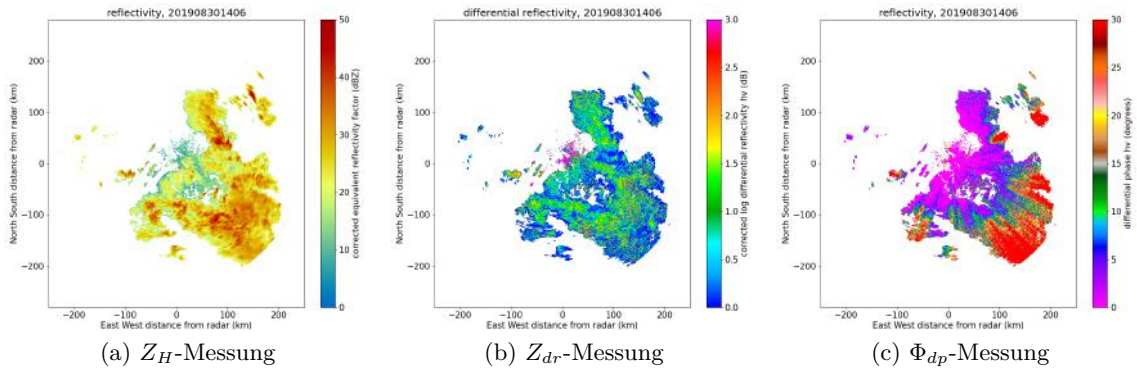


Abbildung 20: Messwerte der Reflektivität  $Z_h$ , der differentiellen Reflektivität  $Z_{dr}$  und der differentiellen Phase  $\Phi_{dp}$  des Omkoi-Radars am 30.08.2019 um 14:06 Uhr.

Regularisierer  $R_o$  und  $R_r$  untersucht. Die Regularisierung mit  $R_o$  wird mit den Gewichten  $\lambda_{Z_H} = 1$ ,  $\lambda_{Z_{dr}} = 10$  und  $\lambda_{\Phi_{dp}} = 1$  in radialer und  $\lambda_{Z_H} = 0.1$ ,  $\lambda_{Z_{dr}} = 1$  und  $\lambda_{\Phi_{dp}} = 0.1$  in Azimuthrichtung durchgeführt. Für  $R_r$  wird  $\lambda = 1$  in radialer und  $\lambda = 0.1$  in azimuthaler Richtung gewählt. In Azimuthrichtung werden die Gewichte niedriger gesetzt, da die Radarvolumina in diese Richtung ab einer Entfernung von 13 km breiter als in radiale Richtung ( $\Delta r = 0.25$  km) sind, mit wachsender Entfernung noch breiter werden und somit in diese Richtung bereits innerhalb eines Volumens stärker gemittelt wird.

### Ergebnisse

Für die Ergebnisse aus der Hog07kh-Methode können folgende Beobachtungen gemacht werden:

- Weder die DSD-Funktion noch der Einsatz des  $R_b$ -Regularisierers hat großen Einfluss auf die Schätzungen.
- Der Regularisierer  $R_s$  erreicht eine plausible Glättung in Azimuthrichtung.
- Die Ergebnisse für die Parameter  $a$  und  $b$  unterscheiden sich je nach verwendeter Achsenverhältnissfunktion bei ansonsten gleicher Konfiguration stark (Abb. 21) und damit variieren auch die resultierenden Regenraten. Der Maximalwert von  $R$  mit  $\gamma$  nach (13) liegt bei  $R = 480$  mm/h, mit  $\gamma$  nach (14) hingegen bei  $R = 220$  mm/h.
- Die Messung der differentiellen Reflektivität kann durch die Schätzung aus dem Vorwärtsmodell nur bedingt modelliert werden. Ähnlich wie im vorherigen Experiment aus Abschnitt 5.2 fallen besonders Bereiche mit hoher  $Z_H$ -Intensität dadurch auf, dass für  $Z_{dr}$  dort im Vergleich zur Messung deutlich geringere Werte geschätzt werden. Dieser Effekt ist stärker ausgeprägt, wenn statt  $a$  beide Parameter  $a$  und  $b$  optimiert werden (Abb. 22).
- Die Schätzung der differentiellen Phase  $\Phi_{dp}$  kann die Grundstruktur der Messung

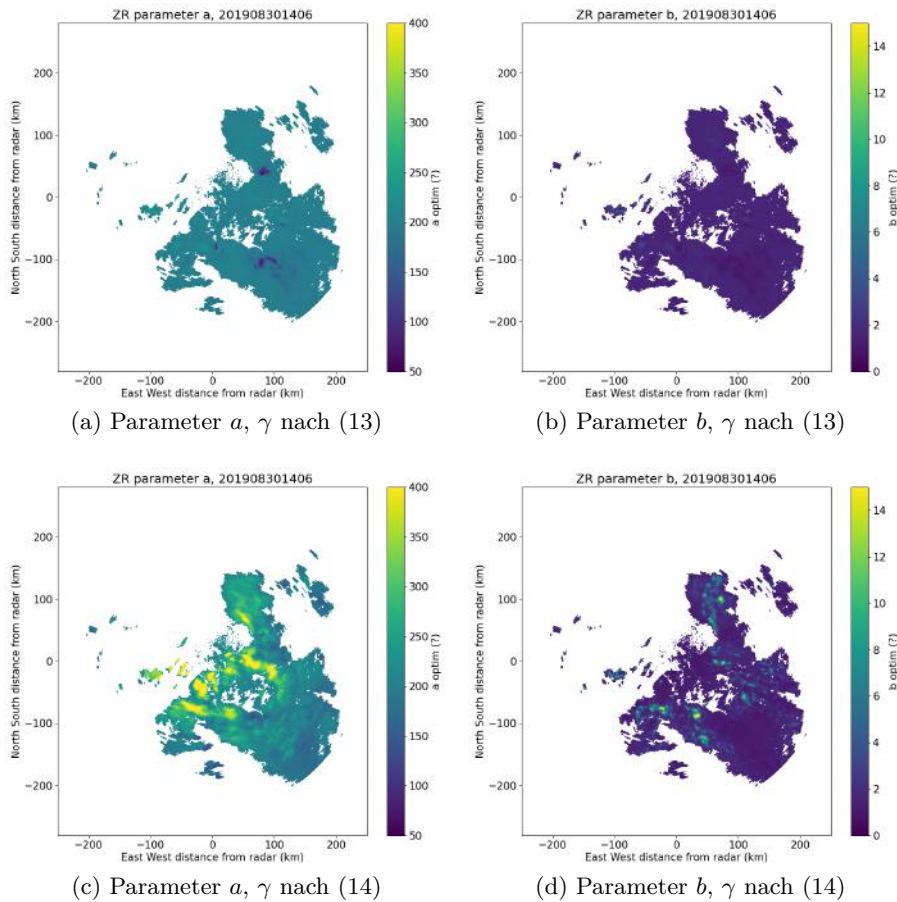


Abbildung 21: Ergebnisse für die Parameter  $a$  und  $b$  aus Hog07kh-Methode bei unterschiedlichen Achsenverhältnisfunktionen  $\gamma$ . Radarbild des Omkoi-Radars am 30.08.2019 um 14:06 Uhr. Es zeigen sich unerwartet hohe Unterschiede.

abbilden, aber sie neigt zur Unterschätzung und hat eine deutlich geringere Auflösung (Abb. 23).

Für die Ergebnisse aus der CZX13kh-Methode können folgende Beobachtungen gemacht werden:

- Die Achsenverhältnisfunktion  $\gamma$  hat kaum Einfluss auf die Ergebnisse.
- Im Vergleich mit den Beobachtungen zeigt sich, dass die Reflektivität  $Z_H$  gut modelliert wird.
- Die differentielle Reflektivität  $Z_{dr}$  hingegen wird in nahezu allen Bereichen um 1-2dBZ überschätzt. Dies ist bei der Verwendung von  $R_r$  deutlicher als bei der von  $R_o$ . Die Struktur der Intensitätsverteilung ähnelt insgesamt eher der der  $Z_H$ -Messung (Abb. 24).

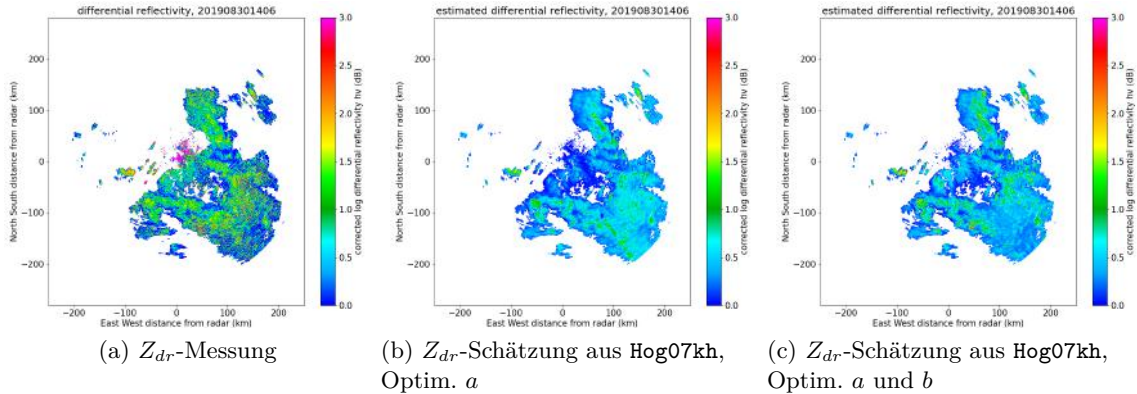


Abbildung 22:  $Z_{dr}$ -Messung und Schätzung aus Hog07kh für das Radarbild des Omkoi-Radars am 30.08.2019 um 14:06 Uhr. Es zeigt sich eine leichte Unterschätzung der differentiellen Reflektivität  $Z_{dr}$ , die bei der Optimierung beider Parameter  $a$  und  $b$  deutlicher ausfällt als bei festem  $b$ .

- Die Schätzungen der differentiellen Phase  $\Phi_{dp}$  sind wie bei Hog07kh eher geringer als die Messung (Abb. 23).
- Die Anwendung von  $R_o$  bei CXZ13kh kann Ausreißer in der resultierenden Regenrate nicht verhindern. Hier könnte sich eine anschließende Anwendung eines Median-Filters anbieten. Der Regularisierer  $R_r$  schafft es besser, die Regenrate zu glätten, birgt dafür aber die Gefahr, zu viel Struktur zu eliminieren (Abb. 25).

Im Vergleich zur MP-Beziehung ergeben sich durch die Hog07kh-Methode deutlich höhere Regenraten, die Werte unterscheiden sich um bis zu einem Faktor 3 (Abb. 26). Die resultierende Regenrate bei CZX13kh mit  $R_r$ -Regularisierer ist hingegen in den meisten Gebieten geringer als bei der MP-Schätzung. In konvektiven Bereichen wird die Regenrate jedoch höher geschätzt (Abb. 26).

### Fazit

Die Variabilität der Hog07kh-Ergebnisse in Abhängigkeit von der Achsenverhältnisfunktion  $\gamma$  macht die Anwendung der Methode schwierig. Für die verwendeten  $\gamma(D)$ -Zusammenhänge wurde anhand von Messungen bestätigt, dass sie die Form von Regentropfen approximativ abbilden können [BZV02; ABL99; God+95], sodass der Unterschied in den Ergebnissen nicht in der Größenordnung von Faktor 2 bei der Regenrate  $R$  sein sollte.

Dass bei Hog07kh die  $Z_{dr}$ -Werte in einigen Bereichen mit hoher Reflektivität nicht reproduziert werden können, trat bereits im vorherigen Experiment auf. Dort konnten plausiblere Ergebnisse durch eine höher angenommene Standardabweichung für  $\Phi_{dp}$  erzielt werden. Bei der Hog07kh-Implementierung werden die Standardabweichungen wie in [Fig+10] aus  $\rho_{hv}$  berechnet. In der Veröffentlichung [Fig+10] wird nach der Evaluation des Variationsansatzes ebenfalls angemerkt, dass die Radarvariablen teilweise in den



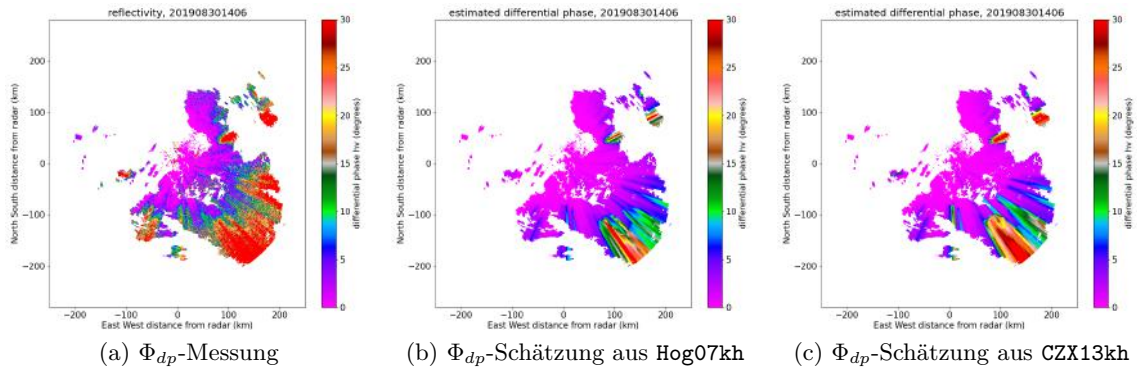


Abbildung 23:  $\Phi_{dp}$ -Messung und Schätzung aus Hog07kh und CZX13kh. Radarbild des Omkoi-Radars am 30.08.2019 um 14:06 Uhr. Die differentielle Phase wird leicht unterschätzt und die Schätzung ist gröber aufgelöst.

angenommenen Toleranzen nicht nachgebildet werden können, und eine Relaxation der Standardabweichungen empfohlen.

In diesem Experiment kann kein Vorteil durch die zusätzliche Optimierung des Parameters  $b$  erkannt werden. Auffällig ist, dass in den Ergebnissen teilweise Werte von  $b > 20$  vorkommen, wohingegen sich  $b$  bei empirisch ermittelten Zusammenhängen, wie in Abschnitt 2.1.3 aufgeführt, nur im Bereich zwischen 1 und 3 bewegt.

Die CZX13kh-Methode kann die  $Z_H$ -Messung sehr genau modellieren, die beiden anderen Radarvariablen allerdings nur eingeschränkt. Um mehr Informationen aus  $Z_{dr}$  und  $\Phi_{dp}$  zu extrahieren, könnte es sich lohnen, die Gewichtung im Datenterm anzupassen.

Zwischen MP-Beziehung, Hog07kh und CZX13kh gibt es große Unterschiede in der resultierenden Regenrate  $R$ . Da die MP-Beziehung für stratiformen Niederschlag entwickelt wurde und in konvektiven Bereichen zur Unterschätzung neigt, sind die höheren Werte aus den Variationsansätzen auf den ersten Blick plausibel.

Für ein Radarbild, das eine Momentanmessung darstellt, kann kein Vergleich mit Regenschreibern angestellt werden. Daher werden im nächsten Experiment für den Verlauf eines Tages die Niederschlagsmengen aus den genannten Methoden mit den Messungen von Regenschreibern verglichen, um zu bewerten, wie gut sie die Wirklichkeit widerspiegeln.

### 5.3.3 Serie von Radarbildern

#### Fragestellung

Die Ergebnisse aus den Variationsansätzen sollen auf ihre Übereinstimmung mit am Boden gemessenen Niederschlagsmengen geprüft werden. Als *ground truth* werden dabei Regenschreibermessungen von 32 Stationen im Umfeld des Radargeräts für zwei einzelne Tage herangezogen. Aus der Serie der Radarbilder für diese Tage werden Zeitreihen für die RS-Standorte extrahiert und mit den RS-Zeitreihen verglichen. Als Referenzmethoden dient die MP-Beziehung und ein polarimetrischer Regenschätzer.

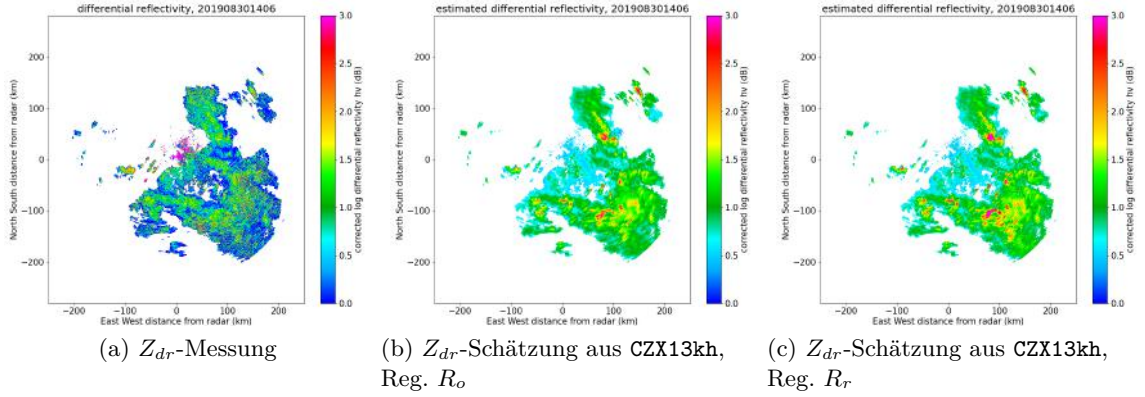


Abbildung 24:  $Z_{dr}$ -Messung und Schätzung aus CZX13kh. Radarbild des Omkoi-Radars am 30.08.2019 um 14:06 Uhr. Es zeigt sich eine Überschätzung der differentiellen Reflektivität  $Z_{dr}$ , besonders ausgeprägt in Bereich mit hoher  $Z_H$ -Intensität.

### Vorgehen

Es werden die Radar- und Regenschreiberdaten der Tage 21.05.2019 und 30.08.2019 betrachtet. Zur Evaluation werden für die  $n_k$  RS-Standorte die Werte für die Regenrate  $R$  aus den entsprechenden Bildpunkten des Radarbildes zu Zeitreihen zusammengesetzt. Da das Radarsystem in einer bestimmten Höhe über dem Boden misst und daher den Standorten kein Bildpunkt eindeutig zugeordnet werden kann, wird der Wert der Regenrate dafür über eine Umgebung gemittelt.

Die Zeitreihen, die die Momentanwerte für die Regenrate  $R$  in einer zeitlichen Auflösung von  $\Delta t = 6$  min enthalten, werden in Zeitreihen mit stündlichen Regensummen umgerechnet, wobei der Momentanwert des Radars als repräsentativ für diesen Zeitraum von sechs Minuten angesehen wird. Die Zeitreihen der Regenschreiber  $s_{k,i}^{rs}$  und der Radarschätzungen  $s_{k,i}^{rad}$  mit  $i = 1, \dots, h$  werden für einen Zeitraum von  $h$  Stunden für die RS-Standorte  $k = 1, \dots, n_k$  mit folgenden Methoden verglichen:

- Es werden für jede RS-Station  $k$  die Tagessummen aus den Zeitreihen berechnet und daraus ein Bias-Faktor  $c_k$  abgeleitet [Ger+06]:

$$c_k = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{i=1}^h s_{k,i}^{rad}}{\sum_{i=1}^h s_{k,i}^{rs}} \right). \quad (93)$$

Ist der Faktor  $c_k$  nahe bei 0, stimmen die Radarschätzungen gut mit den Regenschreiberdaten überein. Bei  $c_k > 0$  überschätzen und bei  $c_k < 0$  unterschätzen die Ergebnisse aus den Radarbildern die Regenmengen. Der zusammenfassende Faktor  $c$  wird als Verhältnis der Gesamtregensummen über alle RS-Stationen berechnet:

$$c = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_k \sum_{i=1}^h s_{k,i}^{rad}}{\sum_k \sum_{i=1}^h s_{k,i}^{rs}} \right). \quad (94)$$

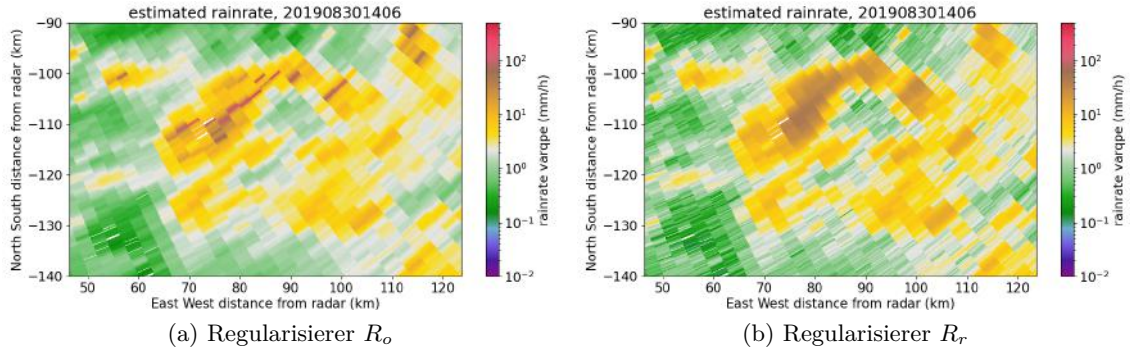


Abbildung 25: Ausschnitt aus Ergebnissen aus CZX13kh für die Regenrate  $R$  bei unterschiedlichen Regularisierern. Bei Verwendung der  $R_o$ -Regularisiers, durch den der Gradient der Radarvariablen bestraft wird, zeigen sich teilweise Ausreißer mit sehr hohen Werten für  $R$ . Die direkte Regularisierung der Regenrate durch  $R_r$  führt zu einem deutlich glatteren Ergebnis.

Der Faktor  $c$  dient als Anhaltspunkt für die Übereinstimmung der Radar- und Regenschreiberdaten, allerdings hat er ohne Betrachtung weiterer Größen geringe Aussagekraft, da bei perfektem Score von  $c = 0$  an einigen Stationen stark unter- und an anderen stark überschätzt werden kann.

- Für jede RS-Station  $k$  wird die Differenz  $\Delta_k = |\sum_{i=1}^h s_{k,i}^{\text{rs}} - s_{k,i}^{\text{rad}}|$  der summierten Zeitreihen berechnet und die Anzahl der Abweichungen über festgelegten Schwellwerten gezählt [JJ14]. Die Schwellwerte werden als  $t_1 = 5$  mm,  $t_2 = 10$  mm und  $t_3 = 20$  mm festgelegt und folgende Größen bestimmt:

$$\begin{aligned}
 n_1 &= \#\{k \in \{1, \dots, n_k\} : t_1 < \Delta_k < t_2\}, \\
 n_2 &= \#\{k \in \{1, \dots, n_k\} : t_2 < \Delta_k < t_3\}, \\
 n_3 &= \#\{k \in \{1, \dots, n_k\} : t_3 < \Delta_k\}.
 \end{aligned} \tag{95}$$

Die Größen geben an, an wie vielen RS-Stationen diese Grenzwerte überschritten werden.

- Für die Tagessummen für die einzelnen Stationen wird eine lineare Regression berechnet, wobei die Daten aus den Radarbildern die  $x$ -Werte und die RS-Daten die  $y$ -Werte darstellen. Bei Übereinstimmung der Daten ergäbe sich eine Steigung  $\beta = 1$ , Achsenabschnitt  $\nu = 0$  und Bestimmtheitsmaß  $R^2 = 1$ .
- Mit den stündlichen Niederschlagsmengen wäre auch eine detailliertere Auswertung der Übereinstimmungen und Dynamiken über den Tagesverlauf möglich. Dieser Ansatz wird in dieser Arbeit nicht weiterverfolgt, wäre aber bei aufbauenden Studien eine interessante Perspektive.



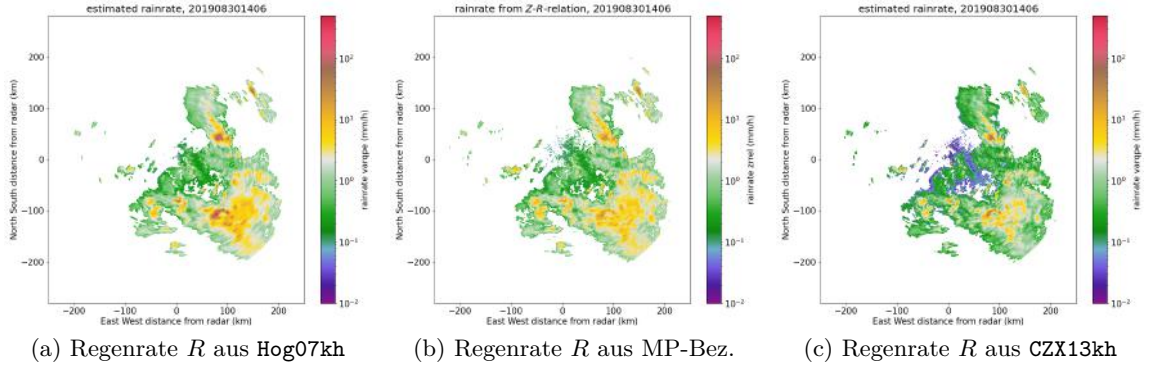


Abbildung 26: Ergebnisse für die Regenerate  $R$  aus MP-Beziehung, Hog07kh-Methode mit  $\gamma$  nach (14) und CZX13kh-Methode mit  $R_r$ -Regularisierung für ein Radarbild des Omkoi-Radars am 30.08.2019 um 14:06 Uhr. Die Hog07kh-Methode resultiert in höheren Regenraten als die MP-Beziehung, die CZX13kh-Methode nur in konvektiven Bereichen.

Die Ergebnisse der Variationsansätze Hog07kh und CZX13kh werden mit den Ergebnissen aus der MP-Beziehung (9) mit  $a = 200$  und  $b = 1.6$ , die häufig im operationellen Betrieb eingesetzt wird, verglichen. Als weitere Vergleichsmethode wird ein empirischer Regenratenschätzer  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ , ähnlich zu (11) angewendet, der zusätzliche Informationen aus der  $Z_{dr}$ -Messung einbezieht:

$$R_{Z_H, Z_{dr}} = \begin{cases} a_1 Z_h^{b_1} 10^{c_1 Z_{dr}}, & \text{falls } Z_{dr} > 0 \wedge Z_{dr} < t_{dr} \wedge \rho_{hv} > t_{hv}, \\ (Z_h/a_2)^{1/b_2}, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (96)$$

Der Schätzer ist eine Weiterentwicklung von hydro & meteo GmbH beruhend auf [Sca+93]. Die Grenzwerte werden auf  $t_{dr} = 5$  und  $t_{hv} = 0.8$  festgelegt. Aus Erfahrungswerten werden die Parameter des ersten Falls als  $a_1 = 0.3$ ,  $b_1 = 0.47$  und  $c = 0.0327$  gesetzt. Für den zweiten Fall wird mit  $a_2 = 200$  und  $b = 1.6$  die MP-Beziehung gewählt.

### Ergebnisse

Die aus dem Vergleich der Regenratenschätzungen aus Radardaten mit Regenschreiberdaten für die beiden Tage 21.05.2019 und 30.08.2019 resultierenden Qualitätsmaße sind im Anhang in Tabelle A2 aufgeführt. Die Auswertung wurde für verschiedene Konfigurationen der Methoden Hog07kh und CZX13kh durchgeführt. Folgende Beobachtungen können gemacht werden:

- Die MP-Beziehung unterschätzt die Regenmenge für beide Tage, für den 30.08.2019 ist der Unterschied mit Bias-Faktor  $c = -4.58$  jedoch deutlich größer als für den 21.05.2019 mit  $c = -1.14$ .
- Die  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ -Beziehung aus (96) überschätzt die Regenmengen für den 21.05.2019 deutlich ( $c = 3.92$ ). Für den 30.08.2019 liegen die Ergebnisse näher an den am Boden gemessenen Werten ( $c = 0.57$ ).

- Für **Hog07kh** zeigt sich eine Unterschätzung der Regenmengen, am 30.08.2019 ausgeprägter als am 21.05.2019. Erneut ist keine große Auswirkung des  $R_b$ -Regularisierers erkennbar. Die Optimierung beider Parameter  $a$  und  $b$  statt der Verwendung eines fixen  $b$  resultiert tendenziell in besseren Ergebnissen. Für den 21.05.2019 zeigt sich bei einem Achsenverhältnis  $\gamma$  nach (13) ein niedriger Faktor  $c = -0.2$ , der aber auf einen Ausreißer mit hohen Werten für eine Station zurückzuführen ist. Die Streuung ist insgesamt größer als für  $\gamma$  nach (14).
- Für **CZX13kh** zeigt sich eine deutliche Unterschätzung der Niederschlagsmengen. Es kann kein klarer Vorteil für einen der Regularisierer  $R_r$  und  $R_o$  erkannt werden.

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus **Hog07kh** mit  $\gamma$  nach (14), Optimierung von  $a$  und  $b$  und Regularisierung durch  $R_s$  und die Ergebnisse aus **CZX13kh** mit Regularisierung durch  $R_r$  genauer betrachtet. Die Ergebnisse für **Hog07kh** und **CZX13kh** für den 30.08.2019 sind in Abb. 27 im Vergleich zur MP- und zur  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ -Beziehung als Streudiagramm mit logarithmischen Skalen dargestellt. Auf der  $x$ -Achse sind die Tagessummen der Regenschreiber und auf der  $y$ -Achse die Tagessummen aus den Radardaten aufgetragen und jeder Punkt repräsentiert eine RS-Station. Das Bestimmtheitsmaß ist für alle Methoden ähnlich hoch. Der Variationsansatz **Hog07kh** zeigt deutlich bessere Ergebnisse als die MP-Beziehung. Der polarimetrische Regenschätzer  $R_{Z_H, Z_{dr}}$  scheint im niedrigen Bereich zu über- und im hohen Bereich zu unterschätzen. **CZX13kh** resultiert in deutlich geringeren Niederschlagsmengen, aber auch hier ist ein linearer Zusammenhang erkennbar.

Für den 21.05.2019 unterscheidet sich die Ausgleichsgerade für **Hog07kh** nicht sehr von der für die MP-Beziehung, der Variationsansatz weist aber eine höhere Streuung auf. Die  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ -Beziehung überschätzt die Niederschlagsmengen hier stark, während **CZX13kh** wieder stark unterschätzt (Abb. 28).

Ein ähnliches Bild zeigt sich für die Verteilung der Bias-Faktoren über die RS-Standorte, die in Abbildung 29 aufgeführt ist.

In Abbildung 30 sind die Größen  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  dargestellt, die angeben, für wie viele RS-Standorte der absolute Unterschied der täglichen Regensumme  $\Delta$  festgelegte Schwellwerte übertrifft. Für den 21.05.2019 zeigt der  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ -Schätzer die schlechtesten Ergebnisse, für 12 Stationen ist der Unterschied  $\Delta > 20$  mm. Für MP-Beziehung, **Hog07kh** und **CZX13kh** sind die Ergebnisse besser und liegen in ähnlichen Bereichen. Für den 30.08.2019 wiederum zeigt der polarimetrische Schätzer deutlich die besten Ergebnisse, während von den anderen drei Methoden **Hog07kh** leichte Vorteile zeigt. Insgesamt sind für diesen Tag deutlich mehr höhere Abweichungen zu erkennen. Es fällt auf, dass Abweichungen in der höchsten Kategorie am häufigsten sind, was darauf hinweist, dass es zu systematischen Unter- oder Überschätzungen kommt.

### Fazit

Die **Hog07kh**-Methode, für die die Tagessummenbilder in Abbildung 31 dargestellt sind, zeigt für die beiden untersuchten Tage eine ähnliche oder sogar bessere Übereinstimmung mit den RS-Daten als die MP-Beziehung. Der Einfluss der Achsenverhältnissfunktion  $\gamma$

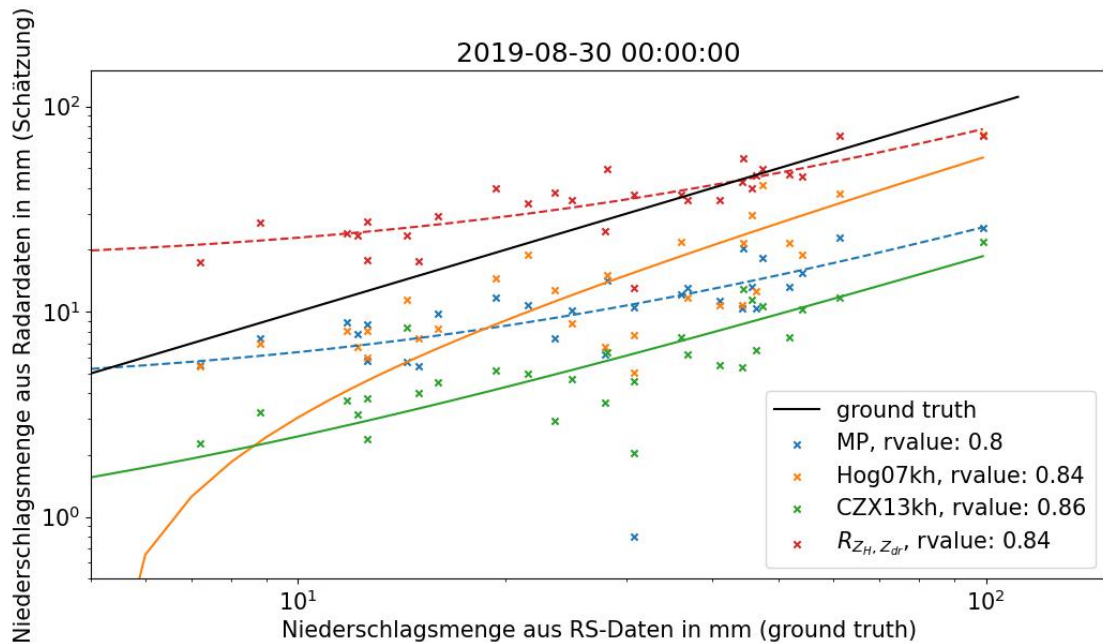


Abbildung 27: Streudiagramm zum Vergleich von Tages-Niederschlagssummen aus Regenschreibern und Radardaten für den 30.08.2019 mit logarithmischer Skala. Jeder Punkt stellt einen RS-Standort dar. Die gestrichelten Linien stellen die Vergleichsverfahren dar. Die Ergebnisse aus dem Variationsansatz Hog07kh (Orange) sind deutlich näher an den RS-Daten als die aus der MP-Beziehung (Blau). Die CZX13kh-Methode (Grün) unterschätzt die Niederschlagsmengen. Der polarimetrische Regenratenschätzer (Rot) nähert die RS-Werte im Mittel gut an, überschätzt aber niedrige und unterschätzt hohe Werte.

ist in den Ergebnissen nicht mehr so deutlich wie im vorherigen Experiment zu erkennen, da nur einzelne Bildpunkte der Radarbilder in die Bewertung eingehen und die großen Unterschiede in begrenzten konvektiven Zellen erkennbar waren. Die zusätzliche Optimierung des Parameter  $b$  zeigt hier Vorteile für die Reproduktion der Regenmengen.

Die CZX13kh-Methode unterschätzt die Regenmengen an beiden Tagen deutlich, weist aber einen klaren linearen Zusammenhang mit den RS-Daten auf. Der Einfluss der Wahl des Regularisierers ist nicht deutlich. Eventuelle Ausreißer, die bei Verwendung von  $R_o$  im Experiment aus Abschnitt 5.3.2 beobachtet werden konnten, haben aufgrund der Extraktion einzelner Bildwerte kaum Auswirkungen auf die Ergebnisse.

Das Experiment zeigt auch, dass die Performance der Methoden stark vom individuellen Niederschlagsereignis abhängt. Während der polarimetrische Regenratenschätzer  $R_{Z_H, Z_{dr}}$  für einen Tag gute Ergebnisse liefert, überschätzt er am anderen Tag stark. Bei den Variationsmethoden scheint diese Fluktuation weniger stark ausgeprägt. Dies müsste aber für eindeutige Ergebnisse für einen längeren Zeitraum ausgewertet werden.

Während es für die CZX13kh-Methode so aussieht, als ob die resultierenden Regenra-

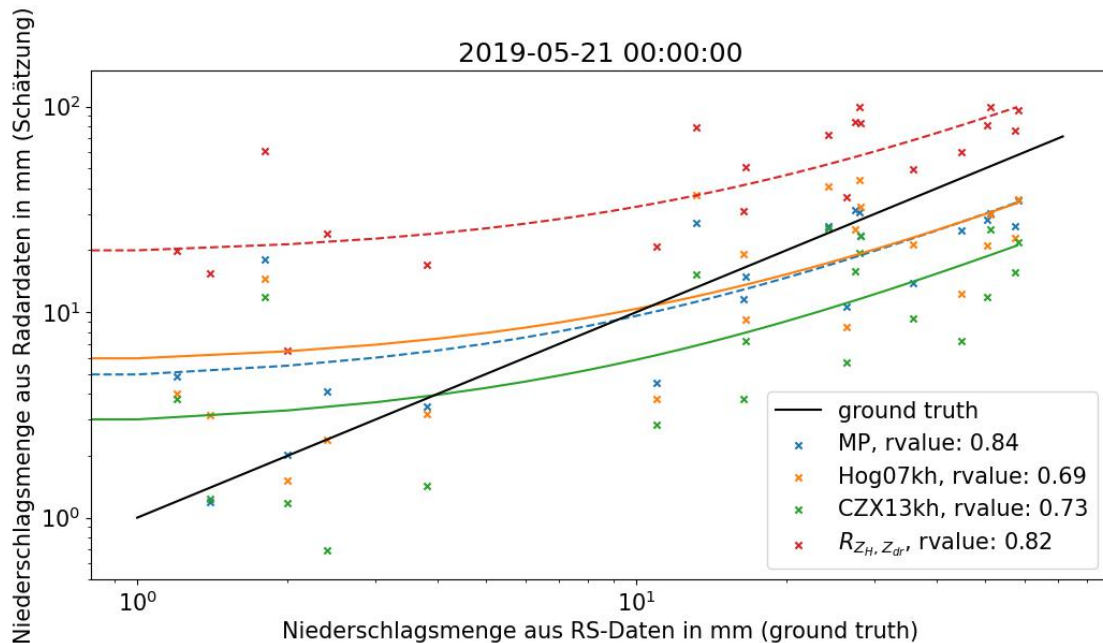


Abbildung 28: Streudiagramm zum Vergleich von Tages-Niederschlagssummen aus Regenschreibern und Radardaten für den 21.05.2019 mit logarithmischer Skala. Jeder Punkt stellt einen RS-Standort dar. Die gestrichelten Linien stellen die Vergleichsverfahren dar. Die Ergebnisse aus dem Variationsansatz **Hog07kh** (Orange) ähneln denen aus der MP-Beziehung (Blau), sind aber weiter gestreut. Die **CZX13kh**-Methode (Grün) unterschätzt und der polarimetrische Regenratenschätzer (Rot) überschätzt die Niederschlagsmengen.

ten mit einem Faktor skaliert werden müssten, um tatsächliche Regenraten abzubilden, übertrifft die **Hog07kh**-Methode in der Übereinstimmung die konventionelle Bestimmung über die MP-Beziehung tendenziell. Für beide Methoden wäre eine Auswertung mit einer höheren Dichte an Regenschreibern hilfreich, um den Einfluss der  $\gamma$ -Funktion bei **Hog07kh** und der Regularisierer bei **CZX13kh** bewerten zu können.

Insgesamt kann das Potential des Variationsansatzes bestätigt werden, reale Niederschlagsmengen abzubilden.

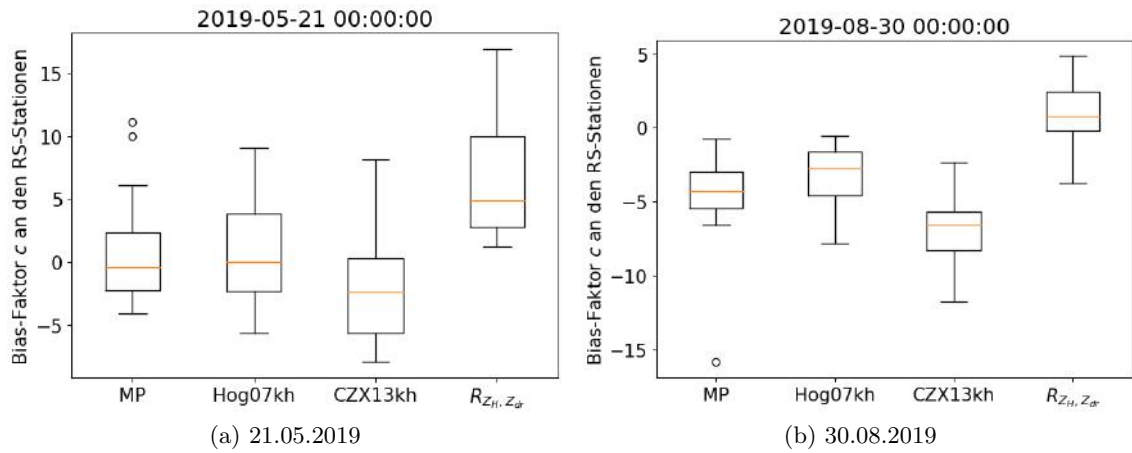


Abbildung 29: Verteilung der Bias-Faktoren  $c_k$  über die RS-Stationen. Dargestellt für die Anwendung der MP-Beziehung, des  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ -Schätzers und der Variationsmethoden Hog07kh und CZX13kh.

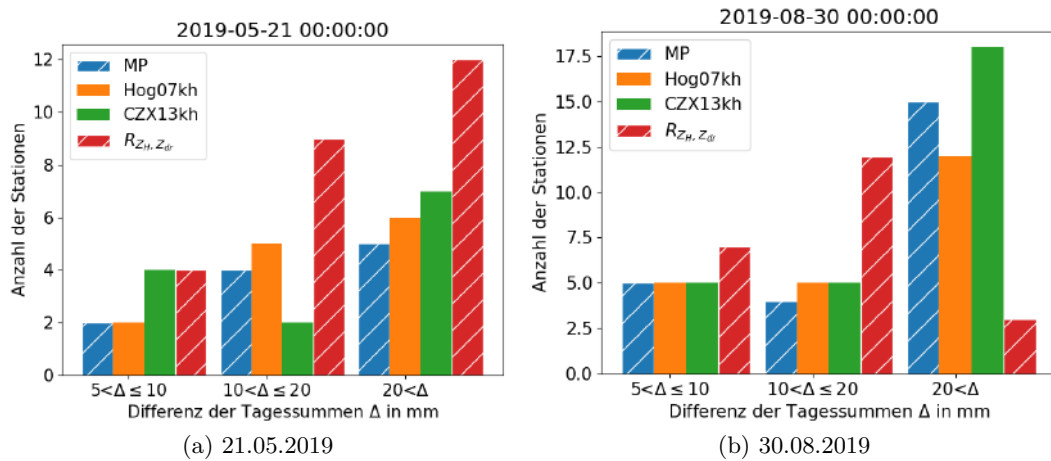


Abbildung 30: Anzahl der RS-Stationen mit Unterschied in Tages-Niederschlagssummen aus Radar und Regenschreibern in den definierten Bereichen. Dargestellt für die Anwendung der MP-Beziehung, des  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ -Schätzers und der Variationsmethoden Hog07kh und CZX13kh. Die Vergleichsverfahren sind schraffiert.

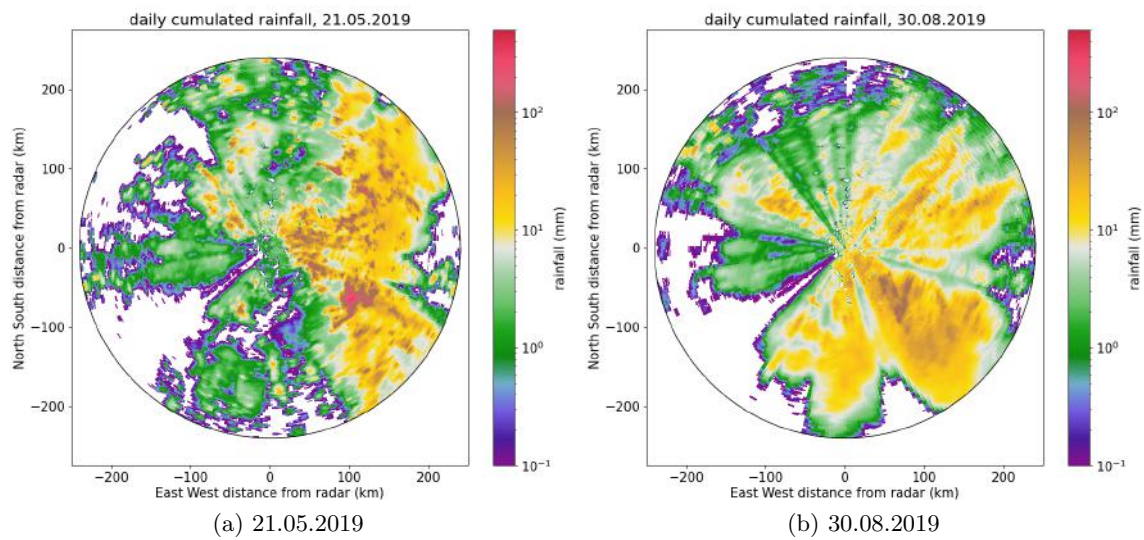


Abbildung 31: Tagessummenbilder der Niederschlagsmengen bestimmt über den Hog07kh-Variationsansatz auf Grundlage der Radarmessung des Omkoi-Radarsystems in Thailand.

---

## Kapitel 6: Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Variationsansatz zur Ermittlung von Regenmengen aus polarimetrischen Radardaten untersucht. Die Evaluation wurde anhand von Radar- und Regenschreiberdaten des thailändischen Royal Rainmaking Department durchgeführt.

Bei den hier untersuchten Variationsmethoden werden Zustandsparameter, die den Niederschlag beschreiben, über ein Vorwärtsmodell mit polarimetrischen Radarvariablen verknüpft. Über die Minimierung des Abstandes zwischen den modellierten Radarvariablen und den Messungen werden diejenigen Zustandsparameter gesucht, die die Messungen am besten erklären.

Die Grundlage für die Anwendung eines Variationsansatzes auf atmosphärische Daten ist die Theorie der optimalen Schätzung aus [Rod00]. Dort wurde ein Maximum-a-posteriori-Schätzer zur optimalen Schätzung der Zustandsparameter entwickelt, der Vorwissen über den Zustand einbezieht. In Kapitel 2 wurde die Herleitung dieses Schätzers formal beschrieben (Abschnitt 2.2.1) und in die mathematische Theorie der Variationsrechnung eingebettet (Abschnitt 2.2.2).

Für die Verwendung von Variationsmethoden zur quantitativen Niederschlagsschätzung aus polarimetrischen Radardaten finden sich in der Literatur verschiedene Varianten. In Kapitel 3 wurden diese verglichen und die Methoden aus [Hog07] und [CZX13] zur näheren Betrachtung ausgewählt.

In der Literatur wird für die Lösung des Variationsproblems aufwendig eine explizite Formel für die Jacobi-Matrix des linearisierten Vorwärtsmodells hergeleitet, um diese anschließend in jedem Iterationsschritt als Grundlage für die Bestimmung der Suchrichtung des Optimierungsverfahrens berechnen zu können. In dieser Arbeit wird stattdessen das PyTorch-Framework zum automatischen Differenzieren verwendet, was die zeitaufwendige und fehleranfällige Bestimmung der Jacobi-Matrix überflüssig macht und somit flexible Anpassungen und Änderungen der Zielfunktion ermöglicht.

Die Variationsmethode in [Hog07] optimiert nur den Parameter  $a$  der  $Z$ - $R$ -Beziehung zwischen Regenrate und Reflektivität. Die Methode wurde in dieser Arbeit um die zusätzliche Optimierung des Parameters  $b$  der  $Z$ - $R$ -Beziehung erweitert. Im Unterschied zur Methode in [CZX13] wurde hier anstelle der  $K_{dp}$ -Werte direkt die  $\Phi_{dp}$ -Messung verwendet, was eine fehleranfällige Berechnung von  $K_{dp}$  erspart. In [CZX13] diente das Verfahren außerdem nur zur Bestimmung der Tropfengrößenverteilung, in dieser Arbeit wurde es explizit zur Berechnung der Regenrate  $R$  eingesetzt. Für beide Verfahren wurden in Kapitel 4 andere Regularisierungsmöglichkeiten vorgeschlagen.

Beide eigenen Implementierungen der Verfahren (genannt `Hog07kh` und `CZX13kh`) finden sowohl bei simulierten als auch bei realen Radardaten Zustandsparameter, die den gemessenen Radarvariablen über das Vorwärtsmodell grundsätzlich entsprechen. Teilweise konnten bestimmte Strukturen, etwa konvektive Zellen, jedoch nicht nachgebildet werden.

Für zwei beispielhaft betrachtete Tage stimmten die über die `Hog07kh`-Methode ermittelten Niederschlagsmengen besser oder zumindest nicht schlechter mit RS-Daten überein als bei Verwendung der klassischen MP-Beziehung. Die Einbeziehung des zu-



sätzlichen Parameters  $b$  in das Variationsmodell konnte dabei die Ergebnisse verbessern. Die Verwendung eines Regularisierers, der die finiten Differenzen der Zustandsparameter in Azimutrichtung bestraft, zeigte plausible Ergebnisse und ersparte das aufwendige, iterative Verfahren zur Glättung aus [Hog07]. Allerdings zeigt die Methode `Hog07kh` eine hohe Abhängigkeit von der verwendeten Achsenverhältnisfunktion  $\gamma$ .

Das `CZX13kh`-Verfahren zeigte sich insgesamt robuster, sowohl bezüglich der Wahl der Achsenverhältnisfunktion als auch gegenüber Messunsicherheiten, wie in einer Robustheitsanalyse untersucht. Ein weiterer Vorteil gegenüber `Hog07kh` ist, dass die Zustandsparameter direkt in Zusammenhang mit physikalischen Größen der Atmosphäre stehen, was auch die Verarbeitungskette vereinfachte. Ein Vergleich mit RS-Daten deutet auf einen linearen Zusammenhang zwischen geschätzten und tatsächlichen Niederschlagsmengen hin, allerdings kommt es zu einer systematischen Unterschätzung.

Die untersuchten Methoden demonstrieren das Potential von Variationsansätzen zur quantitativen Niederschlagsschätzung. Vor allem die Möglichkeit der Kombination verschiedener Messungen ist vielversprechend. Für den Einsatz im operationellen Betrieb müssen die beiden Methoden `Hog07kh` und `CZX13kh` noch weiterentwickelt und verfeinert werden.

### **Ausblick**

In Zukunft könnte ein Vergleich der Ergebnisse aus den Variationsmethoden mit Disdrometer-Messungen mögliche Schwächen im Vorwärtsmodell aufdecken. Eine Auswertung von Radardaten über einen längeren Zeitraum für eine Vielzahl unterschiedlicher Niederschlagsereignisse und ein Vergleich mit RS-Messungen könnte verifizieren, dass der Variationsansatz tatsächlich die Variabilität von Regenfällen besser repräsentieren kann als eine einfache  $Z$ - $R$ -Beziehung. Ebenso wäre ein Vergleich mit weiteren empirischen polarimetrischen Regenschätzern sinnvoll [BC01, Kap. 8].

In dieser Arbeit wurden die Verfahren nur anhand von Daten eines S-Band-Radarsystems getestet. Bei einer Anwendung auf C- oder sogar X-Band-Radardaten, bei denen deutlich stärkere Dämpfungseffekte zu erwarten sind, könnte die Wirkungsweise der im Vorwärtsmodell integrierten Dämpfungskorrektur besser untersucht und mit anderen Korrekturverfahren verglichen werden.

Die implementierten Methoden können nur für Regen sinnvolle Niederschlagsmengen schätzen. In [Hog07] wurde bereits eine simultane Erkennung von Hagelfällen beschrieben. Mit einem Vorwärtsmodell, das auch andere Hydrometeore wie Hagelkörner oder Schneekristalle berücksichtigt, könnte der Variationsansatz auch für die Quantifizierung gemischter Niederschlagsereignisse eingesetzt werden.

Eine interessante Erweiterung wäre die direkte Integration von RS-Messungen in das Modell. Dies könnte über die Anwendung auf eine Serie von Radarbildern mit Bestrafung des Abstandes zu den Niederschlagsmengen aus den punktuellen RS-Messungen realisiert werden. Entsprechende Regularisierer müssen dann für die räumliche Kontinuität der Radarvariablen Sorge tragen. Eine solche Erweiterung würde im besten Fall eine separate Aneichung unnötig machen.



---

# Kapitel A: Appendix

## A.1 Zusätzliche Tabellen

Tabelle A1: Mittelwert des RMSE zwischen konstruierter Regenrate und mittels Variationsmethode geschätzter Regenrate über mehrere Radarstrahlen und Rauschrealisierungen. Vergleich verschiedener Rauschlevel für die Radarvariablen. Betrachtet wird Hog07kh für Optimierung beider Parameter  $a$  und  $b$  und Optimierung nur von  $a$ , CZX13kh sowie die MP-Beziehung.

Radarvar.	Methode Fehler	RMSE [mm]			
		Hog07kh		CZX13kh	MP-Bez.
		$a, b$	$a$		
$Z_H$	0.5 dBZ	8.71	-	7.86	66.53
	1 dBZ	10.89	11.72	9.0	68.65
	2 dBZ	19.81	19.47	14.14	77.83
	5 dBZ	66.41	61.53	23.81	152.15
	10 dBZ	485.11	318.83	26.81	678.83
	20 dBZ	-	-	28.62	-
$Z_{dr}$	0.1 dBZ	-	-	7.82	-
	0.2 dBZ	10.89	11.72	9.0	-
	0.3 dBZ	-	-	10.04	-
	0.4 dBZ	-	-	17.6	-
	0.5 dBZ	15.29	-	20.49	-
	1 dBZ	18.52	29.25	21.51	-
	2 dBZ	24.37	49.93	21.28	-
	5 dBZ	31.3	-	21.22	-
	20 dBZ	-	-	21.21	-
$\Phi_{dp}$	2°	12.01	11.75	9.13	-
	5°	10.89	-	9.0	-
	7°	10.9	11.89	9.08	-
	10°	10.97	-	9.18	-
	15°	11.0	11.98	9.42	-

Tabelle A2: Ergebnisse des Vergleichs der aus Radardaten ermittelten Niederschlagsmengen mit am Boden gemessenen Regenschreiberdaten. Als Vergleichsmethoden für die Variationsansätze dienen die MP-Beziehung und der  $R_{Z_H, Z_{dr}}$ -Schätzer aus (96). Die Variationsansätze Hog07kh und CZX13kh werden mit verschiedenen Konfigurationen für das Achsenverhältnis  $\gamma$ , den Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  und die Regularisierung angewandt. Die Qualitätsmaße sind in Abschnitt 5.3.3 beschrieben.

Methode	Konfiguration			Qualitätsmaße						
	$\gamma$	$\mathbf{x}$	Reg.	$c$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$\beta$	$\nu$	$R^2$
21.05.2019										
MP				-1.14	2	4	5	0.51	4.46	0.84
$R_{Z_H, Z_{dr}}$				3.92	4	9	12	1.4	18.59	0.82
Hog07kh	(14)	$a$	$R_b, R_s$	-1.15	2	4	6	0.45	5.43	0.69
Hog07kh	(14)	$a$	$R_s$	-1.18	2	4	6	0.45	5.37	0.69
Hog07kh	(14)	$a, b$	$R_s$	-0.94	2	5	6	0.49	5.47	0.69
Hog07kh	(13)	$a, b$	$R_s$	-0.2	2	7	5	0.59	6.26	0.59
CZX13kh	(13)	$N_0, \Lambda$	$R_r$	-3.26	4	2	7	0.32	2.69	0.73
CZX13kh	(13)	$N_0, \Lambda$	$R_o$	-2.44	5	3	6	0.36	3.66	0.72
30.08.2019										
MP				-4.58	6	4	15	0.22	4.17	0.8
$R_{Z_H, Z_{dr}}$				0.57	7	12	3	0.61	16.8	0.84
Hog07kh	(14)	$a$	$R_b, R_s$	-3.54	5	4	14	0.51	-2.03	0.83
Hog07kh	(14)	$a$	$R_s$	-3.47	5	4	14	0.54	-2.76	0.82
Hog07kh	(14)	$a, b$	$R_s$	-2.95	5	5	12	0.6	-2.94	0.84
Hog07kh	(13)	$a, b$	$R_s$	-2.77	7	5	11	0.58	-1.6	0.81
CZX13kh	(13)	$N_0, \Lambda$	$R_r$	-6.95	5	5	18	0.18	0.65	0.86
CZX13kh	(13)	$N_0, \Lambda$	$R_o$	-7.08	5	6	18	0.15	1.41	0.72

## Literatur

- [ABL99] Karen Andsager, Kenneth V. Beard und Neil F. Laird. “Laboratory Measurements of Axis Ratios for Large Raindrops”. In: *Journal of the Atmospheric Sciences* 56.15 (Aug. 1999), S. 2673–2683. ISSN: 0022-4928. DOI: 10.1175/1520-0469(1999)056<2673:LMOARF>2.0.CO;2.
- [Ana04] Emmanouil N. Anagnostou. “A Convective/Stratiform Precipitation Classification Algorithm for Volume Scanning Weather Radar Observations”. In: *Meteorological Applications* 11.4 (2004), S. 291–300. ISSN: 1469-8080. DOI: 10.1017/S1350482704001409.
- [Bar80] Stanley L. Barnes. “Report on a Meeting to Establish a Common Doppler Radar Data Exchange Format”. In: *Bulletin of the American Meteorological Society* 61.11 (Nov. 1980), S. 1401–1404. ISSN: 0003-0007, 1520-0477. DOI: 10.1175/1520-0477-61.11.1401.
- [BC01] V. N. Bringi und V. Chandrasekar. *Polarimetric Doppler Weather Radar: Principles and Applications*. 1. Auflage. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [BL11] Kristian Bredies und Dirk Lorenz. *Mathematische Bildverarbeitung: Einführung in Grundlagen Und Moderne Theorie*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2011. ISBN: 978-3-8348-1037-3 978-3-8348-9814-2. DOI: 10.1007/978-3-8348-9814-2.
- [Bro70] C. G. Broyden. “The Convergence of a Class of Double-Rank Minimization Algorithms: 1. General Considerations”. In: *IMA Journal of Applied Mathematics* 6.1 (März 1970), S. 76–90. ISSN: 0272-4960. DOI: 10.1093/imamat/6.1.76.
- [BZV02] Edward A. Brandes, Guifu Zhang und Jothiram Vivekanandan. “Experiments in Rainfall Estimation with a Polarimetric Radar in a Subtropical Environment”. In: *Journal of Applied Meteorology* 41.6 (Juni 2002), S. 674–685. ISSN: 0894-8763. DOI: 10.1175/1520-0450(2002)041<0674:EIREWA>2.0.CO;2.
- [Cao+08] Qing Cao u. a. “Analysis of Video Disdrometer and Polarimetric Radar Data to Characterize Rain Microphysics in Oklahoma”. In: *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 47.8 (Aug. 2008), S. 2238–2255. ISSN: 1558-8424. DOI: 10.1175/2008JAMC1732.1.
- [Cha+16] Wei-Yu Chang u. a. “Quantitative Precipitation Estimation of the Epic 2013 Colorado Flood Event: Polarization Radar-Based Variational Scheme”. In: *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 55.7 (Juli 2016), S. 1477–1495. ISSN: 1558-8424. DOI: 10.1175/JAMC-D-15-0222.1.
- [Cli15] Thai Meteorological Department Climatological Group. *The Climate of Thailand*. 2015. URL: [https://www.tmd.go.th/en/archive/thailand\\_climate.pdf](https://www.tmd.go.th/en/archive/thailand_climate.pdf) (besucht am 20.08.2020).

- [CVC14] Wei-Yu Chang, Jothiram Vivekanandan und Tai-Chi Chen Wang. “Estimation of X-Band Polarimetric Radar Attenuation and Measurement Uncertainty Using a Variational Method”. In: *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 53.4 (Apr. 2014), S. 1099–1119. ISSN: 1558-8424. DOI: 10.1175/JAMC-D-13-0191.1.
- [CYZ12] Qing Cao, Mark B. Yeary und Guifu Zhang. “Efficient Ways to Learn Weather Radar Polarimetry”. In: *IEEE Transactions on Education* 55.1 (Feb. 2012), S. 58–68. ISSN: 1557-9638. DOI: 10.1109/TE.2011.2118211.
- [CZ09] Qing Cao und Guifu Zhang. “Errors in Estimating Raindrop Size Distribution Parameters Employing Disdrometer and Simulated Raindrop Spectra”. In: *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 48.2 (Feb. 2009), S. 406–425. ISSN: 1558-8424. DOI: 10.1175/2008JAMC2026.1.
- [CZX13] Qing Cao, Guifu Zhang und Ming Xue. “A Variational Approach for Retrieving Raindrop Size Distribution from Polarimetric Radar Measurements in the Presence of Attenuation”. In: *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 52.1 (Jan. 2013), S. 169–185. ISSN: 1558-8424. DOI: 10.1175/JAMC-D-12-0101.1.
- [Dow02] Murray Dow. “Explicit Inverses of Toeplitz and Associated Matrices”. In: *ANZIAM Journal* 44 (2002), E185–E215. ISSN: 1445-8810. DOI: 10.21914/anziamj.v44i0.493.
- [DZ93] Richard J. Doviak und Dušan S. Zrnić. *Doppler Radar and Weather Observations*. 2. Auflage. San Diego: Academic Press, 1993. ISBN: 978-0-12-221422-6.
- [Ein+04] Thomas Einfalt u. a. “Towards a Roadmap for Use of Radar Rainfall Data in Urban Drainage”. In: *Journal of Hydrology* 299.3-4 (Dez. 2004), S. 186–202. ISSN: 00221694. DOI: 10.1016/S0022-1694(04)00365-8.
- [FD69] G. B. Foote und P. S. Du Toit. “Terminal Velocity of Raindrops Aloft”. In: *Journal of Applied Meteorology* 8.2 (Apr. 1969), S. 249–253. ISSN: 0021-8952. DOI: 10.1175/1520-0450(1969)008<0249:TVORA>2.0.CO;2.
- [Fig+10] Jordi Figueras i Ventura u. a. “Extensive Evaluation of Polarimetric Quantitative Precipitation Estimations (QPE) in Ideal and Less Ideal Conditions”. In: *ERAD 2010, 6th European Conference on Radar in Meteorology and Hydrology*. 2010.
- [Fig+17] Jordi Figueras i Ventura u. a. “Pyrad: A Real-Time Weather Radar Data Processing Framework Based on Py-Art”. In: *38th Conference on Radar Meteorology*. AMS. 2017.
- [Fle70] R. Fletcher. “A New Approach to Variable Metric Algorithms”. In: *The Computer Journal* 13.3 (Jan. 1970), S. 317–322. ISSN: 0010-4620. DOI: 10.1093/comjnl/13.3.317.

- [Fur05] Gemma Furness. “Using Optimal Estimation Theory for Improved Rainfall Rates from Polarization Radar”. Diss. Masters dissertation, Dept. of Mathematics, University of Reading, 2005.
- [GD09] E Goudenhoofdt und L Delobbe. “Evaluation of Radar-Gauge Merging Methods for Quantitative Precipitation Estimates”. In: *Hydrol. Earth Syst. Sci.* (2009), S. 9.
- [Ger+06] Urs Germann u. a. “Radar Precipitation Measurement in a Mountainous Region”. In: *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 132.618 (Juli 2006), S. 1669–1692. ISSN: 00359009, 1477870X. DOI: 10.1256/qj.05.190.
- [GH04] Mariano Giaquinta und Stefan Hildebrandt. *Calculus of Variations I. 2.* Auflage. Bd. 310. Berlin Heidelberg New York: Springer Science & Business Media, 2004.
- [GML13] Scott E. Giangrande, Robert McGraw und Lei Lei. “An Application of Linear Programming to Polarimetric Radar Differential Phase Processing”. In: *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 30.8 (Aug. 2013), S. 1716–1729. ISSN: 0739-0572. DOI: 10.1175/JTECH-D-12-00147.1.
- [GMW97] Philip E. Gill, Walter Murray und Margaret H. Wright. *Practical Optimization.* 11. Auflage. London: Academic Press Limited, 1997.
- [God+95] John W. F. Goddard u. a. “Dual-Wavelength Polarisation Measurements in Precipitation Using the CAMRA and Rabelais Radar”. In: *27th Conference on Radar Meteorology.* AMS. Vail, CO, 1995, S. 196–198.
- [Gol70] Donald Goldfarb. “A Family of Variable-Metric Methods Derived by Variational Means”. In: *Mathematics of Computation* 24.109 (1970), S. 23–26. ISSN: 0025-5718, 1088-6842. DOI: 10.1090/S0025-5718-1970-0258249-6.
- [HC16] Jonathan J. Helmus und Scott M. Collis. “The Python ARM Radar Toolkit (Py-ART), a Library for Working with Weather Radar Data in the Python Programming Language”. In: *Journal of Open Research Software* 4 (Juli 2016). ISSN: 2049-9647. DOI: 10.5334/jors.119.
- [HDK00] D. L. Harrison, S. J. Driscoll und M. Kitchen. “Improving Precipitation Estimates from Weather Radar Using Quality Control and Correction Techniques”. In: *Meteorological Applications* 7.2 (Juni 2000), S. 135–144. ISSN: 13504827. DOI: 10.1017/S1350482700001468.
- [Hog07] Robin J. Hogan. “A Variational Scheme for Retrieving Rainfall Rate and Hail Reflectivity Fraction from Polarization Radar”. In: *Journal of Applied Meteorology and Climatology* 46.10 (Okt. 2007), S. 1544–1564. ISSN: 1558-8424. DOI: 10.1175/JAM2550.1.
- [Hog09] Robin J. Hogan. *Variational Polarimetric Radar Algorithm for Retrieving the Properties of Rain and Hail.* 2009. URL: [http://www.met.rdg.ac.uk/clouds/var\\_rain\\_hail/](http://www.met.rdg.ac.uk/clouds/var_rain_hail/) (besucht am 20.07.2020).

- [Hua+17] Hao Huang u. a. “A Hybrid Method to Estimate Specific Differential Phase and Rainfall With Linear Programming and Physics Constraints”. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 55.1 (Jan. 2017), S. 96–111. ISSN: 1558-0644. DOI: 10.1109/TGRS.2016.2596295.
- [Hua+18] Hao Huang u. a. “Quantitative Precipitation Estimation with Operational Polarimetric Radar Measurements in Southern China: A Differential Phase-Based Variational Approach”. In: *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 35.6 (Juni 2018), S. 1253–1271. ISSN: 0739-0572. DOI: 10.1175/JTECH-D-17-0142.1.
- [JJ14] Alrun Jasper-Tönnies und Markus Jessen. “Improved Radar QPE with Temporal Interpolation Using an Advection Scheme”. In: *ERAD 2014, 8th European Conference on Radar in Meteorology and Hydrology*. 2014.
- [Kal03] Eugenia Kalnay. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [Klo08] Brigitte Klose. *Meteorologie*. Springer-Lehrbuch. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. ISBN: 978-3-540-71308-1 978-3-540-71309-8. DOI: 10.1007/978-3-540-71309-8.
- [Koc07] Karl-Rudolf Koch. *Introduction to Bayesian Statistics*. 2. Auflage. Berlin New York: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-72723-1.
- [Kra07] Helmut Kraus. *Die Atmosphäre Der Erde: Eine Einführung in Die Meteorologie*. 3. Auflage. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2007.
- [Kum13] Matthew R. Kumjian. “Principles and Applications of Dual-Polarization Weather Radar. Part I: Description of the Polarimetric Radar Variables”. In: *Journal of Operational Meteorology* 1.19 (2013), S. 226–242. DOI: 10.15191/nwajom.2013.0119.
- [Kur04] Eric Kurth. *A Strong Hail Producing Supercell Thunderstorm in the Background and the WSR-88D Doppler Weather Radar at New Underwood, South Dakota, in the Foreground*. Mai 2004. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wea01195\\_-\\_Flickr\\_-\\_NOAA\\_Photo\\_Library.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wea01195_-_Flickr_-_NOAA_Photo_Library.jpg) (besucht am 11.08.2020).
- [Lei14] Jussi Leinonen. “High-Level Interface to T-Matrix Scattering Calculations: Architecture, Capabilities and Limitations”. In: *Optics Express* 22.2 (Jan. 2014), S. 1655–1660. ISSN: 1094-4087. DOI: 10.1364/OE.22.001655.
- [LHM91] Hans J. Liebe, George A. Hufford und Takeshi Manabe. “A Model for the Complex Permittivity of Water at Frequencies below 1 THz”. In: *International Journal of Infrared and Millimeter Waves* 12.7 (Juli 1991), S. 659–675. ISSN: 0195-9271, 1572-9559. DOI: 10.1007/BF01008897.

- [LMH89] Hans .J. Liebe, Takeshi Manabe und George A. Hufford. “Millimeter-Wave Attenuation and Delay Rates Due to Fog/Cloud Conditions”. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 37.12 (Dez. 1989), S. 1617–1612. ISSN: 1558-2221. DOI: 10.1109/8.45106.
- [Mah+19] Vivek N. Mahale u. a. “Variational Retrieval of Rain Microphysics and Related Parameters from Polarimetric Radar Data with a Parameterized Operator”. In: *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 36.12 (Dez. 2019), S. 2483–2500. ISSN: 0739-0572. DOI: 10.1175/JTECH-D-18-0212.1.
- [Mei05] Peter Meischner, Hrsg. *Weather Radar: Principles and Advanced Applications*. Berlin Heidelberg New York: Springer Science & Business Media, 2005.
- [Mic+09] S. Michaelides u. a. “Precipitation: Measurement, Remote Sensing, Climatology and Modeling”. In: *Atmospheric Research* 94.4 (Dez. 2009), S. 512–533. ISSN: 01698095. DOI: 10.1016/j.atmosres.2009.08.017.
- [MIM12] Takeshi Maesaka, Koyuru Iwanami und Masayuki Maki. “Non-Negative KDP Estimation by Monotone Increasing  $\Phi$ DP Assumption below Melting Layer”. In: *ERAD 2012, 7th European Conference on Radar in Meteorology and Hydrology*. 2012.
- [MT94] Michael I. Mishchenko und Larry D. Travis. “T-Matrix Computations of Light Scattering by Large Spheroidal Particles”. In: *Optics Communications* 109.1 (Juni 1994), S. 16–21. ISSN: 0030-4018. DOI: 10.1016/0030-4018(94)90731-5.
- [NW06] Jorge Nocedal und Stephen Wright. *Numerical Optimization*. 2. Auflage. New York: Springer Science & Business Media, 2006.
- [PK80] Hans R. Pruppacher und James D. Klett. “Microphysics of Clouds and Precipitation”. In: *Nature* 284.5751 (März 1980), S. 88–88. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/284088b0.
- [Rag03] S. Raghavan. *Radar Meteorology*. Hrsg. von Robert Sadourny und Lawrence A. Mysak. Bd. 27. Atmospheric and Oceanographic Sciences Library. Dordrecht: Springer Netherlands, 2003. ISBN: 978-90-481-6416-5 978-94-017-0201-0. DOI: 10.1007/978-94-017-0201-0.
- [RGS05] Alexander V. Ryzhkov, Scott E. Giangrande und Terry J. Schuur. “Rainfall Estimation with a Polarimetric Prototype of WSR-88D”. In: *Journal of Applied Meteorology* 44.4 (Apr. 2005), S. 502–515. ISSN: 0894-8763. DOI: 10.1175/JAM2213.1.
- [Rin91] Ronald E. Rinehart. *Radar for Meteorologists: Or You, Too, Can Be a Radar Meteorologist, Part III*. 2. Auflage. Columbia, Mo: Rinehart Publ, 1991. ISBN: 978-0-9608700-7-3.
- [RN18] Robert M. Rauber und Stephen W. Nesbitt. *Radar Meteorology: A First Course*. Chisester: John Wiley & Sons Ltd, 2018.

- [Rod00] Clive D. Rodgers. *Inverse Methods for Atmospheric Sounding: Theory and Practice*. Bd. 2. Singapore: World Scientific Publishing, 2000.
- [Rou98] G. Rousseau. “A Sufficient Condition for a Non-Negative Matrix to Have Non-Negative Determinant”. In: *Linear and Multilinear Algebra* 44.2 (Juli 1998), S. 179–185. DOI: 10.1080/03081089808818557.
- [RU03] Daniel Rosenfeld und Carlton W. Ulbrich. “Cloud Microphysical Properties, Processes, and Rainfall Estimation Opportunities”. In: *Radar and Atmospheric Science: A Collection of Essays in Honor of David Atlas*. Hrsg. von Roger M. Wakimoto und Ramesh Srivastava. Meteorological Monographs. Boston, MA: American Meteorological Society, 2003, S. 237–258. ISBN: 978-1-878220-36-3. DOI: 10.1007/978-1-878220-36-3\_10.
- [RUR18] Ricardo Reinoso-Rondinel, Christine Unal und Herman Russchenberg. “Adaptive and High-Resolution Estimation of Specific Differential Phase for Polarimetric X-Band Weather Radars”. In: *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 35.3 (März 2018), S. 555–573. ISSN: 0739-0572. DOI: 10.1175/JTECH-D-17-0105.1.
- [RZ19] Alexander V. Ryzhkov und Dušan S. Zrnić. *Radar Polarimetry for Weather Observations*. Switzerland: Springer Nature, 2019.
- [SB76] T. A. Seliga und V. N. Bringi. “Potential Use of Radar Differential Reflectivity Measurements at Orthogonal Polarizations for Measuring Precipitation”. In: *Journal of Applied Meteorology* 15.1 (Jan. 1976), S. 69–76. ISSN: 0021-8952. DOI: 10.1175/1520-0450(1976)015<0069:PUORDR>2.0.CO;2.
- [Sca+93] Gianfranco Scarchilli u. a. “Rainfall Estimation Using Polarimetric Techniques at C-Band Frequencies”. en. In: *Journal of Applied Meteorology* 32.6 (Juni 1993), S. 1150–1160. ISSN: 0894-8763. DOI: 10.1175/1520-0450(1993)032<1150:REUPTA>2.0.CO;2.
- [Sha70] D. F. Shanno. “Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization”. In: *Mathematics of Computation* 24.111 (1970), S. 647–656. ISSN: 0025-5718, 1088-6842. DOI: 10.1090/S0025-5718-1970-0274029-X.
- [Tes+01] Jacques Testud u. a. “The Concept of “Normalized” Distribution to Describe Raindrop Spectra: A Tool for Cloud Physics and Cloud Remote Sensing”. In: *Journal of Applied Meteorology* 40.6 (Juni 2001), S. 1118–1140. ISSN: 0894-8763. DOI: 10.1175/1520-0450(2001)040<1118:TCONDNT>2.0.CO;2.
- [Tre11] Kevin E. Trenberth. “Changes in Precipitation with Climate Change”. In: *Climate Research* 47.1 (März 2011), S. 123–138. ISSN: 0936-577X, 1616-1572. DOI: 10.3354/cr00953.
- [Ulb83] Carlton W. Ulbrich. “Natural Variations in the Analytical Form of the Raindrop Size Distribution”. In: *Journal of Climate and Applied Meteorology* 22.10 (Okt. 1983), S. 1764–1775. ISSN: 0733-3021. DOI: 10.1175/1520-0450(1983)022<1764:NVITAF>2.0.CO;2.



- [Wei15] Elmar Weigl. *Radarniederschlag - Prinzip Der Niederschlagsbestimmung Mit Radar Inkl. Umrechnung Der Radarreflektivitäten in Momentanwerte Des Niederschlags*. Techn. Ber. Deutscher Wetterdienst, 2015.
- [Wet+13] Parichat Wetchayont u. a. “Retrieval of Rainfall by Combining Rain Gauge, Ground-Based Radar and Satellite Measurements over Phimai, Thailand”. In: *SOLA* 9.0 (2013), S. 166–169. ISSN: 1349-6476. DOI: 10.2151/sola.2013-037.
- [YCU14] Eiichi Yoshikawa, V. Chandrasekar und Tomoo Ushio. “Raindrop Size Distribution (DSD) Retrieval for X-Band Dual-Polarization Radar”. In: *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 31.2 (Feb. 2014), S. 387–403. ISSN: 0739-0572. DOI: 10.1175/JTECH-D-12-00248.1.
- [Zha+19] Guifu Zhang u. a. “Current Status and Future Challenges of Weather Radar Polarimetry: Bridging the Gap between Radar Meteorology/Hydrology/-Engineering and Numerical Weather Prediction”. In: *Advances in Atmospheric Sciences* 36.6 (Juni 2019), S. 571–588. ISSN: 1861-9533. DOI: 10.1007/s00376-019-8172-4.
- [Zha17] Guifu Zhang. *Weather Radar Polarimetry*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2017.
- [ZVB01] Guifu Zhang, Jothiram Vivekanandan und Edward A. Brandes. “A Method for Estimating Rain Rate and Drop Size Distribution from Polarimetric Radar Measurements”. In: *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing* 39.4 (Apr. 2001), S. 830–841. ISSN: 1558-0644. DOI: 10.1109/36.917906.

