UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND IMAGE COMPUTING

Stochastische Bildregistrierung

Stochastic Image Registration

Masterarbeit

im Rahmen des Studiengangs
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften
der Universität zu Lübeck

Vorgelegt von
Florian Eilers

Ausgegeben und betreut von
Jan Lellmann
Institute of Mathematics and Image Computing

Mit Unterstützung von
Andreas Rößler
Institut für Mathematik

21. September 2020

MIC

IM FOCUS DAS LEBEN

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Lübeck,
21. September 2020

Autor

Kurzfassung

Diese Arbeit widmet sich der Quantifizierung von Unsicherheiten in der Bildregistrierung. Dazu wird das Rauschen in den Eingabedaten als Zufallsvariable modelliert. Als Ansatz für die Registrierung wird ein Variationsansatz gewählt, der um eine stochastische Komponente erweitert wird. Die Euler-Lagrange-Gleichung dieses Variantionsansatzes wird dadurch zu einer stochastischen partiellen Differentialgleichung (SPDE). Diese wird mit dem Ansatz der Polynomial Chaos Expansion numerisch gelöst. Die Polynomial Chaos Expansion basiert darauf Zufallsvariablen in polynomielle Basiselemente zu zerlegen. Diese Zerlegung erlaubt eine Trennung der Raum- und der stochastischen Dimension der SPDE und eine approximative Lösung in Kombination mit einer Finite-Differenzen Methode. Es werden erste numerische Ergebnisse der stochastischen krümmungsbasierten Bildregistrierung vorgelegt.

Abstract

In this work, an approach for quantifying uncertainties in image registration is presented. The input noise is modelled as random variables and for the image registration a variational approach is extended to a stochastic domain. The resulting Euler-Lagrange-Equation is a stochastic partial differential equation (SPDE). This SPDE is solved numerically using the Polynomial Chaos Expansion, which is based on decomposing the random variable into polynomial basis elements. This allows to separate the space and the stochastic dimension and, in combination with a finite differences approach, to solve the SPDE numerically. First numerical results of stochastic curvature-based image registration are presented.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Einleitung

1.1 Motivation

Die Bildregistrierung ist eine wichtige Aufgabe in der mathematischen Bildverarbeitung. Anwendungen finden sich in verschiedenen Disziplinen, wie Kunst, Astronomie, Biologie, Chemie oder Medizin. [Mod09] In der Medizin liegen häufig mehrere Bilddaten eines Patienten vor. Diese können mit unterschiedlichen Bildgebungsverfahren erstellt worden sein, um mehr Informationen über den Zustand des Patienten zu erhalten, oder es liegen Bilddaten über einen längeren Zeitraum vor, die den Krankheitsverlauf bei einem Patienten dokumentieren. [HBHH00, Han09] In beiden Fällen ist das Ziel diese Daten vergleichbar zu machen. Unter anderem aufgrund der Atmung, des Herzschlag, der unterschiedlicher Ausrichtung des Patienten oder von Krankheitsverläufen können die Aufnahmen zueinander verschoben sein. Dies ist der Ansatzpunkt der Bildregistrierung:

„Sind zwei Bilder gegeben, ist das Ziel (der Bildregistrierung) eine sinnvolle Transformation zu finden, so dass die transformierte Version des ersten Bildes dem zweiten Bild ähnlich ist.“ [Mod09]

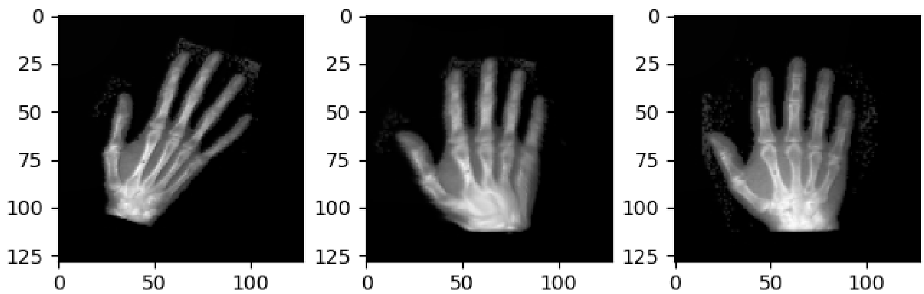

Abbildung 1: Röntgen-Bilder einer Hand, Links: Zu verschiebendes Templatebild, Mitte: verschobenes Templatebild, Rechts: Referenzbild, in welches verschoben werden soll.

Der Nutzen der Bildregistrierung erschöpft sich dabei nicht in der Vergleichbarkeit der beiden Bilder. Auch die Transformation selbst kann wichtige Informationen zum Beispiel über den Krankheitsverlauf oder die Bewegung von Organen geben [CHH14].

In der mathematischen Bildverarbeitung werden die vorliegenden Bilddaten häufig als gegebene Wahrheit angenommen. Medizinische Bildgebungsverfahren sind allerdings fehlerbehaftet. In deterministischen Methoden der Bildverarbeitung wird diese Unsicherheit nur unzureichend modelliert, woraus Fehler im Ergebnis resultieren können[MMC09]. In [PSK08] wird ein Ansatz präsentiert, der sich diesem Problem widmet. Dabei werden die Unsicherheiten in den Eingabedaten als Zufallsvariablen modelliert und die Algorithmen angepasst, so dass auch das Ergebnis als Zufallsvariable vorliegt. Das ermöglicht präzise Aussagen darüber, wie sicher das Ergebnis der Bildverarbeitung ist.

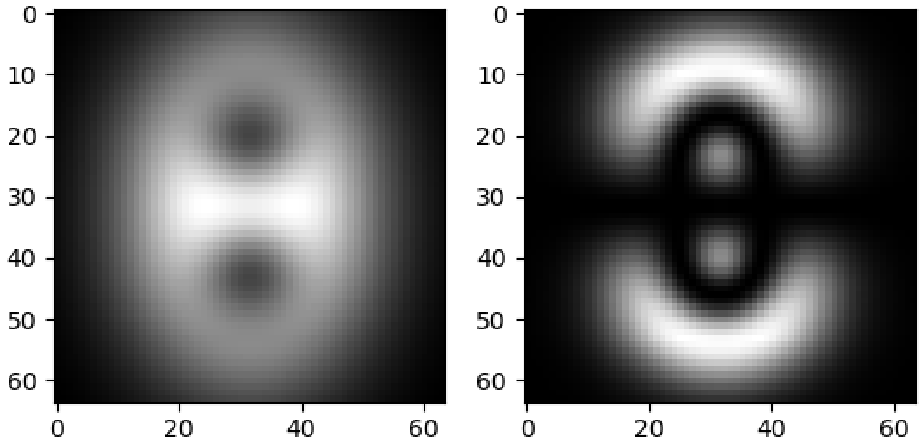

Abbildung 2: Ein stochastisches Bild, Links: Erwartungswert, Rechts: Varianz

Viele Aufgaben der mathematischen Bildverarbeitung können mit Variationsansätzen gelöst werden. [AK06] Diese basieren auf der Minimierung passender Funktionale; auch für die Bildregistrierung ist dies ein weit verbreiteter Ansatz [Mod04]. Ein typisches Funktional für die Bildregistrierung ist von der Form

$$u^* \in \arg\min_{u \in U} \{\mathcal{D}(T, R; u) + \lambda \mathcal{R}(u)\} \tag{1}$$

Dabei ist U ein Funktionenraum, T das Templatebild, das auf das Referenzbild R transformiert werden soll, $\mathcal{D}(T, R; u)$ ein Ähnlichkeitsmaß, $\lambda > 0$ der Regularisierungsparameter und $\mathcal{R}(u)$ ein problemspezifischer Regularisierer.

Ein Lösungsansatz zur Lösung von Variationsproblem wie in (1) ist die Lösung der resultierenden Euler-Lagrange-Gleichung [AK06]. Für die stochastische Bildregistrierung wird das Modell in (1) durch eine stochastische Komponente erweitert – näher beschrieben in Kapitel 4. Dabei ergibt sich als Euler-Lagrange-Gleichung eine stochastische partielle Differentialgleichung. Die Lösung dieser stochastischen partiellen Differentialgleichung ist eine Zufallsvariable, die das „optimale" Verschiebungsfeld modelliert und dabei die Unsicherheiten der Eingabedaten mit einbezieht. Eine Lösungsstrategie zur numerischen Lösung einer stochastischen Euler-Lagrange-Gleichung bietet die Polynomial Chaos Expansion [PSK08]. Die Polynomial Chaos Zerlegung erlaubt es, Zufallsvariablen unter gewissen Voraussetzungen durch polynomielle Basiselemente zu approximieren, die sich aufgrund ihrer Orthonormalität sehr gut handhaben lassen [Jan97].

In dieser Arbeit wird das Konzept der stochastischen Bildregistrierung dargestellt und auf die krümmungsbasierte Registrierung [MF02b] angewandt. Die Polynomial Chaos Expansion für stochastische Bilder und wichtige Eigenschaften für die numerische Handhabung stochastischer Bilder werden präsentiert. Für die stochastische krümmungsbasierte Bildregistrierung werden numerische Experimente durchgeführt und Vor- und Nachteile diskutiert.

1.2 Literaturübersicht

Krümmungsbasierte Bildregistrierung: In zwei Veröffentlichungen haben Fischer und Modersitzki die krümmungsbasierte Bildregistrierung vorgestellt [MF02b, MF02a]. Dies ist ein Variationsansatz, der insbesondere affin-lineare Deformationen bevorzugt und somit weniger abhängig von affin-linearer Vorregistrierung ist. In [Mod04] wurde ein Algorithmus zur Lösung dieses Variationsproblems eingeführt, in dem die Euler-Lagrange-Gleichung um eine Zeitdimension erweitert und die entstehende parabolische Differentialgleichung numerisch gelöst wurde.

Fehlerquantifizierung in der Bildregistrierung: Die Qualität von Bildregistrierung wurde bereits untersucht indem Landmarken verfolgt wurden [BSD+05, CCG+09], Konturen verglichen wurden [WWD+08] oder das entstehende Verschiebungsfeld mit der bekannten gewünschten Verschiebung verglichen wurde. [STA+03] In [MMC09] wurde ein stochastischer Ansatz präsentiert, bei dem gemessen wird, wie sehr sich das Registrierungsergebnis bei kleinen Variationen verändert. In dieser Veröffentlichung wurde die B-Spline Registrierung untersucht.

Stochastische Bildverarbeitung: In 2008 nutzen Preusser et al. in [PSK08] ein Konzept für stochastischen Bilder, bei dem Pixel als Zufallsvariablen modelliert wurden. In der selben Arbeit wurde auch die Polynomial Chaos Expansion für die Bildverarbeitung vorgestellt und eine stochastische Finite Elemente Methode für stochastische Bilder präsentiert. Diese Methode wurde beispielhaft auf Diffusionsfilterung und Optischen Fluss angewendet. Das Konzept stochastischer Bildverarbeitung mit der Polynomial Chaos Expansion wurde in einer Reihe von Veröffentlichungen für die Bildsegmentierung stochastischer Bilder mit Level-Set-Methoden fortgeführt. [PP10, PKP12, PP13] In [PKP17] wurde die Theorie der stochastischen Bildverarbeitung zusammengefasst und beispielhaft verschiedene Bildverarbeitungsmethoden, die auf partiellen Differentialgleichungen beruhen, stochastisiert. Insbesondere wurde hier erstmals die stochastische Bildregistrierung in Form einer stochastischen Variante der elastischen Registrierung präsentiert.

1.3 Überblick

In **Kapitel 2** wird das Konzept der Bildregistrierung vorgestellt und notwendige Definitionen werden eingeführt. Insbesondere werden die variationelle Bildregistrierung und eine Lösungsstrategie präsentiert. Diese Lösungsstrategie wird für die krümmungsbasierte Bildregistrierung konkretisiert und ein Algorithmus zur numerischen Lösung vorgestellt. **Kapitel 3** befasst sich mit der Polynomial Chaos Expansion. Dazu wird eine polynomielle Basis des L^2 hergeleitet und diese durch eine konkrete Wahl der Hermiteschen Polynome als Basis spezifiziert. In **Kapitel 4** werden die Konzepte der vorherigen Kapitel zusammengeführt und die stochastische Bildregistrierung thematisiert. Auf Basis der Polynomial Chaos Expansion wird eine Lösungsstrategie für die stochastische Registrierung eingeführt und auf die stochastische krümmungsbasierte Registrierung angewandt.

Numerische Ergebnisse zu den zuvor erarbeiteten theoretischen Resultaten werden in **Kapitel 5** präsentiert. Der Fokus liegt hierbei auf Experimenten zur stochastischen krümmungsbasierten Bildregistrierung. Es werden sowohl Experimente mit künstlich erzeugten Bildern als auch mit echten medizinischen Bildern durchgeführt. Im **Appendix** werden die für diese Arbeit benötigten mathematischen Grundlagen kurz dargelegt. Zunächst werden die Grundlagen der mathematischen Bildverarbeitung thematisiert, bevor auf die stochastischen Grundlagen eingegangen wird.

Notation und Symbole

Mathematische Notation

$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, \ldots\}$
$\frac{\partial}{\partial x}$	Partielle Ableitung nach x
∇	Gradient einer Funktion
Δ	Laplace-Operator
Δ^2	$\Delta \circ \Delta$
$d\mathcal{H}_n$	Hausdorffmaß zur Dimension n
$\mathcal{O}(h)$	Konvergenz gegen 0 mit Geschwindigkeit mindestens $\mathcal{O}(h)$
$\bigoplus$	Direkte Summe von Vektorräumen
$\mathcal{P}$	Potenzmenge
∂	Rand einer Menge
$\overline{B}$	Abschluss einer Menge B
$\langle\ ,\ \rangle_Y$	Skalarprodukt eines Hilbertraumes Y
$\perp$	Orthogonalität (in einem Hilbertraum)
grad	Gesamtgrad eines Polynoms

Bildregistrierung

T	Templatebild
R	Referenzbild
u	Verschiebungsfeld
T_u	Um u transformiertes Templatebild $T(\cdot - u)$
D	Bildraum (Funktionenraum)
$\mathcal{D}$	Abstandsmaß
$\mathcal{R}$	Regularisierer

$\tilde{T}$	Diskretisierung des Bildes T

Stochastik

$\mathbb{P}$	Wahrscheinlichkeitsmaß
Ω	Ergebnisraum
$\mathcal{F}$	Ereignisraum
$\mathcal{F}(\xi)$	Von ξ erzeugte σ-Algebra
$\mathbb{P}_X$	Verteilung von X
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung zum Erwartungswert μ und Varianz σ^2
$U(a, b)$	Gleichverteilung auf (a, b)
$X \stackrel{d}{=} Y$	X und Y sind identisch verteilt

Kapitel 2: Bildregistrierung

Das Problem der Bildregistrierung ist das Problem zwei Bilder miteinander in Übereinstimmung zu bringen. Es liegen also zwei Bilder vor: Das sogenannte Templatebild, oder bewegtes Bild, das mit Hilfe eines Verschiebungsfeldes in das Referenzbild überführt werden soll [Mod09]. Formal ausgedrückt lässt sich das Problem wie folgt beschreiben.

Definition 2.1

Es sei $D \in \mathbb{R}^n$ ein *Bildgebiet*, $Y(D)$ ein Funktionenraum, genannt *Bildraum*, und $T, R \in Y(D)$ das *Template-* bzw. *Referenzbild*. Gesucht ist ein *Verschiebungsfeld* $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, so dass $T(\cdot - u)$ möglichst *ähnlich* zu R ist.
Der Begriff ähnlich muss problemspezifisch gewählt werden.
Wir bezeichnen das mit u deformierte Bild $T(\cdot - u)$ mit T_u.

Beispiel 2.2

Mögliche Beispiele, wie die Ähnlichkeit von zwei Bildern definiert sein kann, sind:

1. Landmarkenbasierte Registrierung: Es werden Bezugspunkte, sog. Landmarken in beiden Bildern definiert, die zueinander korrespondieren und nach der Registrierung möglichst überlappen sollen.

2. Normbasierte Registrierung: Es wird eine Norm $||\cdot||_{Y(D)}$ auf dem Bildraum $Y(D)$ definiert, so dass der Abstand $||T_u - R||_{Y(D)}$ minimiert wird.

2.1 Affin-lineare (Vor-)Registrierung

Der erste Ansatz ist ein globales Verschiebungsfeld zu definieren, dass das Templatebild T affin-linear verschiebt. Zu gegebenem Ähnlichkeitsmaß, nach dem registriert werden soll, werden Parameter $A \in \mathbb{R}^{n^2}, b \in R^n$ gesucht und das Verschiebungsfeld durch $x - u(x) = Ax + b$ definiert.
Die affin-lineare Registrierung wird häufig als Vorverarbeitungsschritt gewählt, um die Bilder grob aneinander anzupassen, bevor dann mit einer nicht-linearen Registrierungsmethode das Endergebnis erzielt wird [Mod04].

2.2 Variationelle Bildregistrierung

2.2.1 Grundlagen

Die Idee der variationellen Bildregistrierung ist es, das Registrierungsproblem als Variationsproblem über einen geeigneten Raum darzustellen, so dass der Minimierer ein „optimales“ Verschiebungsfeld für das Registrierungsproblem ist. Für dieses Variationsproblem lässt sich die Euler-Lagrange-Gleichung als Optimalitätsbedingung formulieren. Die Euler-Lagrange-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung, deren Lösung ein notwendiges Kriterium für einen Minimierer des Variationsproblems liefert.

Definition 2.3

Sei $(Y(D), \|\cdot\|_Y)$ ein Banachraum. Ein *variationelles Registrierungsproblem* über einen Funktionenraum U ist dann das Variationsproblem

$$u^* \in \arg\min_{u \in U} \{\mathcal{D}(R, T; u) + \lambda \mathcal{R}(u)\}. \tag{2}$$

Dabei ist $\mathcal{D}(R, T; u)$ der sogenannte *Datenterm* und $\mathcal{R}(u)$ ein problemspezifischer *Regularisierer* mit *Regularisierungsparameter* $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Beispiel 2.4

Es folgen Beispiele für mögliche Datenterme [Mod09]

1. $Y(D) = L^2(D)$, der sum of squared differences (SSD) Datenterm

$$\mathcal{D}(R, T; u) = \|R - T_u\|_{L^2}^2. \tag{3}$$

2. $Y(D) = C^1(D)$, der normalized Gradient Fields Datenterm

$$\mathcal{D}(R, T; u) = \int_D 1 - \Big(n_{T_u}(x)^T n_R(x)\Big)^2 \, dx, \tag{4}$$

mit $n_{T_u}(x) := \frac{\nabla T_u(x)}{\sqrt{|\nabla T_u|^2 + \eta}}$ und Parameter $\eta > 0$.

Der Funktionenraum U und der Regularisierer $\mathcal{R}(u)$ haben große Bedeutung für die Interpretation und das Ergebnis der Registrierung und werden mit Hilfe von Vorinformationen über das Verschiebungsfeld u definiert, wie z.B. Glattheit, oder stückweise Konstantheit. Beispiele hierfür sind [MF02b, AFP00]:

1. Diffusive Regularisierung $U \subseteq C^1(D, D)$,

$$\mathcal{R}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \|\nabla u_l\|_{L^2(D)}^2 \tag{5}$$

2. TV Regularisierung $U \subseteq L^1(D, D), A := \{\phi \in C_c^1(D, \mathbb{R}^{n \times n}) \mid \|\phi\|_\infty \leq 1\}$,

$$\mathcal{R}(u) = TV(u) := \sup_{\phi \in A} \Big\{ - \int_D \langle u(x), \operatorname{Div} \phi(x) \rangle dx \Big\}. \tag{6}$$

3. Krümmungsbasierte Regularisierung $U \subseteq H^2(D, D)$ [Eva97, Abschnitt 5.2.2.]

$$\mathcal{R}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} \|\Delta u_l\|_{L^2(D)}^2. \tag{7}$$

Ein Lösungsansatz zur Lösung eines Variationsproblems ist die Bestimmung und Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung. Dazu benötigen wir zunächst die Definition der ersten Variation eines Funktionals.

Definition 2.5 (*GF63*)

Es seien U, V normierte Räume und $J : U \to V$. Dann ist die *erste Variation* in Richtung $\phi \in U$ an der Stelle $u \in U$ von J definiert als

$$d_\phi J(u) = \frac{d}{dt} J(u + t\phi)\Big|_{t=0}, \tag{8}$$

sofern die Ableitung auf der rechten Seite existiert.

Die erste Variation liefert eine notwendige Optimalitätsbedingung.

Lemma 2.6 (*GF63*)

Es seien U, V normierte Räume und $J : U \to V$. Ist dann u^* ein lokales Extremum von J, so gilt

$$d_\phi J(u^*) = 0, \tag{9}$$

für alle $\phi \in U$.
Gleichung (9) nennen wir die *Euler-Lagrange-Gleichung* von J.

Beweis: [GF63], Theorem 2. ■

Insbesondere folgt aus Lemma 2.6: Kann die Euler-Lagrange-Gleichung eindeutig gelöst werden und ist das entsprechende Variationsproblem eindeutig lösbar, so liefert die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung bereits die dann eindeutige Lösung des Variationsproblems. Eine Lösungsstrategie zur Lösung eines Variationsproblem wird sein, die Euler-Lagrange-Gleichung zu lösen. Hierzu benötigen wir noch eine wichtige Aussage.

Satz 2.7 (*Fundamentallemma der Variationsrechnung*)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in L^p(D)$. Dann gilt

$$\int_D u(x)\phi(x)\ dx = 0\ \forall\ \phi \in C_c^\infty(D) \Rightarrow u \equiv 0. \tag{10}$$

Analog gilt die mehrdimensionale Formel für alle $u \in L^p(D, \mathbb{R}^m)$

$$\int_D \langle u(x), \phi(x) \rangle_{\mathbb{R}^m}\ dx = 0\ \forall\ \phi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R}^m) \Rightarrow u \equiv 0. \tag{11}$$

Beweis: [Alt12] Satz 2.22. ■

Diesen Satz werden wir nutzen, um die Euler-Lagrange-Gleichung zu einer partiellen Differentialgleichung umzuformulieren.

2.2.2 Krümmungsbasierte Registrierung

In diesem Abschnitt wird die Bildregistrierung und das Lösungsverfahren für das Beispiel des krümmungsbasierten Regularisierers mit dem SSD Datenterm (Beispiel 2.4) vorgestellt [MF02b]. Dazu wird die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung bestimmt und dann ein numerischer Lösungsansatz präsentiert. Das nachfolgende Lemma liefert die formale Beschreibung sowie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung, auch bekannt als Biharmonische Gleichung [MF02a].

Lemma 2.8

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y(D) = L^2(D)$ der Bildraum mit den Bildern $T, R \in L^2(D)$. Es sei das Registrierungsproblem definiert, als

$$u^* \in \arg \min_{u \in H^2(D,D)} \left\{ \frac{1}{2} ||T_u - R||^2_{L^2(D)} + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=1}^{n} ||\Delta u_l||^2_{L^2(D)} \right\}. \tag{12}$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass D offen ist mit C^1-Rand [Eva97, Appendix C.1.], $T \in C^1(D)$ und $u \in C^4(D)$, lautet die Euler-Lagrange-Gleichung

$$(R - T_u)\nabla T_u + \lambda \Delta^2 u = 0. \tag{13}$$

Ist η die äußere Normale von D, so sind die natürlichen Randbedingungen gegeben durch

$$\Delta u_l = \langle \nabla \Delta u_l, \eta \rangle = 0 \tag{14}$$

auf dem Rand von D für alle Dimensionen $l = 1, \ldots, n$.

Beweis: Beweisidee aus [Mod04]. Zunächst bestimmen wir die erste Variation des Datenterms $\mathcal{D}(T, R; u) = \frac{1}{2}\|T_u - R\|^2_{L^2(D)}$. Sei dazu $\phi \in C_c^\infty(D, D)$. Dann gilt nach Definition 2.5

$$d_\phi \mathcal{D}(T, R; u) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{2} \|T_{u+h\phi} - R\|_{L^2(D)} + \frac{1}{2} \|T_u - R\|_{L^2(D)} \right). \tag{15}$$

Im folgenden nutzen wir die Taylorentwicklung [For13, §7 Corollar 1]

$$T_{u+h\phi} = T_u(x) - h\langle \nabla T_u(x), \phi(x) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{O}(h^2). \tag{16}$$

Dies liefert

$$d_\phi \mathcal{D}(T, R; u) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D \left(T_u - h\langle \nabla T_u, \phi \rangle_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{O}(h^2) - R \right)^2 - (T_u - R)^2 dx. \tag{17}$$

Ausmultiplizieren des ersten Summanden gibt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D \left(T_u - h\langle \nabla T_u, \phi \rangle_{R^n} + \mathcal{O}(h^2) - R \right)^2 - (T_u - R)^2 dx \tag{18}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D (T_u - R)^2 - 2 \left(h\langle \nabla T_u, \phi \rangle_{R^n} + \mathcal{O}(h^2) \right) (T_u - R) \tag{19}$$

$$+ \left(h\langle \nabla T_u, \phi \rangle_{R^n} + \mathcal{O}(h^2) \right)^2 - (T_u - R)^2 dx. \tag{20}$$

Der erste und der letzte Summand heben sich auf, der dritte Summand konvergiert gegen 0 für $h \to 0$. Entsprechend bleibt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D -2 \left(h \langle \nabla T_u, \phi \rangle_{R^n} + \mathcal{O}(h^2) \right) (T_u - R) \, dx \tag{21}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D -2 \left(h \langle \nabla T_u, \phi \rangle_{R^n} (T_u - R) \right) - 2\mathcal{O}(h^2) (T_u - R) \, dx. \tag{22}$$

Hier konvergiert der zweite Summand gegen 0 für $h \to 0$ und im ersten Summanden kürzt sich $\frac{2h}{2h} = 1$. Somit folgt insgesamt für die erste Variation des Datenterms

$$d_\phi \mathcal{D}(T, R; u) = \int_D \langle (R - T_u) \nabla T_u, \phi \rangle_{R^n}. \tag{23}$$

Nun berechnen wir die erste Variation des Regularisierers $\mathcal{R}(u) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n} ||\Delta^2 u_l||^2_{L^2(D)}$. Dazu gilt nach Definition 2.5

$$d_\phi \mathcal{R}(u) = \sum_{l=1}^{n} \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D \left(\Delta(u_l + h\phi_l) \right)^2 - \left(\Delta u_l \right)^2 dx. \tag{24}$$

Wir betrachten nun die Summanden einzeln, sei dazu $1 \leq l \leq n$ beliebig. Ausnutzen der Linearität des Laplaceoperators und Ausmultiplizieren liefert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D \left(\Delta(u_l + h\phi_l) \right)^2 - \left(\Delta u_l \right)^2 dx \tag{25}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_D \left(\Delta u_l \right)^2 - \left(\Delta u_l \right)^2 + 2h \Delta u_l \Delta \phi_l + \left(h \Delta \phi_l \right)^2 dx. \tag{26}$$

Analog zur Rechnung für den Datenterm liefert Kürzen und Konvergenz gegen 0 insgesamt die Gleichung

$$d_\phi \mathcal{R}(u) = \sum_{l=0}^{n} \int_D \Delta u_l \Delta \phi_l dx. \tag{27}$$

Anwenden der Green'schen Formel [Eva97] gibt

$$\int_D \Delta u_l \Delta \phi_l dx = - \int_{\partial D} \Delta u_l \langle \nabla \phi_l, \eta \rangle_{\mathbb{R}^d} d\mathcal{H}_{n-1}(x) + \int_D \langle \nabla \Delta u_l, \nabla \phi_l \rangle_{\mathbb{R}^d} dx. \tag{28}$$

Da $\phi \in C_c^\infty(D, D)$ gilt insbesondere $\langle \nabla \phi_l, \eta \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$ auf ∂D, somit ist der erste Summand 0. Nochmaliges Anwenden der Green'schen Formel auf den zweiten Summanden liefert dann

$$\int_D \langle \nabla \Delta u_l, \nabla \phi \rangle_{\mathbb{R}^d} dx = - \int_{\partial D} \phi_l \langle \nabla \Delta u_l, \eta \rangle_{\mathbb{R}^d} d\mathcal{H}_{n-1}(x) + \int_D \phi_l \Delta^2 u_l dx. \tag{29}$$

Da $\phi \in C_c^\infty(D, D)$ gilt insbesondere $\phi = 0$ auf ∂D und der erste Summand ist wiederum 0. Somit folgt insgesamt

$$d_\phi \mathcal{R}(u) = \sum_{l=0}^{n} \int_D \phi_l \Delta^2 u_l dx. \tag{30}$$

Es gilt also mit (23) und (30) für die erste Variation des gesamten Funktionals für $\phi \in C_c^\infty(D,D)$:

$$d_\phi(\mathcal{D}(T,R;u)+\lambda\mathcal{R}(u)) = \int_D \langle (R-T_u)\,\nabla T_u, \phi\rangle_{R^n} + \lambda \int_D \langle \Delta^2 u, \phi\rangle dx. \tag{31}$$

Linearität des Integrals und des Skalarproduktes liefert

$$d_\phi(\mathcal{D}(T,R;u)+\lambda\mathcal{R}(u)) = \int_D \langle (R-T_u)\,\nabla T_u + \Delta^2 u, \phi\rangle dx. \tag{32}$$

Mit einer Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung (Theorem 2.7) folgt die Euler-Lagrange-Gleichung

$$(R-T_u)\nabla T_u + \lambda\Delta^2 u = 0 \tag{33}$$

Es bleiben die Randbedingungen (14) zu zeigen. Sei dazu $\tilde{\phi} \in C^\infty(D,D)$ mit $\tilde{\phi} \neq 0$ und $\langle \nabla\phi_l, \eta\rangle_{\mathbb{R}^d} \neq 0$ auf ∂D. Mit analoger Rechnung folgt analog zu (29)

$$-\int_{\partial D} \tilde{\phi}_l \langle \nabla\Delta u_l, \eta\rangle_{\mathbb{R}^d} d\mathcal{H}_{n-1}(x) + \int_D \tilde{\phi}_l\, \Delta^2 u_l dx = 0 \tag{34}$$

und analog zu (28)

$$-\int_{\partial D} \Delta u_l \langle \nabla\,\tilde{\phi}_l, \eta\rangle_{\mathbb{R}^d} d\mathcal{H}_{n-1}(x) + \int_D \langle \nabla\Delta u_l, \nabla\,\tilde{\phi}_l\rangle_{\mathbb{R}^d} dx = 0. \tag{35}$$

Damit die jeweiligen Randterme 0 werden, ergeben sich die natürlichen Randbedingungen

$$\Delta u_l = \langle \nabla\Delta u_l, \eta\rangle = 0 \tag{36}$$

auf ∂D für alle Dimensionen $l = 1,\dots,n$. Somit ist die Behauptung bewiesen. ■

Nun wird die numerische Handhabung thematisiert. Dazu wird der Laplace-Operator mit einer Finite-Differenzen-Methode approximiert. Sei zunächst $\tilde{u}$ ein diskretes Verschiebungsfeld mit äquidistanten Punkten mit Abstand h. Dann gilt nach [Mod04]

$$\Delta u \approx \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \tilde{u}, \tag{37}$$

wobei $*$ die diskrete Faltung (Definition A.3) beschreibt. Die Randbedingungen der Faltung müssen hier je nach Randbedingungen, die für u gefordert sind, angepasst werden. Für die numerische Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung (13) wird eine Diskretisierung des Operators Δ^2 benötigt, die sich durch zweimaliges Anwenden von (37) ergibt [Mod04]:

$$\Delta^2 u \approx \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \tilde{u} \tag{38}$$

$$= \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \tilde{u}. \tag{39}$$

Da die Faltung linear ist, definieren wir die lineare Abbildung $\mathcal{A}$ als

$$\mathcal{A}(\tilde{u}) = \frac{1}{h^4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & -8 & 20 & -8 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \tilde{u}, \tag{40}$$

mit den Randbedingungen (14). Zur genauen Konstruktion von $\mathcal{A}$ als Matrix siehe [Mod04].
Um die Euler-Lagrange-Gleichung (13) zu approximieren, brauchen wir außerdem eine diskrete Variante des Laplace-Operators ∇. Dazu seien $\tilde{R}, \tilde{T}$ äquidistant diskretisierte Varianten von R, T mit Punktabstand h. Eine einfache Möglichkeit ist die Faltung mit dem Kern [BL11, Kapitel 3.3]

$$\partial_x T \approx \frac{1}{2h}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \tilde{T}. \tag{41}$$

Etwas weniger anfällig für Rauschen ist der Sobelfilter [BL11, Kapitel 3.3]

$$\partial_x T \approx \frac{1}{8h}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \tilde{T}. \tag{42}$$

Die Diskretisierung von $\partial_y T$ ergibt sich analog und entsprechend auch die Diskretisierung von $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}$. Als Randwerte für die Diskretisierung von ∇ wählen wir die Neumann-Randbedingungen (Definition A.3). Sei nun $\tilde{\nabla}$ die Diskretisierung des Gradienten aus (42). Die diskrete Variante von (13) lautet damit

$$(\tilde{R} - \tilde{T}_u)\tilde{\nabla}\tilde{T}_u + \lambda\mathcal{A}\tilde{u} = 0. \tag{43}$$

Dies ist eine nichtlineare Gleichung, zu deren Lösung sich eine Zeititerationsverfahren anbietet [Mod04]. Dazu wird eine künstliche Zeit eingeführt, von der das Verschiebungsfeld u und die diskretisierte Version $\tilde{u}$ abhängen

$$u(x) = u(t, x), \tag{44}$$
$$\tilde{u} = \tilde{u}(t). \tag{45}$$

Gleichung (43) ergänzen wir nun um eine Zeitableitung

$$\partial_t\tilde{u} + (\tilde{R} - \tilde{T}_u)\tilde{\nabla}\tilde{T}_u + \lambda\mathcal{A}\tilde{u} = 0. \tag{46}$$

und suchen dann eine sogenannte Lösung im Gleichgewichtszustand dieser Gleichung: Wir suchen eine Lösung dieser Gleichung und einen Zeitpunkt s, für den gilt

$$\partial_t\tilde{u}|_{t=s} = 0. \tag{47}$$

Dann löst $\tilde{u}(s)$ auch (43). Zur numerischen Lösung wird die Zeit als diskrete Zeitpunkte mit Schrittweite $\tau > 0$ diskretisiert:

$$\tilde{u}^i := \tilde{u}(i\tau) \tag{48}$$

für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Der Parameter τ muss problemspezifisch gesetzt werden. Ein kleines τ führt zu sehr langsamer Konvergenzgeschwindigkeit des nachfolgenden Algorithmus, ein großes τ kann zu numerischer Instabilität führen.
Wir diskretisieren die Zeitableitung in (46) über die Vorwärts-Euler-Diskretisierung [Tho95]

$$\partial_t \tilde{u}(i\tau) \approx \frac{\tilde{u}^{i+1} - \tilde{u}^i}{\tau}. \tag{49}$$

Außerdem schreiben wir Gleichung (46) um zu

$$\frac{\tilde{u}^{i+1} - \tilde{u}^i}{\tau} + (\tilde{R} - \tilde{T}_{u^i})\tilde{\nabla}\tilde{T}_{u^i} + \lambda\mathcal{A}\tilde{u}^{i+1} = 0, \tag{50}$$

Da eine Lösung im Gleichgewichtszustand gesucht wird, gilt dann $\tilde{u}^i = \tilde{u}^{i+1}$. Somit ist eine Lösung im Gleichgewichtszustand dieser Gleichung, auch eine Lösung von (43). Gegeben ein initiales Verschiebungsfeld $\tilde{u}^0$, ist (50) ein System von linearen Gleichungen, das iterativ gelöst werden kann, bis $\tilde{u}^i = \tilde{u}^{i+1}$ für einen Zeitpunkt $i\tau$ gilt. Dieses $\tilde{u}^i$ ist die gesuchte Lösung für (43). $\tilde{u}_0$ kann über Vorwissen formuliert sein, um Zeit zu sparen, ansonsten ist $\tilde{u}_0 = 0$ möglich. Zur effizienten Lösung des linearen Gleichungssystems siehe [Mod04].

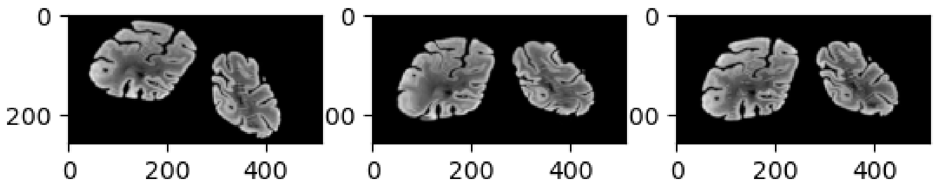

Abbildung 3: Ergebnis einer krümmungsbasierten Registrierung, Links: Templatebild, Mitte: verschobenes Templatebild, Rechts: Referenzbild. Template- und Referenzbild aus [Mod09].

Kapitel 3: Die Polynomial Chaos Expansion

In diesem Kapitel werden die Grundlage für die Bildverarbeitung mit stochastischen Differentialgleichungen gelegt, indem die Polynomial Chaos Expansion eingeführt wird. Diese beschreibt eine Zerlegung einer Zufallsvariablen in polynomielle Basiselemente. Ziel ist für eine Zufallsvariable unter gewissen Voraussetzungen eine Reihendarstellung zu finden, wobei jeder $n-$te Summand ein Polynom von Grad n ist. Die Polynomial Chaos Expansion geht zurück auf das homogene Chaos von Wiener [Wie38] und wird häufig auch als Wiener Chaos bezeichnet. Das zentrale Resultat, unter welchen Voraussetzungen eine solche Zerlegung existiert, fassen wir am Ende des Kapitels in einer Verallgemeinerung des Theorems von Cameron und Martin [CM47] zusammen.

3.1 Orthonormalzerlegung des L^2

In diesem Abschnitt folgen wir im wesentlichen [Jan97]. Wir beginnen mit der einer Zerlegung des L^2 über einem Wahrscheinlichkeitsraum in orthogonale Räume, die von Polynomen aufgespannt werden.
Dazu sei in diesem Kapitel immer $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ eine Folge unabhängiger, standardnormalverteilter Zufallsvariablen.

Definition 3.1

Sei $\operatorname{grad}(p)$ der Gesamtgrad eines Polynoms in mehreren Variablen. Dann sei für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert

$$\mathcal{P}_n := \{\, p |\ p \text{ ist Polynom in } (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m}), \operatorname{grad}(p) \leq n, i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}. \tag{51}$$

Außerdem sei

$$\mathcal{H}_0 := \mathcal{P}_0, \tag{52}$$

$$\mathcal{H}_n := \overline{\mathcal{P}}_n \cap \overline{\mathcal{P}}_{n-1}^{\perp}, n \geq 1, \tag{53}$$

wobei $\overline{\mathcal{P}}_n$ den Abschluss von $\mathcal{P}_n$ als Unterraum von $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bezeichnet.

Es gelten folgende Eigenschaften für die Räume $\mathcal{P}_n$ und $\mathcal{H}_n$:

Lemma 3.2

1. $\left(\overline{\mathcal{P}}_n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine aufsteigende Folge abgeschlossener Mengen.
2. $\mathcal{H}_k \perp \mathcal{H}_l$ für alle $k \neq l, k, l \in \mathbb{N}_0$.
3. $\overline{\mathcal{P}}_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{H}_k$.
4. $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_n}$.

Beweis : Eigenschaften 1-3 ergeben sich direkt aus der Definition.
Eigenschaft 4 ergibt sich aus Eigenschaft 3 für $n \to \infty$ und mit dem Wissen, dass die direkte Summe orthogonaler abgeschlossener Untervektorräume abgeschlossen ist [Wei00, Satz 1.48]. ■

Der nächste Satz zeigt, dass die Vereinigung in Eigenschaft 4 bereits den gesamten $L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ ergibt.

Satz 3.3 (*Jan97, Theorem 2.6.*)

Es sei $\mathcal{F}(\xi)$ die von ξ erzeugte σ-Algebra (Definition A.11). Dann gilt

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k = L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P}).$$

Für den Beweis von Satz 3.3 wird ein Hilfslemma benötigt.

Lemma 3.4

Sei i die komplexe Einheitswurzel, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ und $\mathbb{E}\left(Xe^{-i\xi_k}\right) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt $X = 0$ $\mathbb{P}-$f.s.

Beweis : [Jan97] Lemma 2.7. ■

Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun Satz 3.3 bewiesen werden.

Beweis von Satz 3.3 : Beweisidee aus [Jan97]. Definiere $\mathcal{P} := \overline{\cup_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_n}$. Da Polynome messbar bezüglich ξ und quadrat-integrierbar sind, gilt $\overline{\mathcal{P}}_n \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da $L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ außerdem abgeschlossen ist, folgt $\mathcal{P} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$.
Es bleibt zu zeigen, dass $L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P}) \subseteq \mathcal{P}$, mit Eigenschaft 4 aus Lemma 3.2 folgt dann die Behauptung.
Sei dazu $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$, so dass gilt $X \perp \mathcal{P}$. Wir zeigen nun, dass gilt $X = 0$ $\mathbb{P}$-f.s., denn dann gilt $\mathcal{P}^{\perp} = \{0\}$ und somit die Behauptung. Sei i die komplexe Einheitswurzel. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit der Dreiecksungleichung

$$\left| e^{i\xi_k} - \sum_{l=0}^{n} \frac{(i\xi_k)^l}{l!} \right| \leq 1 + \sum_{l=0}^{n} \frac{(|\xi_k|)^l}{l!}. \tag{54}$$

Die rechte Seite ist punktweise beschränkt durch

$$1 + \sum_{l=0}^{n} \frac{(|\xi_k|)^l}{l!} \leq 1 + e^{|\xi_k|} \leq 1 + e^{\xi_k} + e^{-\xi_k}. \tag{55}$$

Die rechte Seite ist nun in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, denn $\mathbb{E}\left(\left(e^{\xi_k}\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(e^{2\xi_k}\right)$ ist die momenterzeugende Funktion der normalverteilten Zufallsvariable ξ_k an der Stelle 2 und somit endlich [AL06, Remark 6.2.3].
Außerdem gilt, dass die linke Seite in (54) punktweise gegen 0 konvergiert [For16, §8 Satz

1]. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz [AL06, Thm 2.3.11.] folgt dann

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{(i\xi_k)^l}{l!} \underset{n\to\infty}{\to} e^{i\xi_k} \tag{56}$$

in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Da gilt $(\xi_k)^l \in \mathcal{P}_l$ und da $\mathcal{P}$ per Definition abgeschlossen ist, folgt $e^{i\xi_k} \in \mathcal{P}$.
Es folgt also mit der Annahme $X \perp \mathcal{P}$

$$\mathbb{E}\left(Xe^{i\xi_k}\right) = 0 \tag{57}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt mit der Hölderungleichung [Kle14, Theorem 7.16] und da $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$:

$$\mathbb{E}(|X|) \leq \left(\mathbb{E}(|1|^2)\mathbb{E}(|X|^2)\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{58}$$

und somit $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$. Mit Lemma 3.4 folgt $X = 0$ $\mathbb{P}$-f.s. Dies zeigt die Behauptung. ■

Damit wurde der Raum $L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ in polynomiale und orthonormale Teilräume zerlegt.

3.2 Die Hermiteschen Polynome als Basis

In diesem Abschnitt werden die Hermiteschen Polynome vorgestellt, die eine passende Basis zu der Zerlegung in Abschnitt 3.1 liefern. Mit Hilfe dieser Basis kann dann die Polynomial Chaos Expansion definiert werden. Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an [Nua06].

Definition 3.5

Es sei $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ definiert als

$$H_0(x) := 1 \tag{59}$$

$$H_n(x) := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right), n \geq 0 \tag{60}$$

Wir nennen H_n das *Hermitesche Polynom* zum Grad n.

Bemerkung zu Definition 3.5: Die Tatsache, dass die gegebene Definition der Hermiteschen Polynome tatsächlich Polynome beschreiben kann über eine Induktion bewiesen werden. Im Induktionsschritt wird sich dabei zu nutze gemacht, dass die n-te Ableitung von $e^{-\frac{x^2}{2}}$ von der Form $q(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ für ein Polynom q ist, und sich dann die Terme $e^{-\frac{x^2}{2}}$ und $e^{\frac{x^2}{2}}$ aufheben.

Diese Polynome bilden angewandt auf normalverteilte Zufallsvariaben ein Orthonormalsystem im $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Lemma 3.6

Sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ standardnormalverteilt. Dann gilt für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(H_n(X)H_m(X)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } m \neq n, \\ 1, & \text{falls } n = m. \end{cases} \tag{61}$$

Beweis: [Nua06] Lemma 1.1.1. ∎

Aus diesen eindimensionalen orthonormalen Polynomen werden nun Basiselemente für die Räume $\mathcal{P}_n$ aus Abschnitt 3.1 gebildet. Dazu wird die Notation des Multiindizes benötigt.
Es sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ ein Multiindex, wenn $\alpha_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem definieren wir $|\alpha| := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \alpha_i$ und schreiben zukünftig $\alpha = 0$ für $\alpha = (0, 0, \ldots)$.
Damit kann die mehrdimensionale polynomiale Basis definiert werden.

Definition 3.7

Es sei α ein Multiindex. Dann definiere für ein $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\Psi_\alpha(x) = \prod_{i=0}^{\infty} H_{\alpha_i}(x_i). \tag{62}$$

Das unendliche Produkt ist hier wohldefiniert, da nur endliche viele Einträge $\alpha_i \neq 0$ sind und außerdem gilt $H_0 \equiv 1$. Analog zur Orthonormalität der H_n gilt eine Aussage für die Polynome Ψ.

Lemma 3.8 (*Nua06, Proposition 1.1.1*)

Es sei $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ eine Folge unabhängiger, standardnormalverteilter Zufallsvariablen. Dann gilt für alle Multiindizes α, β

$$\mathbb{E}(\Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \neq \beta, \\ 1, & \text{falls } \alpha = \beta. \end{cases} \tag{63}$$

Insbesondere folgt

$$\mathbb{E}(\Psi_\alpha(\xi)) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \neq 0, \\ 1, & \text{falls } \alpha = 0. \end{cases} \tag{64}$$

Beweis: Es gilt mit Definition 3.7

$$\mathbb{E}(\Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{\infty} H_{\alpha_i}(\xi_i) \prod_{i=0}^{\infty} H_{\beta_i}(\xi_i)\right) \tag{65}$$

$$= \mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{\infty} H_{\alpha_i}(\xi_i) H_{\beta_i}(\xi_i)\right). \tag{66}$$

Da die Zufallsvariablen ξ_k zueinander unabhängig sind, sind auch $H_k(\xi_k)$ zueinander unabhängig. Da außerdem im Produkt nur endlich viele Faktoren ungleich 1 sind, lässt sich das Produkt aus dem Erwartungswert herausziehen [AL06, Proposition 7.1.3],

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=0}^{\infty} H_{\alpha_i}(\xi_i) H_{\beta_i}(\xi_i)\right) = \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(H_{\alpha_i}(\xi_i) H_{\beta_i}(\xi_i)\right). \tag{67}$$

Mit Lemma 3.6 gilt nun die Behauptung, da $\alpha = \beta$ genau dann gilt, wenn $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Gleichung (64) folgt dann mit $\beta = 0$ in (63) und der Tatsache, dass $\Psi_0 \equiv 1$. ■

Mit der Notation aus Abschnitt 3.1 folgt außerdem dass $\Psi_\alpha(\xi) \in \mathcal{H}_n$, wenn $n = |\alpha|$ ist. Dies werden wir für den Beweis des folgenden Satzes nutzen, der die zentrale Aussage diese Kapitels liefert. Er geht zurück auf Cameron und Martin [CM47], die einen Spezialfall dieses Satzes bewiesen haben. Diese Verallgemeinerung findet sich in [PKP17].

Satz 3.9

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ eine Folge standardnormalverteilter, unabhängiger Zufallsvariablen. Dann ist das System $\{\Psi_\alpha(\xi) | \alpha \text{ ist ein Multiindex}\}$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$.
Für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ definiere zusätzlich

$$X_\alpha := \int_\Omega X \;\Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}. \tag{68}$$

Dann gilt außerdem

$$\lim_{p\to\infty} \left\| X - \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = 0. \tag{69}$$

Beweis: Beweisidee aus [Nua06, Proposition 1.1.1]. Zunächst sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest. Da die Hermiteschen Polynome orthonormal sind (Lemma 3.6), sind sie auch linear unabhängig. Für festes standardnormalverteiltes η bilden die Hermiteschen Polynome vom Grad kleiner gleich n also ein linear unabhängiges System mit $n+1$-Elementen im $n+1$-dimensionalen Vektorraum

$$\{p(\eta) | p \text{ ist Polynom mit } \operatorname{grad}(p) \leq n\} \tag{70}$$

und somit eine Basis dieses Vektorraums. Damit folgt, dass auch das Orthonormalsystem

$$\{\Psi_\alpha(\xi) | \alpha \text{ ist ein Multiindex mit } |\alpha| \leq n\} \tag{71}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_n$ darstellt. Nun folgt mit Lemma 3.2 3. direkt, dass

$$\{\Psi_\alpha(\xi) | \alpha \text{ ist ein Multiindex mit } |\alpha| = n\} \tag{72}$$

eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_n$ ist. Mit der Zelegung aus Satz 3.3 folgt dann die Behauptung. ■

Wir werden in dieser Arbeit von der Polynomial Chaos Expansion zum Grad p reden. Gemeint ist dann die Approximation

$$X \approx \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi). \tag{73}$$

Außerdem werden wir in dieser Arbeit vereinfachend $\Psi_\alpha(\xi)$ anstatt $\Psi_\alpha(\xi(\omega))$ schreiben.

3.3 Polynomial Chaos Expansion auf Zufallsfeldern

Zuletzt wollen wir das Konzept der Polynomial Chaos Expansion auf Zufallsfelder erweitern. Diese Erweiterung werden wir in Kapitel 4 nutzen, um ein stochastisches Bild zu approximieren.

Definition 3.10 (*PKP17, Definition 4.8*)

Es sei $Y(D)$ ein Funktionenraum über $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir nennen X ein *Zufallsfeld*, wenn gilt

$$X(x, \cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P}) \text{ für alle } x \in D, \tag{74}$$

$$X(\cdot, \omega) \in Y(D) \; \mathbb{P}\text{-f.s. für } \omega \in \Omega. \tag{75}$$

Wir schreiben zukünftig $X \in Y(D) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$.
Es seien ξ, Ψ_α für alle Multiindizes α definiert wie in Satz 3.9. Dann sind die *Modi* von X Funktionen $X_\alpha : Y(D) \to \mathbb{R}$ und über den Zusammenhang definiert

$$X_\alpha(x) = \int_\Omega X(x, \omega) \Psi_\alpha(\xi) \mathbb{P}(d\omega). \tag{76}$$

Die Polynomial Chaos Expansion von X zum Grad $p \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$X(x, \omega) \approx \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x) \Psi_\alpha(\xi). \tag{77}$$

Ist $Y(D)$ ein Banachraum, so implizieren die Eigenschaften (74) - (75) nicht, dass $Y(D) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ wieder ein Banachraum ist. Deshalb fordern wir für den Spezialfall $Y(D) \subseteq L^2(D)$ zusätzlich

$$\int_D \int_\Omega |X(x, \omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega) dx < \infty. \tag{78}$$

Bemerkung zu Definition 3.10: Für die Definition der Polynomial Chaos Expansion auf einem Zufallsfeld ist Eigenschaft 78 nicht nötig, da diese punktweise definiert wird.

Der Satz von Cameron-Martin (Satz 3.9) gilt hier punktweise. Das entsprechende Resultat liefert das folgende Korollar.

Korollar 3.11

Es sei X ein Zufallsfeld und X_α die Modi der Polynomial Chaos Expansion wie in Definition 3.10. Dann gilt

$$\lim_{p\to\infty} \left\| X(x,\cdot) - \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi) \right\|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = 0 \tag{79}$$

für alle $x \in D$.

Beweis: Folgt für festes $x \in D$ direkt aus Satz 3.9. ■

3.4 Rechenregeln

In diesem Kapitel wird betrachtet, wie mit der Polynomial Chaos Expansion gerechnet werden kann. Mit ihrer Hilfe können die Momente der zerlegten Zufallsvariablen berechnet werden. Außerdem wird thematisiert, wie sich die Polynomial Chaos Expansion für Summen und Produkte von Zufallsvariablen verhält. Die ersten Rechenregeln werden jeweils nur für Zufallsvariablen eingeführt, sie lassen sich aber punktweise auf die Polynomial Chaos Expansion von Zufallsfeldern übertragen. Zuletzt befassen wir uns mit der Polynomial Chaos Expansion von Ableitungen von Zufallsfeldern. Diese Rechenregeln werden in Kapitel 4 zur numerischen Handhabung stochastischer Bilder genutzt, wofür die Annahme gemacht wird, dass die zu approximierende Zufallsvariable X nur von endlich vielen Basiszufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ abhängt. Dies impliziert $X_\alpha = 0$, falls ein $j > n$ existiert mit $\alpha_j \neq 0$: Aufgrund der Unabhängigkeit von X zu $H_{\alpha_j}(\xi_{\alpha_j})$ und Lemma 3.6 gilt

$$X_\alpha = \mathbb{E}\left(X\Psi_\alpha(\xi)\right) = \mathbb{E}\left(X \prod_{i=0}^{\infty} H_{\alpha_i}(\xi_{\alpha_i})\right) = \mathbb{E}\left(X \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{\infty} H_{\alpha_i}(\xi_{\alpha_i})\right) \mathbb{E}(H_{\alpha_j}(\xi_{\alpha_j})) = 0. \tag{80}$$

Diese Modi werden im Folgenden ignoriert. Folglich haben die Multiindizes α nun Länge n und die Summe $\sum\limits_{|\alpha|=0}^{p}$ ist eine endliche Summe.

Zuerst betrachten wir, wie aus den Modi der Zufallsvariablen direkt die Momente berechnet werden können.

Satz 3.12 (*PKP17, Abschnitt 4.3.1*)

Es sei $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ nur von endlich vielen Basiszufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ abhängig und es sei

$$X = \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \tag{81}$$

die Polynomial Chaos Expansion von X zum Grad p.
Dann gilt für den Erwartungswert von X:

$$\mathbb{E}(X) = X_0 \tag{82}$$

Außerdem gilt für das m-te zentrale Moment von X:

$$M_m(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^m\right) = \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=1}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi)\right)^m d\mathbb{P}. \tag{83}$$

Insbesondere folgt damit für die Varianz

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \sum_{|\alpha|=1}^{p} X_\alpha^2 \tag{84}$$

Beweis: Wir beweisen zunächst (82). Setzen wir die Polynomial Chaos Expansion von X in die Definition des Erwartungswertes A.10 ein, folgt

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}. \tag{85}$$

Mit der Linearität des Integrals gilt dann

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}. \tag{86}$$

Mit Eigenschaft (64) sind alle Summanden für $|\alpha| \neq 0$ gleich 0, dies liefert

$$\mathbb{E}(X) = X_0. \tag{87}$$

Nun folgt der Beweis von (83). (84) ergibt sich dann als direkte Folgerung. Es gilt laut Definition A.10:

$$M_m(X) = \mathbb{E}((X - E(X))^m). \tag{88}$$

Setzen wir hier die Polynomial Chaos Expansion (81) von X ein, ergibt sich

$$M_m(X) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi) - \mathbb{E}(X)\right)^m\right). \tag{89}$$

Mit (82) folgt

$$M_m(X) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi) - X_0\right)^m\right) \tag{90}$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\sum_{|\alpha|=1}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi)\right)^m\right). \tag{91}$$

Mit der Definition des Erwartungswertes A.10 folgt nun die Behauptung (83).
Für $m = 2$ entspricht $M_m(X)$ der Varianz von X. Ausmultiplizieren des dann quadratischen Terms in (91) und die Linearität des Integrals liefern

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \int_\Omega \sum_{|\alpha|=1}^{p} \sum_{|\beta|=1}^{p} X_\alpha X_\beta \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi) d\mathbb{P} \tag{92}$$

$$= \sum_{|\alpha|=1}^{p} \sum_{|\beta|=1}^{p} X_\alpha X_\beta \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi) d\mathbb{P} \tag{93}$$

Mit der Orthonormalität der Polynome $\Psi_\alpha(\xi)$ (Lemma 3.8) folgt Behauptung (84). ■

Bemerkung zu Satz 3.12: Im Allgemeinen existieren für $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ die Momente für $m > 2$ nicht unbedingt. Wir können also mit der Formel in (83) nur die Momente der Polynomial Chaos Expansion zum Grad p (81) berechnen, die jedoch nicht gegen die Momente der ursprünglichen Zufallsvariablen X konvergieren müssen. Im Fall der Varianz gilt jedoch, dass die Varianz der Approximation (84) gegen die Varianz von X konvergiert [EMSU12, Theorem 2.2].

Es folgen zwei wichtige Rechenregeln dazu, wie sich die Polynomial Chaos Expansion bei Summen und Produkten von Zufallsvariablen verhält.

Satz 3.13

Es seien die Voraussetzungen aus Satz 3.12 gegeben. Außerdem sei $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ ebenfalls nur von endlich vielen Basiszufallsvariablen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ abhängig und habe die Polynomial Chaos Expansion

$$Y = \sum_{|\alpha|=0}^{p} Y_\alpha \Psi_\alpha(\xi). \tag{94}$$

Dann gilt für die Addition

$$(X + Y)_\alpha = Y_\alpha + X_\alpha. \tag{95}$$

Für die Multiplikation gilt

$$(XY)_\alpha = \sum_{|\gamma|=0}^{p} \sum_{|\beta|=0}^{p} X_\gamma Y_\beta \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)\Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} \tag{96}$$

Beweis: Ein ausführlicher Beweis findet sich in [DNP+04].
Die Regel der Addition erfolgt über direktes Nachrechnen. Ein ähnlich einfacher Zusammenhang bei der Multiplikation schlägt fehl, da das Produkt zweier Polynome von Gesamtgrad p im Allgemeinen Gesamtgrad p^2 haben könnte. Diese Polynome sind allerdings für die Polynomial Chaos Expansion zum Grad p nicht zulässig, weshalb eine Projektion auf den Raum der Polynome vom Gesamtgrad p vorgenommen werden muss. ■

Bemerkung zu Satz 3.13: Es gilt für Zufallsvariablen $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ auch $X + Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ und insbesondere konvergiert die Summe der Polynomials Chaos Expansions von X und Y auch gegen $X + Y$. Im Allgemeinen gilt allerdings nicht $XY \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ und damit auch nicht die Konvergenz des Produktes der Polynomial Chaos Expansions von X und Y gegen XY. Gleichung (96) gilt also im Allgemeinen nur, wenn X und Y bereits exakt durch ihre Polynomial Chaos Expansion zum Grad p beschrieben werden.

Zuletzt werden zwei Rechenregeln für Zufallsfelder vorgestellt. Erst untersuchen wir für Zufallsfelder mit ausreichender Glattheit, wie wir die Ableitung eines solchen mit der Polynomial Chaos Expansion approximieren können. Dieses Resultat wird essentiell zur numerischen Lösung stochastischer partieller Differentialgleichungen sein, wie sie in der stochastischen Bildregistrierung in Kapitel 4 vorkommen. Dazu sei $X(x, \cdot)$ in Satz 3.14 und Satz 3.15 für alle $x \in D$ jeweils nur von endlich vielen Basiszufallsvariablen $\xi_1, \dots, \xi_n$ abhängig.

Satz 3.14

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $X \in C^1(D) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ mit Polynomial Chaos Expansion

$$X(x, \omega) = \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x) \Psi(\xi). \tag{97}$$

Es gelte für die Ableitung $X' \in C(D) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$. Dann folgt

$$(X')_\alpha(x) = (X_\alpha)'(x) \tag{98}$$

für alle $x \in D$.
Es folgt für die Polynomial Chaos Expansion von X'

$$\lim_{p \to \infty} \left| \left| X'(x, \cdot) - \sum_{|\alpha|=0}^{p} (X_\alpha)'(x) \Psi_\alpha(\xi) \right| \right|_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})} = 0, \tag{99}$$

punktweise für alle $x \in D$.

Beweis: Wir beweisen zunächst die Folgerung (99). Da für alle $x \in D$ gilt, dass $X'(x, \cdot) \in$

$L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$, folgt mit Korollar 3.11

$$\lim_{p\to\infty} \left|\left| X' - \sum_{|\alpha|=0}^{p} (X')_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi) \right|\right|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = 0. \tag{100}$$

Mit Gleichung (98) folgt die Folgerung (99).
Nun beweisen wir (98), dazu nutzen wir die Definition der Modi X_α. Mit dem Differenzenquotient für die Ableitung folgt dann

$$(X_\alpha)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(X_\alpha(x+h) - X_\alpha(x) \right) \tag{101}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_\Omega X(x+h,\omega) - X(x,\omega) \right) \Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega). \tag{102}$$

Es gilt per Definition, dass

$$\lim_{h\to 0} \frac{X(x+h,\omega) - X(x,\omega)}{h} = X'(x,\omega) \tag{103}$$

punktweise (bezüglich ω) konvergiert. Wir wollen nun den Satz von der majorisierten Konvergenz [AL06, Thm 2.3.11.] anwenden, das heißt gesucht wird eine Majorante $Y_x \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, abhängig vom Punkt x, für die gilt: Es existiert ein H_ω, so dass gilt

$$Y_x(\omega) \geq \left| \frac{X(x+h,\omega) - X(x,\omega)}{h} \right| \tag{104}$$

für $\omega \in \Omega$ $\mathbb{P}$-f.s und für alle $|h| \leq H_\omega$.
Es gilt $X(\cdot,\omega) \in C^1(D)$ $\mathbb{P}$-f.s.(Definition 3.10). Wir können also den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden [For16, §16 Corollar 1]. Dazu wähle ein $H \in \mathbb{R}^+$ so klein, dass gilt $[x-H, x+H] \subseteq D$, was möglich ist, da D offen ist. Wähle außerdem ein $\epsilon > 0$ und dazu ein $\tilde{H}_\omega \in \mathbb{R}^+$ (abhängig von ω) so klein, dass gilt

$$|X'(z,\omega) - X'(x,\omega)| < \epsilon \tag{105}$$

für alle $z \in [x - \tilde{H}_\omega, x + \tilde{H}_\omega]$, was aufgrund der Stetigkeit von $X'(\cdot,\omega)$ möglich ist. Damit sei definiert

$$H_\omega = \min(H, \tilde{H}_\omega). \tag{106}$$

Dann liefert der Mittelwertsatz für alle $h \leq H_\omega$ die Existenz eines $y_h \in [x - H_\omega, x + H_\omega]$, so dass gilt

$$\frac{X(x+h,\omega) - X(x,\omega)}{h} = X'(y_h,\omega). \tag{107}$$

Da $X'(\cdot,\omega)$ $\mathbb{P}$-f.s. stetig ist, nimmt $|X'|$ auf dem kompakten Intervall $[x - H_\omega, x + H_\omega]$ ein Maximum an, d.h. es existiert ein $y_\omega \in [x - H_\omega, x + H_\omega]$, so dass

$$|X'(y_\omega,\omega)| \geq |X'(\bar{x},\omega)|. \tag{108}$$

für alle $\bar{x} \in [x - H_\omega, x + H_\omega]$ und für $\omega \in \Omega$ $\mathbb{P}$-f.s.
Sei nun die Majorante $Y_x(\omega)$ definiert durch

$$Y_x(\omega) := |X'(y_\omega,\omega)|, \tag{109}$$

denn dann gilt mit (107) und (108)

$$\left|\frac{X(x+h,\omega)-X(x,\omega)}{h}\right| \leq Y_x(\omega) \tag{110}$$

für $\omega \in \Omega$ $\mathbb{P}$-f.s. Zu zeigen bleibt $Y_x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, also dass

$$\int_\Omega |Y_x(\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega |X'(y_\omega,\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega) < \infty \tag{111}$$

gilt. Wir ergänzen einmal den Term $0 = X'(x,\omega) - X'(x,\omega)$ und nutzen die Minkowskiungleichung [Kle14, Theorem 7.17], mit der gilt

$$\int_\Omega |X'(y_\omega,\omega)|^2 d\mathbb{P} = \int_\Omega |X'(y_\omega,\omega) - X'(x,\omega) + X'(x,\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega) \tag{112}$$

$$\leq \left(\left(\int_\Omega |X'(y_\omega,\omega) - X'(x,\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |X'(x,\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2. \tag{113}$$

Der Integrand des ersten Summanden kann mit (105) abgeschätzt werden, da $y_\omega \in [x - H_\omega, x + H_\omega]$.

$$\left(\left(\int_\Omega |X'(y_\omega,\omega) - X'(x,\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |X'(x,\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 \tag{114}$$

$$\leq \left(\left(\int_\Omega \epsilon^2 \mathbb{P}(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega |X'(x,\omega)|^2 \mathbb{P}(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2. \tag{115}$$

Da $X'(x,\cdot) \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ ist der zweite Summand endlich. Da außerdem ϵ von ω unabhängig gewählt war, ist der erste Summand ebenfalls endlich und somit die ganze Summe. Es gilt also $Y_x \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.
Damit kann nun der Satz von der majorisierten Konvergenz angewendet werden und mit (102) folgt

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_\Omega \left(X(x+h,\omega) - X(x,\omega)\right) \Psi_\alpha(\xi)\ \mathbb{P}(d\omega) \tag{116}$$

$$= \int_\Omega \lim_{h\to 0} \frac{X(x+h,\omega)-X(x,\omega)}{h} \Psi_\alpha(\xi) \mathbb{P}(d\omega). \tag{117}$$

Mit der Definition der Ableitung ergibt sich

$$\int_\Omega \lim_{h\to 0} \frac{X(x+h,\omega)-X(x,\omega)}{h} \Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega X'(x,\omega)\Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega). \tag{118}$$

Nach Definition der Modi der Polynomial Chaos Expansion (Definition 3.10) ist die rechte Seite gleich $(X')_\alpha(x)$ und somit gilt die Behauptung (98). ∎

Bemerkung zu Thm 3.14: Diese Aussage verallgemeinert sich für höhere Dimensionen $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und Ableitungen höheren Grades. In [For17, §11, Satz 2] wird diese Aussage mit anderen Voraussetzungen formuliert. Die Existenz einer Majorante für die Ableitung X', wie sie im Beweis dieses Satzes konstruiert wurde, wird dabei vorausgesetzt, dafür wird auf die Voraussetzung $X' \in C(D) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ verzichtet. Bis auf die Konstruktion der Majoranten ist die Beweisidee identisch.

Das letzte Resultat dieses Kapitels beschreibt, wie die Norm eines Zufallsfeldes mit Hilfe der Polynomial Chaos Expansion berechnet werden kann. Bezüglich dieser Norm wird im Kapitel 4 ein Funktional minimiert, die Berechnung hier wird dafür nützlich sein.

Satz 3.15

Es sei $X \in L^2(D) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ ein Zufallsfeld (mit Eigenschaft (78)). Dann ist die Norm von X definiert als

$$||X||_{L^2(D)\otimes L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \left(\int_D \int_\Omega X(x,\omega)^2 \mathbb{P}(d\omega) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{119}$$

Diese Norm lässt sich über die Polynomial Chaos Expansion von X berechnen als

$$||X||^2_{L^2(D)\otimes L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} ||X_\alpha||^2_{L^2(D)}. \tag{120}$$

Insbesondere folgt für $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$

$$||Y||^2_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} Y_\alpha^2. \tag{121}$$

Beweis: Es sei $X \in L^2(D) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$. Dann gilt mit Korollar 3.11

$$X(x,\omega) = \lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x) \Psi_\alpha(\xi(\omega)), \tag{122}$$

im Sinne der L^2-Konvergenz auf Ω und punktweise für alle $x \in D$.
Es folgt direkt

$$||X(x,\cdot)||^2_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \lim_{p\to\infty} \left|\left| \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi) \right|\right|^2_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} \tag{123}$$

für alle $x \in D$. Damit gilt auch

$$||X||^2_{L^2(D)\otimes L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \int_D \lim_{p\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi) \right)^2 \mathbb{P}(d\omega) dx. \tag{124}$$

Ausmultiplizieren des Quadrats liefert

$$\int_D \lim_{p\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi) \right)^2 \mathbb{P}(d\omega)dx \tag{125}$$

$$= \int_D \lim_{p\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)X_\beta(x)\Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi) \right) \mathbb{P}(d\omega)dx. \tag{126}$$

Mit der Linearität des Integrals über Ω folgt dann

$$\int_D \lim_{p\to\infty} \int_\Omega \left(\sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)X_\beta(x)\Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi) \right) \mathbb{P}(d\omega)dx \tag{127}$$

$$= \int_D \lim_{p\to\infty} \sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)X_\beta(x) \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)\mathbb{P}(d\omega)dx. \tag{128}$$

Die Orthonormalität der Ψ_α (Lemma 3.8) liefert

$$\int_D \lim_{p\to\infty} \sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)X_\beta(x) \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)\mathbb{P}(d\omega)dx = \int_D \lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)^2 dx. \tag{129}$$

Analog zeigt man

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)^2 = \int_\Omega \left(\lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi) \right)^2 \mathbb{P}(d\omega), \tag{130}$$

für alle $x \in D$, wobei die rechte Seite nach (123) punktweise (bezüglich x) gegen $||X(x,\cdot)||^2_{L^2(\Omega)} < \infty$ konvergiert. Dies beweist bereits (121), da für alle $x \in D$ gilt $X(x,\cdot) \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$.
Da die Summanden in (129) bedingt durch das Quadrat außerdem positiv sind, ist die Reihe in (129) monoton steigend. Damit können wir den Satz von der monotonen Konvergenz [Kle14, Theorem 4.20] anwenden und erhalten

$$\int_D \lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)^2 dx = \lim_{p\to\infty} \int_D \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha(x)^2 dx. \tag{131}$$

Insgesamt folgt also

$$||X||^2_{L^2(D)\otimes L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = \lim_{p\to\infty} \sum_{|\alpha|=0}^{p} \int_D X_\alpha(x)^2 dx. \tag{132}$$

und somit die Behauptung (120) ∎

3.5 Generalized Polynomial Chaos Expansion

Bisher haben wir als Basiszufallsvariablen immer eine Folge unabhängiger, identisch standardnormalverteilter Zufallsvariablen ξ angenommen und waren durch die Voraussetzung $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ auf Zufallsvariablen limitiert, die messbar bezüglich der erzeugten σ-Algebra der Folge ξ waren.
Dieser Ansatz lässt sich verallgemeinern auf viele verschiedene Verteilungen. Insbesondere ist es möglich verschiedene Verteilungen zu mischen, also Basiszufallsvariablen zu wählen, die nicht identisch verteilt sind. Einen Satz zur Konvergenz für andere Basen liefert:

Satz 3.16 (*EMSU12, Korollar 3.10*)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und ξ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

1. Alle Momente $M_n(\xi_m) = \int_\Omega |\xi_m|^n d\mathbb{P}$ von ξ_m sind endlich.
2. Die Verteilungsfunktion F_{ξ_m} ist stetig.
3. Die Verteilung von ξ_m ist eindeutig durch die Folge der Momente $(M_n(\xi_m))_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt.

Dann existiert eine polynomiale Orthonormalbasis Ψ_α (α Multiindex) von $L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ und für alle $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ sei definiert

$$X_\alpha := \int_\Omega X \Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}. \tag{133}$$

Es gilt dann

$$\lim_{p\to\infty} \left|\left| X - \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \right|\right|_{L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})} = 0. \tag{134}$$

Beweis: [EMSU12] Korollar 3.10.
Die Beweisidee beruht darauf, die Aussage zuerst für nur eine Basiszufallsvariable ξ zu zeigen, dieser Fall wurde bereits in [Fre66, Abschnitt II.4, Theorem 4.3] bewiesen. Darauf aufbauend wird erst der Fall für endlich viele Basiszufallsvariablen $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ bewiesen und dann über ein Grenzwertargument der Fall für unendlich viele Basiszufallsvariablen $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. ∎

Grundsätzlich sind sehr viele Zufallsvariablen X bereits durch die Polynomial Chaos Expansion mit normalverteilten Zufallsvariablen approximierbar. In [DK06] wird allerdings gezeigt, dass die richtige Wahl der Basiszufallsvariablen sich auf die Konvergenzgeschwindigkeit auswirkt, weshalb eine Zuhilfenahme der generalized Polynomial Chaos Expansion sinnvoll sein kann. Die numerischen Experimente in [DK06] gehen über das theoretische Resultat aus Satz 3.16 hinaus, indem auch Verteilungen mit nicht-stetigen

	Zufallsvariablen ξ	Polynomiale Basis $\Psi(\xi)$	Support
Stetig	Normalverteilt	Hermitesche Polynome	$(-\infty, \infty)$
	Gamma	Laguerre-Polynome	$[0, \infty)$
	Beta	Jacobi-Polynome	$[a, b]$
	Gleichverteilt	Legendre-Polynome	$[a, b]$
Diskret	Poisson	Charlier-Polynome	$\{0, 1, 2, \ldots\}$
	Binomial	Krawtchouk-Polynome	$\{0, 1, \ldots, N\}$
	Negativ Binomial	Meixner-Polynome	$\{0, 1, 2, \ldots\}$
	Hypergeometrisch	Hahn-Polynome	$\{0, 1, \ldots, N\}$

Tabelle 1: Beispiele für mögliche Basiszufallsvariablen und zugehörige orthonormale Polynome, für die in [DK06] exponentielle Konvergenzraten gezeigt wurden. Die Definiton der einzelnen Polynome findet sich in [KS96].

Verteilungsfunktionen untersucht werden und deren gute Eignung gezeigt wird. Tabelle 1 liefert einen Überblick über die dort untersuchten Verteilungen.

Im Folgenden werden die theoretischen Resultate für die Polynomial Chaos Expansion mit normalverteilten Basiszufallsvariablen vorgestellt, sie lassen sich aber direkt auf die generalized Polynomial Chaos Expansion übertragen, genauso wie die Rechenregeln aus Abschnitt 3.4.

Kapitel 4: Stochastische Registrierung

Die bisherigen vorgestellten Verfahren zur Bildregistierung sind deterministisch. In realen Bilddaten liegt allerdings immer eine gewisse Unsicherheit (Rauschen) vor. Dieses Rauschen wird in den deterministischen Ansätzen nicht modelliert, dadurch kann die Abhängigkeit der Ergebnisse vom Eingangsrauschen nicht quantifiziert werden. In diesem Kapitel wird die stochastischen Registrierung mit Hilfe der Polynomial Chaos Expansion (Kapitel 3) vorgestellt, die dies ermöglicht. Dazu wird zunächst der Begriff eines stochastischen Bildes formal eingeführt und dargelegt, wie aus realen Bilddaten stochastische Bilder generiert werden können. Im darauf folgenden Abschnitt wird ein variationeller Ansatz zur Bildregistrierung um die stochastische Komponente ergänzt und die daraus resultieren stochastische Euler-Lagrange-Gleichung hergeleitet. Diese lässt sich mit der Polynomial Chaos Expansion approximativ lösen. Die Ausgabe dieses Algorithmus ist wiederum stochastisch und lässt somit Schlüsse auf die (Un)Sicherheit der Ergebnisse zu.

4.1 Stochastische Bilder

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird das Konzept stochastischer Bilder eingeführt. Das Rauschen eines Bildes wird dabei als Zufallsvariable beschrieben.

Definition 4.1 (*PKP17*)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, D ein Bildgebiet und $Y(D)$ ein Funktionenraum über D.
Dann ist ein *stochastisches Bild* $X \in Y(D) \otimes L^2(\Omega)$ ein Zufallsfeld, wie in Definition 3.10.

Wir können also die punktweise Polynomial Chaos Expansion auf stochastische Bilder anwenden. Diese wird im Folgenden genutzt, um die stochastische Bildregistrierung durchzuführen.

4.1.1 Erzeugung stochastischer Bilder

In diesem Abschnitt soll beleuchtet werden, wie stochastische Bilder generiert werden können. Dazu gibt es verschiedene Ansätze, die teilweise Vorwissen über das bildgebende Verfahren nutzen. Drei mögliche Lösungsansätze sind

1. das Generieren stochastischer Bilder aus Stichproben,
2. das Nutzen von Rauschmodellen für bekannte Bildgebungsverfahren,
3. die Modellierung der Unsicherheit, die bei der Visualisierung der Rohdaten eines bildgebenden Verfahrens zum endgültigen Bild entstehen.

Wir werden nur die erste Möglichkeit hier näher beleuchten. Zur 2. Möglickeit siehe [PKP17]. Die dritte Möglichkeit überrascht zunächst, aber in [RTPHL14] wurde darge-

legt, dass bei der Visualisierung eines Bildes aus Rohdaten in verschiedenen Bildgebungsverfahren Unsicherheiten entstehen, die beispielsweise durch unterschiedliche Wahlen von Visualisierungsalgorithmen oder Parametern ausgelöst werden.
Im Folgenden wollen wir uns mit der Generierung von stochastischen Bilder aus Stichproben befassen. Der Ansatz stützt sich darauf, dass mehrere Stichproben des selben Bildes vorliegen. Für medizinische Bildgebungsverfahren ist dies selten der Fall, da insbesondere CT- oder Röntgenscans eine hohe Strahlenbelastung für den Patienten bedeuten und deshalb nur ein Bild angefertigt wird. In diesem Fall sollte also eine andere Methode gewählt werden, um ein stochastischen Bild zu erlangen. Insbesondere bei nichtorganischen Objekten oder bei schnellen Bildgebungsverfahren, die ohne Strahlenbelastung auskommen, ist dies aber eine gute Möglichkeit ein stochastisches Bild zu generieren.
Zur methodischen Umsetzung orientieren wir uns an [SNC09]. Wir gehen also davon aus, dass Stichproben eines stochastischen Bildes X vorliegen, diese nennen wir $X^1, \dots, X^k \in \mathbb{R}^M$. Dabei beschreibt $M \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Pixel, ein mehrdimensionales Bild liegt also in vektorisierter Form vor.
Wir wollen die Modi X_α des stochastischen Bildes X berechnen, um so mit der Polynomial Chaos Expansion das stochastische Bild X rekonstruieren zu können. Dazu berechnen wir zunächst den Erwartungswert von X, der als arithmetisches Mittel der Stichproben approximiert wird. Es gilt also

$$\mathbb{E}(X) = X_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X^i \in \mathbb{R}^M. \tag{135}$$

Als nächsten folgt die Berechnung der empirische Kovarianzmatrix von X, die sich berechnen lässt als

$$\mathrm{Cov}(X) = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} (X^i - \mathbb{E}(X))(X^i - \mathbb{E}(X))^T \in \mathbb{R}^{M \times M}. \tag{136}$$

Da die Kovarianzmatrix symmetrisch ist, kann sie in ihre Hauptkomponenten zerlegt werden, indem die Eigenwerte λ_j und zugehörgen Eigenvektoren ν_j berechnen werden $(1 \leq j \leq M)$. Anschließend werden die Paare (λ_j, ν_j) anhand der Beträge der Eigenwerte absteigend sortiert. Gesucht sind nun Zufallsvariablen $Y_i : \Omega \to \mathbb{R}$, die den Zufallsvektor X, zerlegt in die Hauptkomponenten, beschreibt. Es soll also gelten

$$X = X_0 + \sum_{j=1}^{M} Y_j \lambda_j \nu_j. \tag{137}$$

Stichproben der Zufallsvariablen Y_j liefert die empirische Karhunen-Loève Zerlegung [SNC09, Abschnitt 3, ursprünglich aus Loe78]

$$Y_j^i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \langle \nu_j, X^i - \mathbb{E}(X) \rangle_{R^M}. \tag{138}$$

für $1 \leq j \leq M$ und $1 \leq i \leq k$.
Die Zufallsvariablen Y_j sind dabei unkorrelierte Zufallsvariablen mit Erwartungswert

0 und Varianz 1. Im Folgendem machen wir die Annahme, dass diese Zufallsvariablen Y_j stochastisch unabhängig sind. Die Annahme ist richtig, wenn die Zufallsvariablen Y_j gemeinsam normalverteilt sind [MP12, Corollary 12.14], im Allgemeinen stimmt sie nicht. In [SNC09, Abschnitt 6] wird allerdings gezeigt, dass für die numerische Handhabung die Annahme der Unabhängigkeit bei kleinen Stichprobengrößen vertretbar ist. Ohne diese Annahme ist die Generierung eines stochastischen Bildes ebenfalls möglich, jedoch wesentlich aufwändiger [SNC09, Abschnitt 4].
Folgenden wird mehrfach ein Resultat aus der Wahrscheinlichkeitstheorie genutzt:

Lemma 4.2

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F_X. Dann ist $F_X(X)$ gleichverteilt auf $(0,1)$, also

$$X \sim U(0,1). \tag{139}$$

Es folgt direkt für jede gleichverteilte Zufallsvariable $u \sim U(0,1)$, dass

$$X \overset{d}{=} F_X^{-1}(u), \tag{140}$$

wobei F_X^{-1} die Pseudoinverse definiert, falls die Inverse von F_X nicht existiert.

Beweis: [Ros52]. ■

Wir wollen dieses Lemma zweimal anwenden, um nun die Modi der Zufallsvariablen Y_j zu berechnen. Die Modi waren in Satz 3.9 definiert, als

$$Y_{j,\alpha} = \int_\Omega Y_j \Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}. \tag{141}$$

Da die Verteilung der Y_i nicht bekannt ist, kann dieses Integral nicht direkt gelöst werden. Allerdings können die Y_i über die Verteilungsfunktion F_{Y_j} beschrieben werden, welche mit Hilfe der Stichproben Y_j^i approximiert werden können. Es gilt für die empirische Verteilungsfunktion [Kle14, Definition 5.22, Theorem 5.23]

$$\widehat{F}_{Y_j}(y) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{\{Y_j^i \leq y\}}. \tag{142}$$

Für die Berechnung von (141) wird die Pseudoinverse der empirischen Verteilungsfunktion benötigt, die sich berechnen lässt als

$$\widehat{F}_{Y_j}^{-1}(x) = \min \left\{ y \in \left\{ Y_i^k \right\}_{i=1}^{k} \middle| \widehat{F}_{Y_j}(y) \geq x \right\}. \tag{143}$$

Mit dieser wird nun das Integral in (141) berechnet. Wir haben bereits angenommen, dass die Y_j unababhängig sind. Nun nehmen wir außerdem an, dass jedes Y_j sich über eine Basiszufallsvariable ξ_j ausdrücken lässt, dass also gilt

$$Y_j = g(\xi_j) \tag{144}$$

für eine messbare Funktion g. Insbesondere setzen wir hier also $n = M$ für die Polynomial Chaos Expansion. Es folgt mit Lemma 4.2

$$Y_j \stackrel{d}{=} F_{Y_j}^{-1}\left(F_{\xi_j}(\xi_j)\right). \tag{145}$$

Da die Gleichheit nur in Verteilung gilt, aber im Allgemeinen nicht $\mathbb{P}$-f.s., können die folgenden Integrale trotzdem ungleich sein:

$$\int_\Omega Y_j \Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P} \neq \int_\Omega F_X^{-1}\left(F_{\xi_j}(\xi_j)\right) \Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}. \tag{146}$$

Allerdings sind wir nur an der *Verteilung* der Zufallsvariablen Y_j interessiert, weshalb wir Y_j ersetzen können durch das identisch verteilte $F_{Y_j}^{-1}\left(F_{\xi_j}(\xi_j)\right)$. Wir berechnen mit der folgenden Gleichung also nicht die Modi von Y_j selbst, sondern die einer zu Y_j identisch verteilten Zufallsvariablen. Da wir bei einer Rekonstruktion aus Stichproben nicht zwischen identisch verteilten Zufallsvariablen unterscheiden können, ist dieses Vorgehen gerechtfertigt. Wir berechnen also

$$Y_{j,\alpha} = \int_\Omega F_X^{-1}\left(F_{\xi_j}(\xi_j)\right) \Psi_\alpha(\xi) d\mathbb{P}. \tag{147}$$

Dieses Integral können wir nun numerisch lösen, da die Verteilung der ξ_j bekannt ist.
Wir haben nun die Modi der Zufallsvariablen Y_j berechnet, Ziel war es die Modi des Zufallsvektors X zu berechnen. Dies gelingt mit (137)

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{M} Y_{j,\alpha} \lambda_j \nu_j + X_0. \tag{148}$$

Wir haben also aus Stichproben des stochastischen Bildes X die Modi rekonstruiert und können X approximieren als

$$X = \sum_{|\alpha|=0}^{p} X_\alpha \Psi_\alpha(\xi). \tag{149}$$

Bemerkung zur Wahl $n = M$: Es ist möglich an dieser Stelle $n \ll M$ zu wählen, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Dazu kann genutzt werden, dass in (137) die Zufallsvariablen Y_j, die zu sehr kleinen Eigenwerten λ_j gehören, nur einen geringen Einfluss auf die Zufallsvariable X haben und damit vernachlässigt werden können [PKP17]. Die Berechnung der ersten n Eigenwerte der Covarianzmatrix in (136) erfolgt dann über eine Low-Rank Approximation [HPS12].

4.2 Stochastische krümmungsbasierte Registrierung

In diesem Kapitel wollen wir nun die stochastische Registrierung einführen. Wir folgen dabei im Wesentlichem dem Ansatz aus Abschnitt 2.2.2, ergänzen aber die stochastische Komponente. Zunächst folgt die formale Definition der stochastischen Registrierung, analog zu Definition 2.1.

Definition 4.3

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $T, R \in Y(D) \otimes L^2(\Omega)$ das *stochastische Template*- bzw. *Referenzbild*. Gesucht ist nun ein *stochastisches Verschiebungsfeld* $u : D \times \Omega \to D \times \Omega$, so dass $T(\cdot - u, \omega)$ für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \Omega$ ähnlich zu $R(\cdot, \omega)$ ist.
Der Begriff 'ähnlich' wird hierbei problemspezifisch definiert. Wir bezeichnen das um u verschobene stochastische Bild $T(\cdot - u, \cdot)$ mit T_u.

Wir werden einen normbasierten Ähnlichkeitsbegriff wählen, da die Polynomial Chaos Expansion eine effiziente Lösung der resultierenden stochastischen Euler-Lagrange-Gleichung ermöglicht. Langsamer, aber ebenfalls robust ist eine Lösung über Sampling-basierte Ansätze [Caf98, PP95]. Hierfür lassen sich alle Arten von deterministischen Algorithmen verallgemeinern, als stochastischer Ähnlichkeitsbegriff wird dabei jeweils die Ähnlichkeit in einem Sampling bezüglich des deterministischen Ähnlichkeitsbegriffs gewählt.
Wir wollen uns beispielhaft der Stochastisierung der krümmungsbasierte Registrierung widmen, andere variationelle Ansätze können aber mit demselben Verfahren stochastisiert werden.
Das zu minimierende Funktional für die stochastische krümmungsbasierte Regularisierung und die zugehörige stochastische Euler-Lagrange-Gleichung gibt uns das folgende Lemma.

Lemma 4.4

Es sei $D \in \mathbb{R}^n$ und $Y(D) = L^2(D)$ der Bildraum mit den stochastischen Bildern $T, R \in L^2(D) \otimes L^2(\Omega)$. Es sei das stochastische Registrierungsproblem definiert, als

$$u^* \in \arg \min_{u \in H^2(D,D) \otimes L^2(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} ||T_u - R||^2_{L^2(D) \otimes L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2} \sum_{l=0}^{n} ||\Delta u_l||^2_{L^2(D) \times L^2(\Omega)} \right\}. \tag{150}$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass D offen ist mit C^1-Rand (Eva97, Appendix C.1.), $T \in C^1(D) \otimes L^2(\Omega)$ und $u \in C^4(D, D) \otimes L^2(\Omega)$, lautet die stochastische Euler-Lagrange-Gleichung

$$(R - T_u)\nabla T_u + \lambda \Delta^2 u = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{151}$$

Ist η die äußere Normale von D, so sind die natürlichen Randbedingungen gegeben durch

$$\Delta u_l = \langle \nabla \Delta u_l, \eta \rangle = 0 \ \mathbb{P}\text{-f.s.} \tag{152}$$

auf dem Rand von D für alle Dimensionen $l = 1, \ldots, n$.

Beweis : Es seien

$$\mathcal{D}(T,R;u) = \frac{1}{2}||T_u - R||^2_{L^2(D)\otimes L^2(\Omega)} \tag{153}$$

$$\mathcal{R}(u) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n}||\Delta u_l||^2_{L^2(D)\otimes L^2(\Omega)} \tag{154}$$

Der Beweis folgt dem Beweis von Lemma 2.8, allerdings werden Testfunktionen $\phi \in C_c^\infty(D,D)\otimes L^2(\Omega)$ benötigt. Mit analogen Rechnungen folgt dann für die erste Variation d_ϕ:

$$d_\phi(\mathcal{D}(T,R;u) + \lambda\mathcal{R}(u)) = \int_\Omega\int_D \langle (R - T_u)\,\nabla T_u, \phi\rangle_{R^n} + \lambda\langle\Delta^2(u),\phi\rangle dxd\mathbb{P}. \tag{155}$$

Aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung (Satz 2.7) erweitert auf den Raum $L^2(D)\otimes L^2(\Omega)$ folgt dann (151). Die Randbedingungen (152) folgen analog zu denen in Lemma 2.8. ∎

Die Lösungsstrategie wird hier wiederum sein, diese Euler-Lagrange-Gleichung numerisch zu lösen.

4.2.1 Numerische Lösung mit der Polynomial Chaos Expansion

Wir wollen Gleichung (151) numerisch lösen. Dazu können wir den Ansatz aus Abschnitt 2.2.2 mit Hilfe der Polynomial Chaos Expansion erweitern.
Es seien dazu $p, n \in \mathbb{N}$ der Grad bzw. die Anzahl der Basispolynome für die Polynomial Chaos Expansion. Nach Def 3.10 können wir die stochastischen Bilder T, R, T_u und das stochastische Verschiebungsfeld u approximieren durch

$$T(x,\omega) \approx \sum_{|\alpha|=0}^{p} T_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi(\omega)), \tag{156}$$

$$R(x,\omega) \approx \sum_{|\alpha|=0}^{p} R_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi(\omega)), \tag{157}$$

$$T_u(x,\omega) \approx \sum_{|\alpha|=0}^{p} T_{u,\alpha}(x)\Psi_\alpha(\xi(\omega)), \tag{158}$$

$$u(x,\omega) \approx \sum_{|\alpha|=0}^{p} u_\alpha(x)\Psi_\alpha(\xi(\omega)). \tag{159}$$

Diese Approximationen setzen wir nun in die stochastische Euler-Lagrange-Gleichung (151) ein und erhalten mit der Additionsregel für die Polynomial Chaos Expansion (Satz 3.13) und der Ableitungsregel (Satz 3.14)

$$\sum_{|\beta|=0}^{p}\sum_{|\alpha|=0}^{p}(R_\alpha - T_{u,\alpha})\Psi_\alpha\nabla T_{u,\beta}\Psi_\beta(\xi) + \lambda\sum_{|\alpha|=0}^{p}\Delta^2 u_\alpha\Psi_\alpha(\xi) = 0. \tag{160}$$

In der stochastischen Dimension nutzen wir Testfunktionen $\Phi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$ und bekommen die äquivalente Formulierung

$$\int_\Omega \left(\sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (R_\alpha - T_{u,\alpha}) \Psi_\alpha(\xi) \nabla T_{u,\beta} \Psi_\beta(\xi) + \lambda \sum_{|\alpha|=0}^{p} \Delta^2 u_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \right) \Phi d\mathbb{P} = 0, \tag{161}$$

für alle $\Phi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}(\xi), \mathbb{P})$.
Wir suchen nun eine Lösung, die sich als Polynomial Chaos Expansion zum Grad p in n Variablen darstellen lässt. Demnach wählen wir als Testfunktionen $\Phi = \Psi_\gamma$ für einen Multiindex γ mit n Einträgen und $|\gamma| \leq p$. Damit gilt dann

$$\int_\Omega \left(\sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (R_\alpha - T_{u,\alpha}) \Psi_\alpha(\xi) \nabla T_{u,\beta} \Psi_\beta(\xi) + \lambda \sum_{|\alpha|=0}^{p} \Delta^2 u_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \right) \Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} = 0, \tag{162}$$

für alle $|\gamma| \leq p$.
Die Linearität des Integrals liefert

$$\lambda \sum_{|\alpha|=0}^{p} \Delta^2 u_\alpha \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) \Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} = - \sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (R_\alpha - T_{u,\alpha}) \nabla T_{u,\beta} \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) \Psi_\beta(\xi) \Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} \tag{163}$$

für alle $|\gamma| \leq p$.
Da die Ψ_α orthonormal sind (Lemma 3.8), ist dies äquivalent zu

$$\lambda \Delta^2 u_\gamma = - \sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (R_\alpha - T_{u,\alpha}) \nabla T_{u,\beta} \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) \Psi_\beta(\xi) \Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} \tag{164}$$

für alle $|\gamma| \leq p$.
In diese Gleichung können wir nun die Approximation des Laplaceoperators aus (40) und die Approximation des Gradienten aus (42) einsetzen. Damit folgt das Gleichungssystem

$$\lambda \mathcal{A} \tilde{u}_\gamma = - \sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (\tilde{R}_\alpha - \tilde{T}_{u,\alpha}) \tilde{\nabla} \tilde{T}_{u,\beta} \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) \Psi_\beta(\xi) \Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} \tag{165}$$

für alle $|\gamma| \leq p$.
Dies ist ein Gleichungssystem in $M\binom{n+p}{n}$ Variablen, wobei M die Anzahl der Bildpunkte der diskreten Bilder beschreibt und $\binom{n+p}{n}$ die Anzahl der stochastischen Modi. Das Gleichungssystem lässt sich wiederum mit einem Zeitschrittverfahren linearisieren, analog zum deterministischen Algorithmus in Abschnitt 2.2.2. Dazu führen wir wiederum eine künstliche Zeit ein, von der die Modi des Verschiebungsfeldes u_α und die diskretisierten Modi $\tilde{u}_\alpha$ abhängen:

$$u_\alpha(x) = u_\alpha(t, x) \tag{166}$$

$$\tilde{u}_\alpha = \tilde{u}_\alpha(t) \tag{167}$$

für alle Multiindize mit $|\alpha| \leq p$.
Nun ergänzen wir in Gleichung (165) eine Zeitableitung

$$\partial_t \tilde{u}_\gamma + \lambda \mathcal{A} \tilde{u}_\gamma = -\sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (\tilde{R}_\alpha - \tilde{T}_{u,\alpha}) \tilde{\nabla} \tilde{T}_{u,\beta} \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) \Psi_\beta(\xi) \Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P}. \tag{168}$$

für alle $|\gamma| \leq p$.
Zu dieser Gleichung eine Lösung im Gleichgewichtszustand, das heißt Lösungen $u_\gamma(t,x)$ und einen Zeitpunkt s, so dass gilt

$$\partial \tilde{u}_\gamma|_{t=s} = 0 \tag{169}$$

für alle $|\gamma| \leq p$.
Dann löst $\tilde{u}_\gamma(s)$ auch (165). Zur numerischen Lösung von (168) wird die Zeit als Zeitpunkte mit Schrittweite $\tau > 0$ diskretisiert:

$$\tilde{u}_\gamma^i := \tilde{u}_\gamma(i\tau) \tag{170}$$

für alle $|\gamma| \leq p$ und alle $i \in \mathbb{N}_0$.
Der Parameter τ muss problemspezifisch gewählt werden. Die Zeitableitung in (168) wird über die Vorwärts-Euler-Diskretisierung diskretisiert [Tho95]

$$\partial_t \tilde{u}_\gamma(i\tau) = \frac{\tilde{u}_\gamma^{i+1} - \tilde{u}_\gamma^i}{\tau} \tag{171}$$

für alle $|\gamma| \leq p$.
Außerdem schreiben wir Gleichung (168) um zu

$$\tilde{u}_\gamma^{i+1} + \tau\lambda \mathcal{A} \tilde{u}_\gamma^{i+1} = -\tau \sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (\tilde{R}_\alpha - \tilde{T}_{u^i,\alpha}) \tilde{\nabla} \tilde{T}_{u^i,\beta} \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) \Psi_\beta(\xi) \Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} + \tilde{u}_\gamma^i. \tag{172}$$

Von diesem Linearen Gleichungssystem suchen wir nun zu Startwerten u_γ^0 die Lösung im Gleichgewichtszustand, für die dann gilt $\tilde{u}_\gamma^i = \tilde{u}_\gamma^{i+1}$ für alle $|\gamma| \leq p$. Diese Lösung löst dann auch (165). Gegeben initiale Verschiebungsfelder $\tilde{u}_\gamma^0$, ist (172) ein lineares Gleichungssystem, dass sich iterativ lösen lässt. Ein solches initiales Verschiebungsfeld kann über Vorwissen über das Problem definiert werden, ansonsten ist $\tilde{u}_\gamma^0 = 0$ für alle $|\gamma| \leq p$ möglich. Zur effizienten Lösung des linearen Gleichungssystem siehe [Mod04].

4.2.2 Berechnung der Modi des verschobenen Bildes

Die Berechnung der rechten Seite der Gleichung (165) ist im Zeitschrittverfahren in jeder Iteration notwendig. Deshalb ist hier eine schnelle Implementierung wichtig. Dazu sind neben einer effizienten Invertierung des Operator $\mathcal{A}$ im Wesentlichen zwei Dinge zu beachten:

1. Die Integrale $\int_\Omega \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)\Psi_\gamma(\xi)d\mathbb{P}$ werden in jeder Iteration benötigt. Mit Hilfe der Orthonormalität der Polynome lässt sich der Aufwand zur Berechnung reduzieren. Weiterhin sind die Integrale symmetrisch in α, β, γ, es müssen also nicht alle Kombinationen berechnet werden. Die Integrale sollten vorab berechnet und gespeichert werden, um in den Iterationsschritten Zeit zu sparen.

2. Die Modi der verschobenen Bilder T_u müssen für jeden Iterationsschritt neu berechnet werden. Dafür ist eine effiziente Implementierung notwendig.

In diesem Abschnitt wollen wir uns letzterem Problem widmen. Wir betrachten dazu die Definition des Modus $T_{u,\alpha}$ für einen Multiindex α:

$$T_{u,\alpha} = \int_\Omega T_u(x,\omega)\Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega). \tag{173}$$

Setzen wir die Definition des verschobenen Bildes T_u ein, so bekommen wir

$$\int_\Omega T_u(x,\omega)\Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega T(x - u(x,\omega),\omega)\Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega). \tag{174}$$

Hier setzen wir nun die Polynomial Chaos Expansion von T und u ein und erhalten

$$\int_\Omega T(x - u(x,\omega),\omega)\Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega \sum_{|\beta|=0}^{p} T_\alpha \left(x - \sum_{|\gamma|=0}^{p} u_\gamma(x)\Psi_\beta(\xi) \right) \Psi_\beta(\xi)\Psi_\alpha(\xi)\mathbb{P}(d\omega). \tag{175}$$

Dieses hängt Integral nur noch von Auswertungen von ξ ab, deren Verteilung bekannt ist. Deshalb kann dieses Integral durch gezieltes Abtasten mit einer Gaußquadratur numerisch berechnet werden [GW69].

Eine weitere Möglichkeit die Modi T_u zu berechnen liefert eine Taylorentwicklung [DNP+04]. Dies hat den Vorteil, das nicht in jeder Iteration ein Integral gelöst werden muss, was zu einem schnelleren Algorithmus führen könnte. Erste numerische Experimente haben jedoch gezeigt, dass eine lineare Approximation über eine Taylorentwicklung erster Ordnung keine zufriedenstellenden Ergebnisse liefert. Eine Taylorentwicklung höhere Ordnung erfordert die Berechnung von Produkten von vielen Zufallsvariablen, was sehr aufwendig ist (Satz 3.13). Der Ansatz über die Taylorentwicklung erfordert weitergehender Forschung, die den Rahmen dieser Arbeit übersteigen würde.

Kapitel 5: Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel wird die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion mit numerischen Experimenten untersucht. Dabei soll zum einen überprüft werden, ob das Verfahren bei einfachen Verteilungen plausible Ergebnisse liefert. Zum anderen wird das Verfahren mit einem Monte Carlo-Ansatz zur stochastischen Bildregistrierung verglichen. Alle Experimente wurden in Python 3.7.6 implementiert. Dabei wurden die Standardpakete NumPy 1.19.2 [Oli06] und SciPy 1.5.2 [Oli07] für die Berechnungen und Matplotlib.pyplot 3.3.2 [Hun07] zur Visualisierung der Ergebnisse genutzt. Für die Polynomial Chaos Expansion wurde außerdem das Paket ChaosPy 3.1.0 [FL15] verwendet.

Der genutzte Computer ist ein HP Laptop 15-bs0xx mit Intel(R) Core(TM) i5-7200U, 2.50GHz Prozessor und 8GB RAM. Das Betriebssystem ist Windows 10, 64-Bit.

In diesem Abschnitt werden Datensätze aus dem FAIR-Datensatz [Mod09] verwendet. Der erste Datensatz ist der Gauß-Datensatz – siehe Abbildung 4 – bestehend aus einem Bild einer kreisförmigen zweidimensionalen Gaußglocke. Der zweite Datensatz ist der Hände-Datensatz mit einem Template- und einem Referenzbild, siehe Abbildung 5. Der Datensatz besteht aus Röntgen-Aufnahmen zweier Hände, die zusätzlich zueinander verdreht sind.

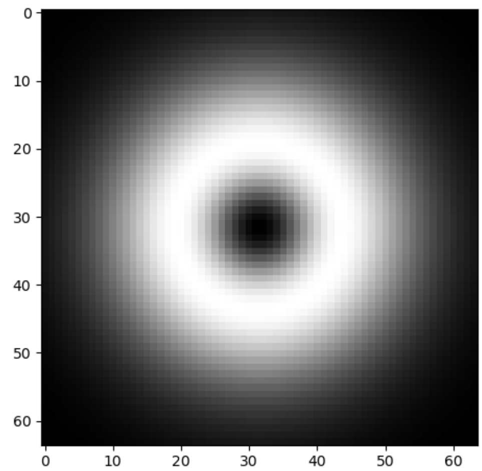

Abbildung 4: Templatebild des Gauß-Datensatz. 64x64 Pixel großes Grauwertebild mit Grauwerten zwischen 0 und 1.

5.1 $\mathbb{P}$-fast sicher konstante Eingabebilder

Zunächst soll verifiziert werden, dass der Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1 für ein $\mathbb{P}$-f.s. konstantes Eingabebild das gleiche Resultat erzielt wie der deterministische Algorithmus. Dazu wurden die Bilder aus dem Hände-Datensatz verwendet. Der deterministische Al-

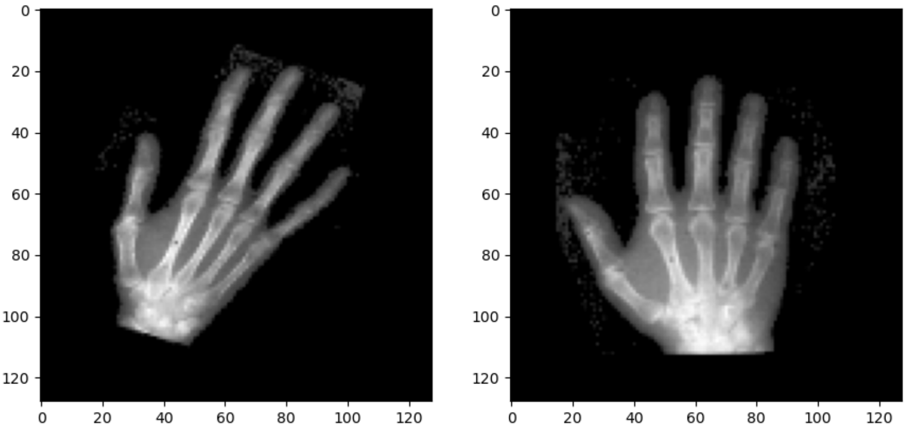

Abbildung 5: Links: Templatebild des Hände-Datensatzes, Rechts: Referenzbild des Hände-Datensatzes. 128x128 Pixel große Grauwertbilder mit Grauwerten zwischen 0 und 1.

gorithmus wurde auf das Bild selbst angewandt, für den stochastischen Algorithmus wurden die Modi T^s_α und R^s_α (Definition 3.10) der Polynomial Chaos Expansion der $\mathbb{P}$-f.s. konstanten Eingabebilder berechnet: Es sei dazu T das deterministische Templatebild und T_s das zu bestimmende stochastische Templatebild, wobei gelten soll, dass $T = T^s$ $\mathbb{P}$-f.s. Dann folgt mit Satz 3.12

$$T^s_0 = \mathbb{E}(T^s) = T. \tag{176}$$

Für alle anderen Multiindizes $\alpha \neq 0$ gilt mit Lemma 3.8

$$\begin{aligned} T^s_\alpha &= \int_\Omega T^s \Psi_\alpha(\xi) \mathbb{P}(d\omega) && (177)\\ &= T \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi) \mathbb{P}(d\omega) && (178)\\ &= T\ \mathbb{E}(\Psi_\alpha(\xi)) = 0. && (179) \end{aligned}$$

Mit analoger Rechnung für R folgt für den Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1:

$$T_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \neq 0, \\ T, & \text{falls } \alpha = 0, \end{cases} \tag{180}$$

$$R_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \neq 0, \\ R, & \text{falls } \alpha = R. \end{cases} \tag{181}$$

Für die Berechnung wurde die Anzahl der Basiszufallsvariablen $n = 2$ und der Grad der Basispolynome $p = 2$ gesetzt, um zu zeigen, dass der Algorithmus für das sich ergebene stochastische Verschiebungsfeld u_s ein $\mathbb{P}$-f.s. Ergebnis liefert, welches mit dem deterministischen Ergebnis des Algorithmus aus Abschnitt 2.2.2 übereinstimmt.

Als Parameter wurden für beide Algorithmen $\lambda = 1$ und $\tau = 1$ gewählt. Um lokale Minima bei der Optimierung zu umgehen, wurde eine Multigridstrategie [BHM00] angewendet. Dabei wurden die Bilder erst um den Faktor 4 und dann um den Faktor 2 herunterskaliert. Die sich ergebenden Verschiebungsfelder wurden mit linearer Interpolation hochskaliert und als initiales Verschiebungsfeld für die jeweils nächsthöhere Auflösung gewählt. Bei dem stochastischen Algorithmus wurde dieses Verfahren für jeden Modi durchgeführt. Für die erste Skalierungsstufe wurde $u^0 = 0$ bzw. $u_s^0 = 0$ als initiales Verschiebungsfeld gewählt. Auf jeder Skalierungsstufe wurden 1000 Iterationen durchgeführt.

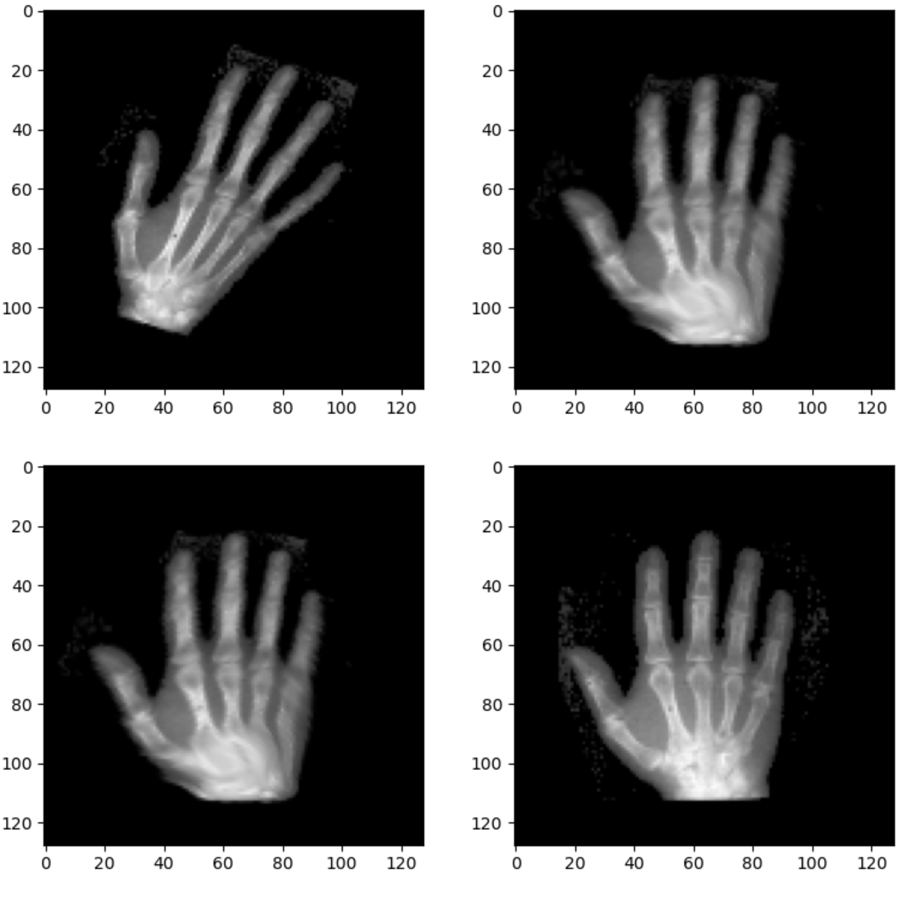

Abbildung 6: Die entstehenden verschobenen Bilder des ersten Experimentes. Links oben: Templatebild, Rechts oben: Erwartungswert des verschobenen stochastischen Bildes, Links unten: deterministisches verschobenes Bild, Rechts unten: Referenzbild.

Das Experiment liefert das erwartete Ergebnis. Der Erwartungswert des stochastischen Algorithmus entspricht dem Ergebnis des deterministischen Algorithmus, sowohl beim

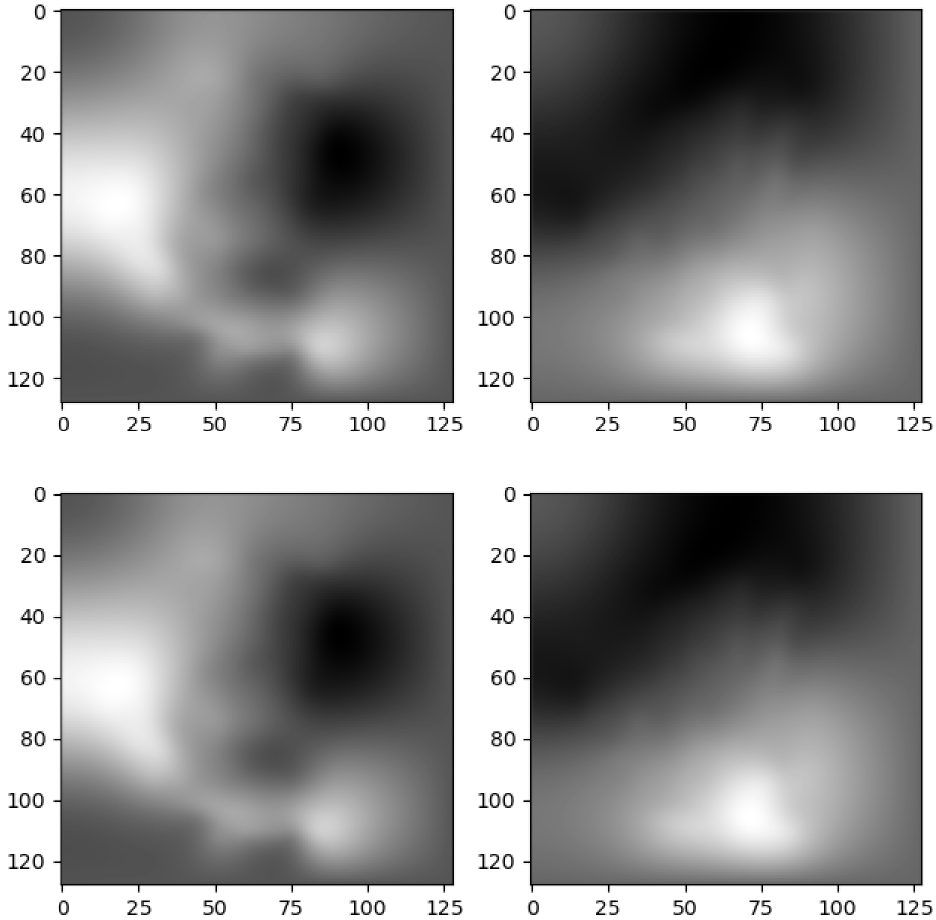

Abbildung 7: Die entstehenden Verschiebungsfelder des ersten Experimentes. Linke Spalte: Verschiebung in x-Richtung, Rechte Spalte: Verschiebung in y-Richtung. Obere Zeile: Erwartungswert des stochastischen Verschiebungsfeldes, untere Zeile: deterministisches Verschiebungsfeld.

Verschiebungsfeld (Abbildung 7), als auch beim verschobenen Bild (Abbildung 6). Es seien u, u_s die sich ergebenen (deterministischen bzw. stochastischen) Verschiebungsfelder und $T_u, T_{u,s}$ die sich ergebenen (deterministischen bzw. stochastischen) verschobenen Bilder. Dann liefert das numerische Experiment

$$\|u - \mathbb{E}(u_s)\|_2 = 3.473, \tag{182}$$

$$\|T_u - \mathbb{E}(T_{u,s})\|_2 = 0.00283. \tag{183}$$

Normiert mit der Anzahl der Pixel ergibt sich

$$\frac{\|u - \mathbb{E}(u_s)\|_2}{2M} = 1.06010^{-4}, \tag{184}$$

$$\frac{\|T_u - \mathbb{E}(T_{u,s})\|_2}{M} = 1.73310^{-7}. \tag{185}$$

Außerdem gilt $\frac{\|T_u\|_2}{M} = 0.066$ und $\frac{\|u\|_2}{2M} = 100.82$, entsprechend ist der relative Fehler in (184)-(185) so klein, dass die Erwartungswerte des verschobenen Bildes und des Verschiebungsfeldes praktisch identisch sind. Alle Modi außer dem 0-ten des stochastischen Verschiebungsfeldes und des stochastischen verschobenen Bildes sind konstant 0, beide Ergebnisse sind also wieder $\mathbb{P}$-f.s. konstant in der stochastischen Dimension.

5.2 Zwei Stichproben als Eingabebilder

Das zweite Experiment soll demonstrieren, dass die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion auch bei wenig vorhandenen Stichproben plausible Ergebnisse liefert. Dazu liegt vom Templatebild eine und vom Referenzbild zwei Stichproben vor.

Für dieses Experiment wird das Bild des Gauß-Datensatzes (Abbildung 4) genutzt. Als Templatebild wird das Bild selbst verwendet und als $\mathbb{P}$-f.s. konstantes stochastisches Bild betrachtet; die stochastischen Modi ergeben sich wie in (180). Für die erste Stichprobe des Referenzbildes wurde das Bild in Abbildung 4 um 10 Pixel nach unten verschoben, für die zweite Stichprobe wurde dieses verschobene Bild an der horizontalen Mittelachse gespiegelt, siehe Abbildung 8.

Die beiden entstehenden Stichproben des Referenzbildes wurden als gleich wahrscheinlich behandelt. Mit dem Algorithmus aus Abschnitt 4.1.1 wurden aus diesen Stichproben

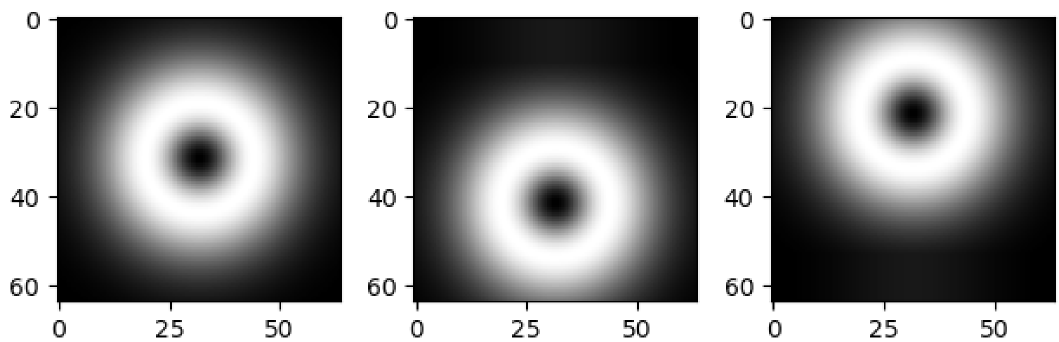

Abbildung 8: Die Eingabedaten des zweiten Experimentes, Links: $\mathbb{P}$-f.s. eindeutiges stochastisches Templatebild, Mitte und Rechts: zwei Stichproben des stochastischen Referenzbildes.

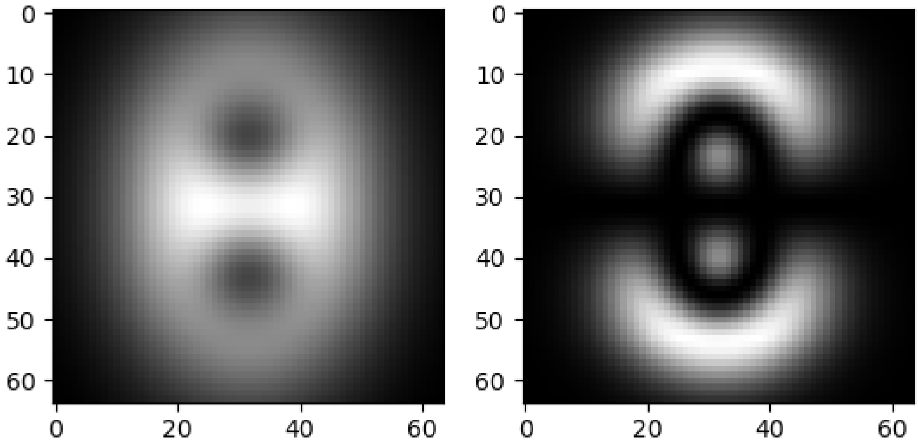

Abbildung 9: Das stochastische Referenzbild des zweiten Experimentes. Links: Erwartungswert, Rechts: Varianz.

die Modi des stochastischen Referenzbildes erzeugt. Da die Kovarianzmatrix in (136) nur einen nicht verschwindenden Eigenwert besitzt, wurde hier $n = 1$ gesetzt. Außerdem wurde $p = 1$ gesetzt. Für den stochastischen Registrierungsalgorithmus aus 4.2.1 wurde die generalized Polynomial Chaos Expansion mit binomialverteilten Zufallsvariablen gewählt; als Parameter wurden $\lambda = 0.5$ und $\tau = 1$ gesetzt.

Das zu erwartende Ergebnis dieses Experimentes ein stochastisches Verschiebungsfeld, dass das Templatebild mit gleicher Wahrscheinlichkeit um ± 10 Pixel auf der x-Achse verschiebt. Entsprechend ist bei dem stochastischen Verschiebungsfeld in x-Richtung mit einer hohen Varianz zu rechnen, in y-Richtung jedoch nicht. Der Erwartungswert des stochastischen Verschiebungsfeldes sollte in beiden Richtungen nahe 0 liegen, da in y-Richtung keine große Verschiebung und in x-Richtung ein Ausgleich der Verschiebungen zu erwarten ist.

Abbildung 10 zeigt die Dichtefunktion des stochastischen Verschiebungsfeldes, welches beim zweiten Experiment entsteht. In x-Richtung besteht die Dichte aus zwei Diracpeaks, die die Verschiebung in die positive bzw. negative Richtung anzeigen. Die Verschiebung in y-Richtung ist konzentriert auf einen Wert nahe 0. Der Erwartungswert des stochastischen Verschiebungsfeldes ist in jedem Pixel sehr nah an 0. Die Varianz der Verschiebung in Richtung der x-Achse nimmt in der Mitte des Bildes Werte um 100 an. Da eine Verschiebung um $\pm$ 10 Pixel in x-Richtung vorgenommen wurde, ist dies ein plausibles Ergebnis. Die Varianz der Verschiebung in y-Richtung ist mit maximalen Werten von 20 deutlich geringer (Abbildung 11). Insgesamt lieferte das Experiment die erwarteten Ergebnisse und zeigt damit, dass die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion auch für wenige Stichproben plausible Ergebnisse liefert.

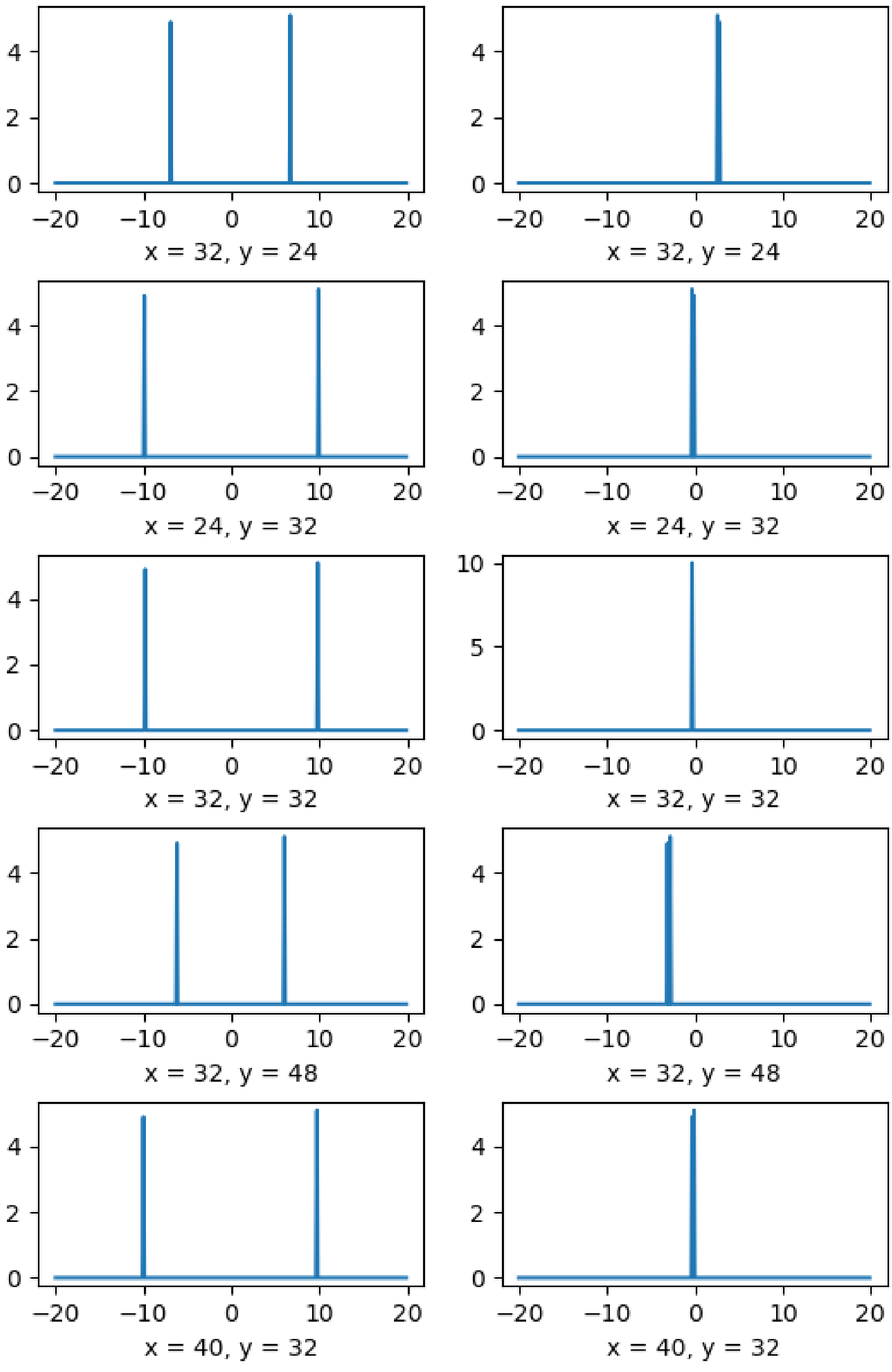

Abbildung 10: Dichte des stochastischen Verschiebungsfeldes des zweiten Experimentes an ausgewählten Stellen (x,y), Links: x-Komponente des Verschiebungsfeldes, Rechts: y-Komponente des Verschiebungsfeldes.

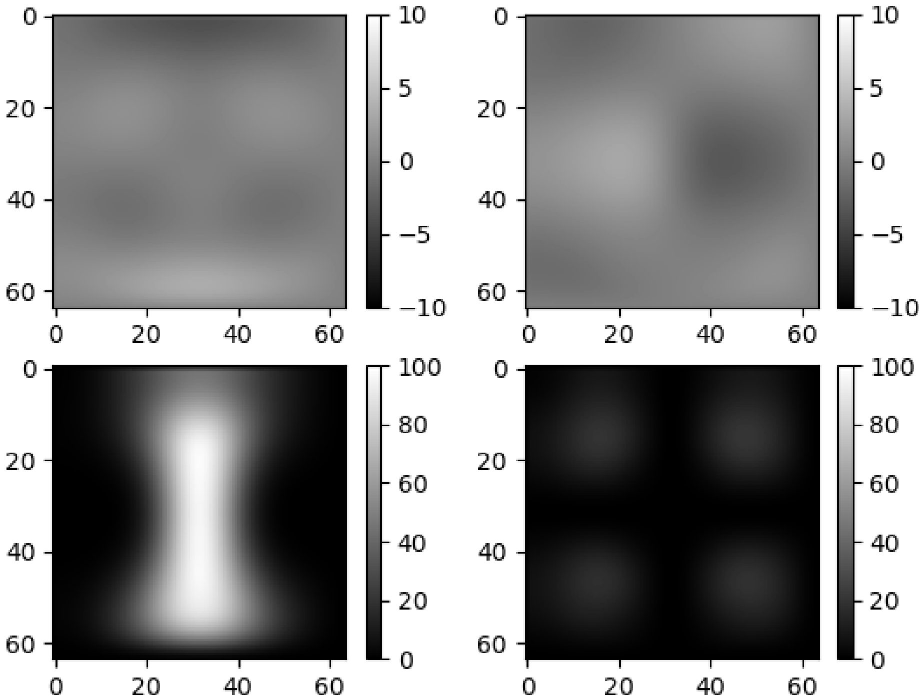

Abbildung 11: Stochastisches Verschiebungsfeld als Ergebnis des zweiten Experimentes. Oben: Erwartungswert des Verschiebungsfeldes, Unten: Varianz des Verschiebungsfeldes, Links: x-Komponente des Verschiebungsfeldes, Rechts: y-Komponente des Verschiebungsfeldes.

5.3 Vergleich mit Monte Carlo-Methode

Im dritten Experiment soll die stochastische krümmungsbasierte Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion mit einer stichprobenbasierten Monte Carlo-Methode verglichen werden [Caf98]. Die Monte Carlo-Methode ergibt sich, in dem der deterministische Algorithmus zur krümmungsbasierten Bildregistrierung aus Abschnitt 2.2.2 auf Stichproben des stochastischen Eingabebildes angewandt wird. Verglichen werden die Ergebnisse auf folgende Arten:

1. Vergleich des *Erwartungswertes* und der *Varianz* der entstehenden stochastischen verschobenen *Bilder*,
2. Vergleich des *Erwartungswertes* und der *Varianz* der entstehenden stochastischen *Verschiebungsfelder*,
3. Vergleich der *Verteilung* der entstehenden stochastischen verschobenen *Bilder* mit der *Energie-Distanz*,
4. Vergleich der *Verteilung* der entstehenden stochastischen *Verschiebungsfelder* mit der *Energie-Distanz*.

Für die Definition der Energie-Distanz siehe Definition A.15. Im Experiment wurde sie mit Hilfe von Satz A.17 berechnet, für zwei Zufallsvariablen X und Y mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y gilt also:

$$\mathcal{E}(X,Y) = 2\int_{\Omega} |F_X(t) - F_Y(t)|^2 dt. \tag{186}$$

Die Energie-Distanz wurde gewählt, da sie den Unterschied der Verteilung von zwei Zufallsvariablen misst, wie im Abschnitt A.3 näher erläutert wird. Die Energie-Distanz wurde für jeden Pixel der entstehenden stochastischen Bilder bzw. der stochastischen Verschiebungsfelder berechnet und dann aufaddiert. Der Erwartungswert und die Varianz der Polynomial Chaos Expansion von T_u wurden mit Satz 3.12 berechnet. Der Erwartungswert und die Varianz des stochastischen Bildes, welches durch die Stichproben der Monte Carlo Methode entsteht, wurden aus den Stichproben geschätzt. Sei K die Anzahl der Stichproben und $T_u^1, \dots, T_u^K$ die Stichproben. Dann wurden folgende Schätzungen vorgenommen:

$$\mathbb{E}(T_u) \approx \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} T_u^j, \tag{187}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(T_u) \approx \frac{1}{K-1}\sum_{j=1}^{K} \left(T_u^j - \mathbb{E}(T_u)\right)^2. \tag{188}$$

Der Erwartungswert und die Varianz des verschobenen Bildes sind wiederum Bilder; diese werden mit der Summe quadrierter Differenzen (SSD) verglichen, welche für diskrete Bilder X und Y definiert ist als

$$\mathrm{SSD}(X,Y) = \|X - Y\|_2^2. \tag{189}$$

Die Schätzung und der Vergleich der stochastischen Verschiebungsfelder erfolgen analog.

Als Grundlage der Eingabedaten dienen die Bilder des Hände-Datensatzes (Abbildung 5); das Template- und Referenzbild dieses Datensatzes seien benannt als T und R. Diesen Bildern wurde mit Hilfe der Polynomial Chaos Expansion Rauschen hinzugefügt. Die entstehenden stochastischen Bilder seien mit T^s und R^s bezeichnet. Dazu sei zunächst $n = 3$ die Anzahl der standardnormalverteilten Basiszufallsvaribalen und $p = 5$ der Grad der Polynomial Chaos Expansion. Damit ergeben sich insgesamt $\binom{5+3}{3} = 56$ stochastische

Modi. Die ersten Modi der Polynomial Chaos Expansion werden gesetzt als:

$$T_0^s = T, \tag{190}$$

$$T_{(1,0,0)}^s = 0.1\frac{\partial}{\partial x}T, \tag{191}$$

$$T_{(0,1,0)}^s = 0.1\frac{\partial}{\partial y}T, \tag{192}$$

$$T_{(0,0,1)}^s \equiv 0.02, \tag{193}$$

$$R_0^s = R, \tag{194}$$

$$R_{(1,0,0)}^s = 0.05\frac{\partial}{\partial x}R, \tag{195}$$

$$R_{(0,1,0)}^s = 0.2\frac{\partial}{\partial y}R, \tag{196}$$

$$R_{(0,0,1)}^s \equiv 0.05. \tag{197}$$

Dies spiegelt zum einen additives Rauschen über das ganze Bild und zum anderen zusätzliches additives Rauschen entlang der Kanten des Bildes wider. Für das Setzen der höheren Modi wurde eine Row-First-Vektorisierung der Bilder vorgenommen und die bisher nicht gesetzten stochastischen Modi wurden lexiographisch geordnet. Dann wurden die höheren Modi gesetzt als

$$(T_k^s)_i = \begin{cases} x_k, & \text{für } 315k \leq i \leq 315(k+1), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{198}$$

$$(R_k^s)_i = \begin{cases} y_k, & \text{für } 315k \leq i \leq 315(k+1), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{199}$$

für alle $0 \leq k \leq 52$. Der Index i bezeichnet hier die Koordinate des vektorisierten Modus. Dabei sind x_k und y_k zufällige aber für alle Experimente feste Zahlen zwischen -0.05 und 0.05. Der Faktor 315 ergibt sich als Anzahl der Bildpunkte geteilt durch die Anzahl der nach (190)-(197) noch nicht gesetzten Modi: $315 \approx \frac{M}{52}$. Dieses Vorgehen ermöglicht ein zusätzliches Rauschen auf einzelnen Pixeln, welches teilweise voneinander abhängig und teilweise voneinander unabhängig ist, da die Basispolynome der Polynomial Chaos Expansion $\Psi(\xi)$ genau dann voneinander abhängen, wenn sie von denselben Zufallsvariablen aus $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ abhängen. Für die Monte Carlo-Methode werden Stichproben aus den entstehenden stochastischen Bildern entnommen.

Die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion wurde mit dem Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1 in Verbindung mit einem Multigridverfahren wie im ersten Experiment durchgeführt, um lokale Minima bei der Optimierung zu vermeiden. Es wurden zwei Experimente zu der stochastischen Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion durchgeführt. Beim ersten Experiment wurden die Parameter $n = 3$ und $p = 5$ unverändert übernommen und darüber auch das stochastische Verschiebungsfeld sowie das verschobene Bild approximiert. Beim zweiten Experiment wurde $p = 3$ gesetzt. Somit wurde ein Teil des stochastischen Einflusses weggelassen.

Auch das stochastische Verschiebungsfeld und das verschobene Bild wurden mit einer Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 3$ approximiert. Zum Vergleich wurde eine Monte Carlo-Methode mit bis zu 1000 Stichproben durchgeführt; ebenfalls unter Nutzung eines Multigridverfahren für jede Stichprobe. Bei allen Verfahren wurden insgesamt 900 Iterationen durchgeführt: Je 400 auf den unteren Auflösungsstufen des Multigridverfahrens und 100 auf der höchsten Auflösungsstufe.

Als Grundwahrheit wurde das Ergebnis einer Monte Carlo-Methode mit 1000 Stichproben verwendet. Die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 3$ und $p = 5$ sowie eine Monte Carlo-Methode mit weniger Stichproben wurde mit dieser Grundwahrheit verglichen. Die Stichproben der Durchführungen der Monte Carlo-Methode (als Grundwahrheit und als Vergleichsmethode) wurden dabei unabhängig voneinander generiert.

Die Abbildungen 12 und 13 geben einen Überblick über die Ergebnisse. In Abbildung 13 werden die Ergebnisse der Verschiebungsfelder der drei Algorithmen mit den Verschiebungsfeldern der Grundwahrheit verglichen. Abbildung 12 zeigt den Vergleich der stochastischen verschobenen Bilder mit der Grundwahrheit in der ersten Spalte und im Vergleich mit dem stochastischen Referenzbild in der zweiten Spalte. Dabei zeigt sich, dass die Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 5$ bezüglich aller Vergleichsverfahren bessere Ergebnisse liefert als die Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 3$. Die Monte Carlo-Methode unterliegt bedingt durch den stochastischen Einfluss der Stichproben größeren Schwankungen. Ab circa 100 Stichproben nehmen die Schwankungen ab. Nach einer – je nach Vergleichsmethode unterschiedlichen – Anzahl an Stichproben liefert die Monte Carlo-Methode bessere Ergebnisse als die Polynomial Chaos Expansion.

Die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 3$ liefert beim Vergleich der stochastischen Verschiebungsfelder (Abbildung 13) keine guten Ergebnisse. Dies zeigt, dass bei komplizierten Verteilungen ein entsprechend hoher Grad der Approximation nötig ist, um die Unsicherheiten im Registrierungsprozess korrekt quantifizieren zu können. Im Vergleich der verschobenen stochastischen Bilder (Abbildung 12) liefert die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 3$ gute Ergebnisse. Auch die optischen Ergebnisse der verschobenen stochastischen Bilder sind bei diesem Verfahren ähnlich gut wie bei den anderen Verfahren (Abbildung 14). Die zeigt, dass für die Wahl der Parameter die Aufgabenstellung entscheidend ist. Besteht nur Interesse am verschobenen Bild und an der Quantifizierung der dort enthaltenen Unsicherheiten, kann bereits eine grobe Approximation gute Ergebnisse liefern. Ist jedoch das Verschiebungsfeld selbst und deren Unsicherheiten interessant, so ist eine genauere Approximation nötig. Die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 5$ liefert für das Verschiebungsfeld bessere Ergebnisse. Dies zeigt, dass die Polynomial Chaos Expansion in der Lage ist, auch die Unsicherheiten im Verschiebungsfeld zu quantifizieren, wenn eine ausreichend genaue Approximation verwendet wird.

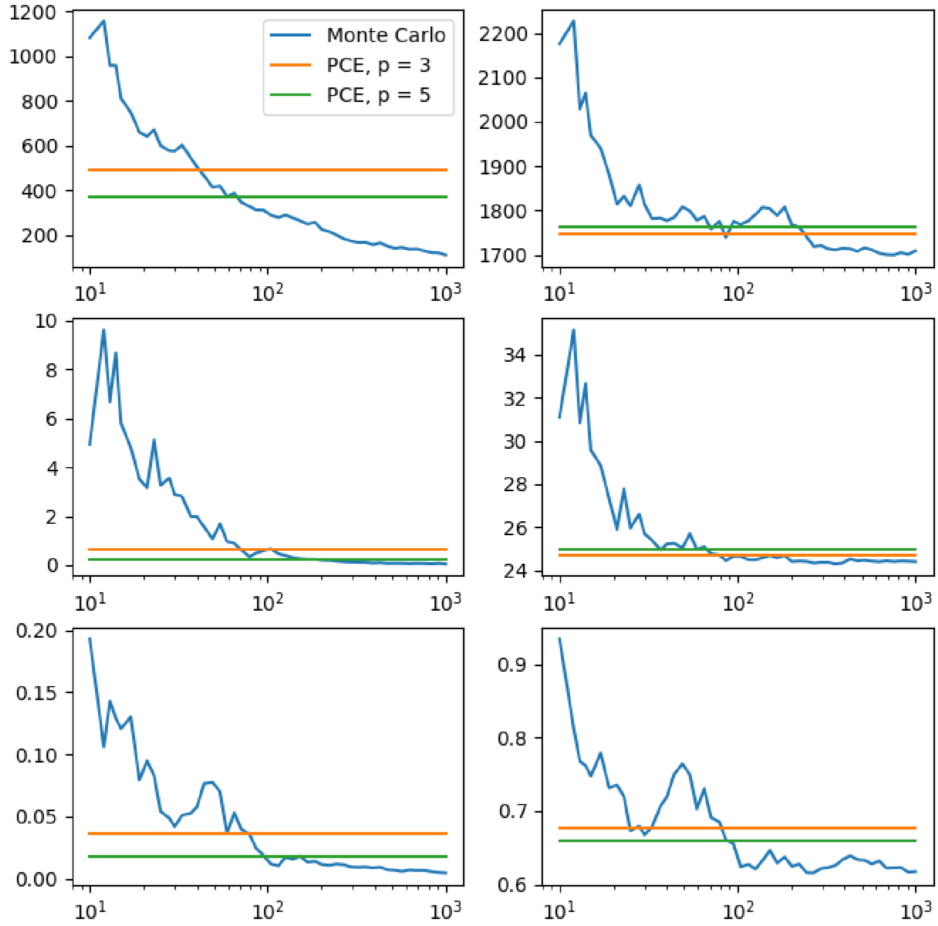

Abbildung 12: Vergleich der Ergebnisse für die verschobenen Bilder der stochastischen Registrierung mit der PCE zum Grad $p = 3$ (orange), zum Grad $p = 5$ (grün) und der Monte Carlo-Methode (blau). Die x-Achse der Graphen gibt die Anzahl der Stichproben der Monte Carlo-Methode an, die y-Achse die Werte der Vergleichsmethode. Linke Spalte: Differenz mit der Grundwahrheit (Monte Carlo-Methode mit 1000 Stichproben), rechte Spalte: Differenz zum stochastischen Referenzbild. 1. Zeile: Energie-Distanz, 2. Zeile: SSD der Erwartungswerte, 3. Zeile: SSD der Varianzen.

Laufzeit: Tabelle 2 gibt einen Überblick über die Laufzeit der wichtigsten Programmteile. Auffällig dabei ist, dass die Berechnung der Modi des verschobenen Bildes bei der stochastischen Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion zum Grad $p = 5$ 45% der Gesamtlaufzeit ausmacht. An dieser Stelle wurde der Algorithmus aus Abschnitt 4.2.2 verwendet. Dieser Programmteil erfordert hohen Zeitaufwand, da die Integrale in (175) präzise zu berechnen sind, damit der Algorithmus stabil bleibt. Dementsprechend muss mit einer hohen Anzahl an Stichproben der Basiszufallsvariablen gearbeitet werden,

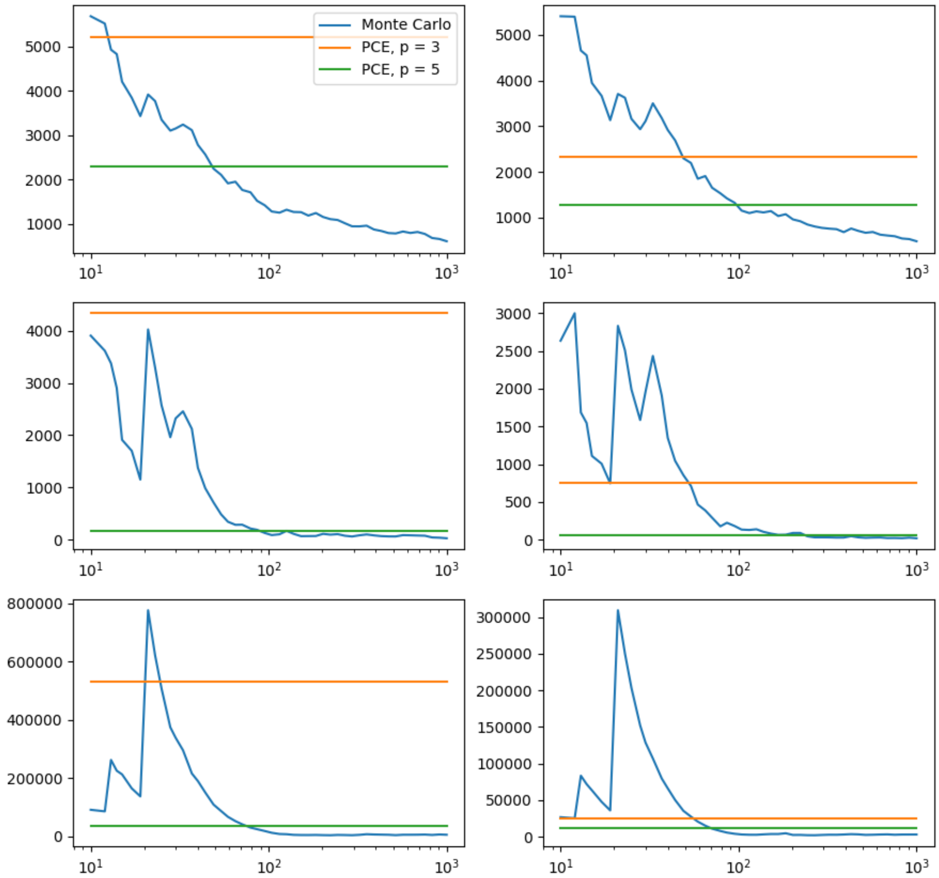

Abbildung 13: Vergleich der Ergebnisse für das Verschiebungsfeld der stochastischen Registrierung mit der PCE zum Grad $p = 3$ (orange), zum Grad $p = 5$ (grün) und der Monte Carlo-Methode (blau). Die x-Achse der Graphen gibt die Anzahl der Stichproben der Monte Carlo-Methode an, die y-Achse die Werte der Vergleichsmethode. Linke Spalte: Differenz mit der Grundwahrheit (Monte Carlo-Methode mit 1000 Stichproben) der x-Komponente des Verschiebungsfeldes, rechte Spalte: Differenz mit der Grundwahrheit der y-Komponente des Verschiebungsfeldes. 1. Zeile: Energie-Distanz, 2. Zeile: SSD der Erwartungswerte, 3. Zeile: SSD der Varianzen.

um das Integral möglichst genau zu approximieren. Da dies in jedem Iterationsschritt und für alle Modi der Polynomial Chaos Expansion durchgeführt werden muss, entsteht ein hoher Zeitaufwand. Eine effizientere Berechnung der Modi des verschobenen Bildes, die ohne das Lösen von Integralen auskommt, wäre ein Ansatzpunkt für eine schnellere Umsetzung des Algorithmus. In Abschnitt 4.2.2 wird bereits kurz ein Ansatz mit einer Taylor-Entwicklung diskutiert. Um hier über eine hochgradige Taylor-Entwicklung eine genaue Approximation zu erzielen, wäre es notwendig Produkte von vielen Zufallsvariablen effizient zu berechnen. Aufgrund der dafür erforderlichen Projektion – wie in Satz

Grad der PCE/ Methode	$p = 3$	$p = 5$	MC, 100 St.
Gesamtlaufzeit	128	615	177
Berechnung der rechten Seite	17	267	24
Invertierung des Gleichungssystems	11	28	40
Berechnung der Modi des verschobenen Bildes	84	281	-
Berechnung der verschobenen Bilder	-	-	79

Tabelle 2: Laufzeiten der wichtigsten Programmblöcke der stochastischen Bildregistrierung mit Polynomial Chaos Expansion (PCE) und der Monte Carlo-Methode (MC) mit 100 Stichproben in Sekunden. Die Laufzeit der Monte Carlo-Methode ist proportional zur Anzahl der Stichproben. Alle Programmblöcke werden dabei in jeder Iteration aufgerufen, angegeben ist die kumulative Zeit aller Aufrufe. Insgesamt wird bei der stochastischen Bildregistrierung mit PCE jeder Programmblock 900 mal aufgerufen, bei der Monte Carlo-Methode für jede Stichprobe 900 mal. Die Anzahl der Aufrufe ergibt sich durch je 400 Iterationen in den unteren Auflösungsstufen des Multigridverfahrens und 100 Iterationen in der höchsten Auflösung.

3.13 thematisiert – ist dies eine Herausforderung, die weiterer Forschung bedarf.

Einen ähnlich hohen Zeitaufwand (43% der Gesamtlaufzeit) nimmt die Berechnung der rechten Seite der Gleichung (172) in Anspruch. Für alle $|\gamma| \leq p$ muss berechnet werden:

$$\tilde{u}_\gamma^{i+1} + \tau\lambda\mathcal{A}\tilde{u}_\gamma^{i+1} = -\tau \sum_{|\beta|=0}^{p} \sum_{|\alpha|=0}^{p} (\tilde{R}_\alpha - \tilde{T}_{u^i,\alpha})\tilde{\nabla}\tilde{T}_{u^i,\beta} \int_\Omega \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)\Psi_\gamma(\xi) d\mathbb{P} + \tilde{u}_\gamma^i. \quad (200)$$

Hier kann viel Rechenarbeit gespart werden, indem die Summation nur über die Summanden erfolgt, für welche das Integral $\int_\Omega \Psi_\alpha(\xi)\Psi_\beta(\xi)\Psi_\gamma(\xi)\mathbb{P}(d\omega)$ nicht verschwindet. Diese Integrale sollten vor Beginn der Registrierung berechnet und gespeichert werden, da sie für jede Iteration des Algorithmus benötigt werden. Dies wurde in diesem Experiment bereits angewandt; die trotzdem hohe Rechenzeit ergibt sich, da eine hohe Anzahl Summanden in jedem Iterationsschritt unabhängig voneinander berechnet und aufaddiert werden muss. Außerdem könnte die Berechnung der rechten Seite für die unterschiedlichen γ parallelisiert werden, da diese nicht voneinander abhängen.

Insgesamt zeigt das Experiment, dass die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion in der Lage ist auch bei komplizierten Verteilungen die Unsicherheiten in den Ein- und Ausgabedaten zu quantifizieren. Abhängig davon, ob das verschobene Bild oder das Verschiebungsfeld als Ergebnis interessant ist, kann es sinnvoll sein, den Grad der Polynomial Chaos Expansion zu variieren. Beim verschobenen Bild kann auch eine Approximation geringen Grades ein gutes Ergebnis liefern und ein geringer Grad wirkt sich positiv auf die Laufzeit aus.

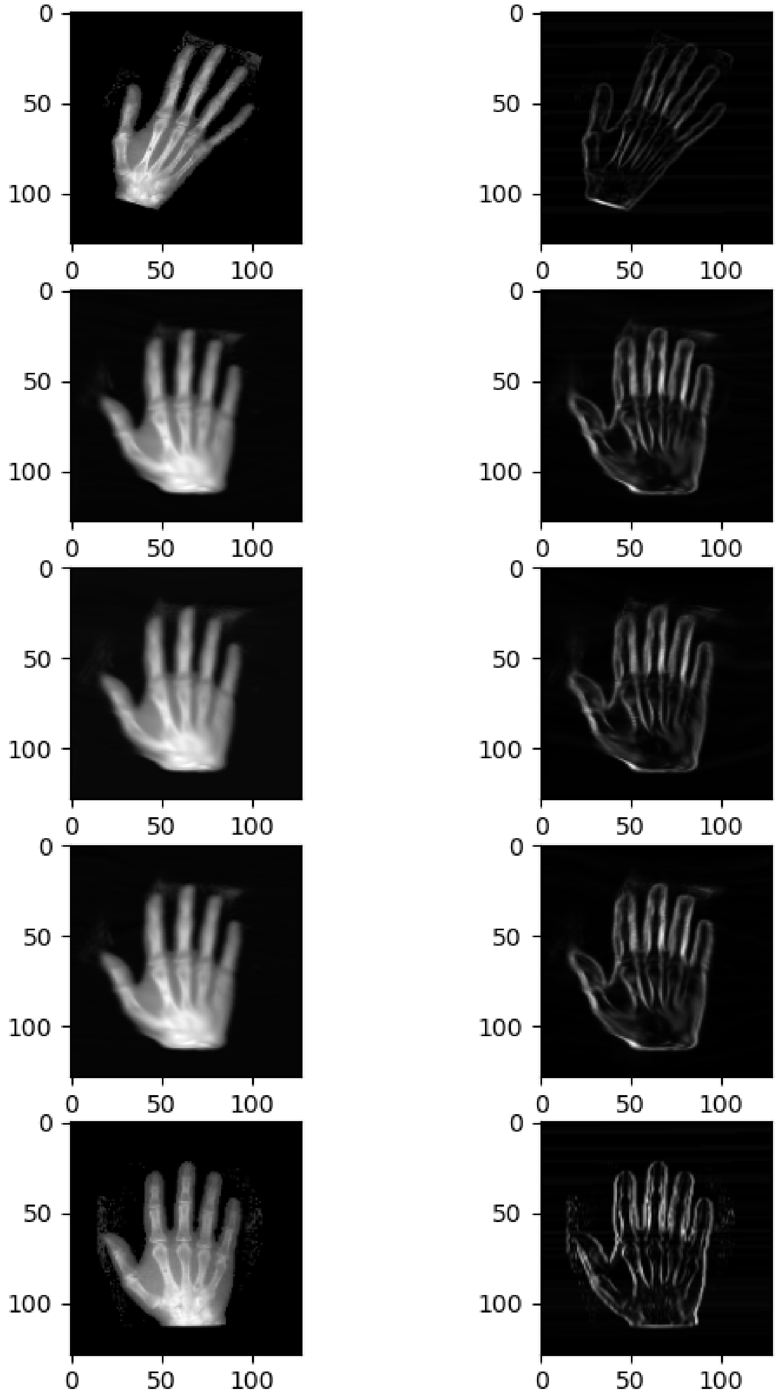

Abbildung 14: Ergebnisse der stochastischen Registrierungsverfahren im dritten Experiment. Linke Spalte: Erwartungswerte, Rechte Spalte: Varianzen. Zeilen: 1. Templatebild, 2. Monte Carlo Methode mit 100 Stichproben, 3. stochastische Registrierung mit Polynomial Chaos Expansion mit $p = 3$, 4. stochastische Registrierung mit Polynomial Chaos Expansion mit $p = 5$, 5. Referenzbild.

Kapitel 6: Fazit und Ausblick

6.1 Fazit

In dieser Arbeit wurde ein Verfahren untersucht, um Unsicherheiten in den Eingabedaten in den Ausgabedaten einer Bildregistrierung quantifizierbar zu machen. Dazu wurde zunächst in Kapitel 2 die deterministische Bildregistrierung vorgestellt und am Beispiel der krümmungsbasierten Bildregistrierung näher erläutert. Im dritten Kapitel wurde die Polynomial Chaos Expansion eingeführt, die es erlaubt, Zufallsvariablen über polynomielle Basiselemente zu approximieren. Die Polynomial Chaos Expansion wurde auf Zufallsfelder erweitert und auf wichtige Rechenregeln wurde eingegangen. In Kapitel 4 wurden stochastische Bilder als Zufallsfelder eingeführt und die stochastische Bildregistrierung mit dem krümmungsbasierten Regularisierer thematisiert. Im 5. Kapitel wurden numerische Experimente durchgeführt, um die Tauglichkeit der stochastischen Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion zu demonstrieren.

Im theoretischen Teil der Arbeit konnte dargelegt werden, dass die Polynomial Chaos Expansion viele Eigenschaften besitzt, die sie für die stochastische Bildverarbeitung attraktiv macht. So können aus Stichproben mit der Polynomial Chaos Expansion stochastische Bilder generiert werden (Abschnitt 4.1.1). Außerdem erlaubt die Polynomial Chaos Expansion eine unkomplizierte Berechnung der stochastischen Momente (Satz 3.12) und der Summe (Satz 3.13) von Zufallsvariablen sowie der L^2-Norm (Satz 3.15) und der Ableitung (Satz 3.14) von entsprechend glatten Zufallsfeldern. Letztere Eigenschaft ist besonders wichtig für die Eignung von variationellen Ansätzen in der Bildregistrierung, da hier partielle Differentialgleichungen vorkommen, für deren Lösung die Berechnung von Ableitungen unerlässlich ist.

Die Experimente in Kapitel 5 haben gezeigt, dass die stochastische Bildregistrierung in der Lage ist, die gestellten Anforderungen zu erfüllen. Die Unsicherheiten der Eingabebilder lassen sich mit stochastischen Bildern modellieren. Mit dem Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1 können diese stochastischen Bilder verarbeitet werden. Der Algorithmus liefert ein stochastisches verschobenes Bild und ein stochastisches Verschiebungsfeld, die wiederum zulassen, dass Unsicherheiten in diesen Ausgabedaten quantifizierbar sind. Eine Herausforderung bei den Berechnungen im Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1 ist die Nicht-linearität der entstehenden stochastischen Euler-Lagrange-Gleichung. Dadurch bedingt muss für die Modi des entstehenden stochastischen Bildes in jedem Iterationsschritt eine hohe Anzahl an Integralen berechnet werden. Die ersten beiden Experimente in Kapitel 5 haben demonstriert, dass die stochastische Bildregistrierung mit der Polynomial Chaos Expansion für einfache Verteilungen plausible Ergebnisse liefert. Das dritte Experiment hat gezeigt, dass auch für kompliziertere Verteilungen gute Ergebnisse erzielt werden können. Durch dieses Experiment wurde deutlich, dass der Grad der Polynomial Chaos Expansion je nach Aufgabenstellung variiert werden sollte. So ist eine Polynomial Chaos Expansion mit geringerem Grad in der Lage, die Unsicherheiten im verschobene Bild genau zu quantifizieren; für eine genaue Quantifizierung der Unsicherheiten im Verschiebungsfeld wird jedoch ein höherer Grad benötigt.

6.2 Ausblick

Zur Weiterentwicklung der stochastischen Bildregistrierung mit Polynomial Chaos Expansion sollte ein Augenmerk auf die Beschleunigung des Algorithmus gelegt werden. Ein Ansatzpunkt dafür ist die schnellere Berechnung der Modi des verschobenen Bildes. Dazu könnte der in Abschnitt 4.2.2 kurz angesprochene Ansatz einer Taylorentwicklung weiter verfolgt werden. Hierfür müsste untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen Produkte von Zufallsvariablen, die sich jeweils mit der Polynomial Chaos Expansion approximieren lassen, wiederum mit der Polynomial Chaos Expansion approximiert werden können.

Eine andere mögliche Erweiterung des Algorithmus besteht darin, die Registrierungsparameter τ und λ in Abschnitt 4.2.1 nicht als deterministische Werte zu setzen, sondern auch diese als Zufallsvariablen zu modellieren. Für unterschiedliche Bilder liefern unterschiedliche Parameter optimale Registrierungsergebnisse; dieser Ansatz würde ermöglichen für jede Realisierung der stochastischen Bilder einen optimalen Registrierungsparameter zu nutzen. Diese Registrierungsparameter könnten wiederum in einer Polynomial Chaos Expansion dargestellt werden, um die entstehende stochastische partielle Differentialgleichung numerisch zu lösen.

Kapitel A: Appendix

A.1 Mathematische Bildverarbeitung

Zunächst definieren wir ein mathematisches Bild, sowie ein diskretes Bild.

Definition A.1

Ein *mathematisches Bild* auf einem *Bildgebiet* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zur *Bilddimension* $n \in \mathbb{N}$ ist eine Abbildung $X : D \to \mathbb{R}$.
Ein *diskretes mathematisches Bild* auf einem *diskreten Bildgebiet* $D_d = \{1, \dots, m_1\} \times \dots \times \{1, \dots, m_n\}$ mit *Bilddimension* wiederum $n \in \mathbb{N}$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ ist eine Abbildung $X_d : D_d \to \mathbb{R}$. Wir identifizieren diskrete Bilder mit Matrizen, also Elementen in $\mathbb{R}^{m_1 \times \dots \times m_n}$.

In der Theorie werden wir von nicht diskreten Bildern ausgehen, für die numerische Implementierung allerdings von diskreten Bildern. Bei Vorliegen eines nicht diskreten Bildes, kann man ein diskretes Bild durch Abtasten an der nötigen Anzahl diskreter Bildpunkte generieren. Um von einem diskreten auf ein nicht diskretes Bild zu schließen wird eine Interpolationsverfahren benötigt, siehe [BL11, Kapitel 3].

Im Folgenden führen wir eine Reihe von Funktionenräumen ein, die wir im Verlaufe dieser Arbeit nutzen werden.

Definition A.2

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n, A \subseteq \mathbb{R}^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$ und der Träger einer Funktion $f : D \to A$ definiert als

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in D | f(x) \neq 0\}}. \tag{201}$$

Dann sind definiert

$$C(D, A) := \{f : D \to A | f \text{ ist stetig }\}, \tag{202}$$
$$C^k(D, A) := \{f : D \to A | f \text{ ist } k \text{ mal stetig differenzierbar}\}, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \tag{203}$$
$$C_c^k(D, A) := \{f \in C^k(D, A) | f \text{ hat kompakten Träger }\}, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}. \tag{204}$$

Ist $A = \mathbb{R}$, so schreiben wir nur $C(D)$ und analog für die Funktionenräume in (202)-(204).
Außerdem definieren wir für $1 \leq p < \infty$ die Banachräume $L^p(D)$ [AL06, Theorem 3.2.2] mit zugehöriger Norm als

$$L^p(D) := \left\{ f : D \to \mathbb{R} \middle| \int_D |f|^p dx < \infty \right\}, \tag{205}$$
$$\|f\|_{L^p(D)} := \left(\int_D |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{206}$$

Für $p = 2$ wird der Raum $L^2(D)$ zu einem Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2(D)} := \int_D fg \; dx \tag{207}$$

für alle $f, g \in L^2(D)$.

Bemerkung zu Definition A.2: Damit die Norm in (206) tatsächlich eine Norm beschreibt, müssen Äquivalenzklassen von Funktionen betrachtet werden. Dabei werden Funktionen miteinander identifiziert, die sich nur auf eine Lebesque-Nullmenge unterscheiden. In dieser Arbeit ist mit $f \in L^p(D)$ immer eine Repräsentant der Äquivalenzklasse f gemeint.

Die letzte Definition in diesem Kapitel liefert uns die diskrete Faltung. Diese werden wir verwenden, um zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen Ableitungsoperatoren zu approximieren.

Definition A.3

Es seien $n, m \in \mathbb{N}, X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ein diskretes Bild. Dann ist die *diskrete Faltung* von X mit einem *Faltungskern* $g : \{-k, \ldots, k\}^2$ definiert als

$$(X * g)_{i,j} = \sum_{p=-k}^{k} \sum_{q=-k}^{k} X_{i-p,j-q} g(p, q).$$

Für den Fall, dass in dieser Summe $i-p$ oder $j-q$ nicht im Definitionsbereich liegen, müssen Randbedingungen definiert werden. Typische Randbedingungen sind:

1. Dirichlet Randbedingungen: $X_k = 0$ für alle $k \in \{1, \ldots n\} \times \{1, \ldots, m\}$.
2. Neumann Randbedinungen: X wird über den Rand konstant fortgesetzt, d.h. $X_{-1,j} = X_{0,j}$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ und analog für die anderen Randwerte.

A.2 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die für diese Arbeit benötigten Grundlagen der Stochastik dargelegt. Für ein detaillierteres Studium bietet sich [Kle14] an. Wir beginnen mit den grundlegenden maßtheoretischen Begriffen.

Definition A.4

Es sei Ω eine Menge. Eine *σ-Algebra* über Ω ist ein Mengensystem $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset$ und $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{F}$

3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Definition A.5

Es sei Ω eine Menge und $\mathcal{F}$ eine zugehörige σ-Algebra. Dann ist ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_0^+$, so dass gilt:

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
3. $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ für paarweise disjunkte $A_i \in \mathcal{F}$.

Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt *Nullmenge*, wenn eine Menge $B \in \mathcal{F}$ existiert, so dass $A \subseteq B$ und $\mathbb{P}(B) = 0$.

Definition A.6

Es sei Ω eine Menge, $\mathcal{F}$ eine zugehörige σ-Algebra und $\mathbb{P}$ ein darauf definiertes Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann nennen wir das Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ einen *Wahrscheinlichkeitsraum.*
Ein Wahrscheinlichkeitsraum heißt *vollständig*, wenn für alle Nullmengen A gilt $A \in \mathcal{F}$. Im Folgenden gehen wir immer von vollständigen Wahrscheinlichkeitsräumen aus.

Nach diesen einführenden Begriffen führen wir nun den Begriff der Zufallsvariablen ein, sowie einige zugehörige Eigenschaften. Dazu sei im Rest dieses Kapitels jeweils $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition A.7

Eine *Zufallsvariable* X ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die *Borel-messbar* ist, d.h.

$$X^{-1}((-\infty, b]) \in \mathcal{F} \text{ für alle } b \in \mathbb{R}.$$

Nun definieren wir den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit für Zufallsvariaben.

Definition A.8 (*AL06, Definition 7.2.2*)

Es seien X, Y Zufallsvariablen. Dann heißen X und Y *stochastisch unabhängig*, wenn für alle $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(X \leq b_1 \cap Y \leq b_2) = \mathbb{P}(X \leq b_1)\mathbb{P}(Y \leq b_2).$$

Eine Folge von Zufallsvariablen $(X_1, X_2 \ldots)$ heißt *Folge unabhängiger Zufallsvariablen*, wenn für jede endliche Auswahl $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ und alle $b_{k_1}, \ldots, b_{k_m} \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{m} X_{k_n} \leq b_{k_n}\right) = \prod_{n=1}^{m} \mathbb{P}(X_{k_n} \leq b_{k_n}).$$

Zufallsvariablen lassen sich über ihre Verteilung beschreiben, die nachfolgend definiert wird.

Definition A.9

Die *Verteilung* einer Zufallsvariablen X ist das Bildmaß $\mathbb{P}_X$ unter X auf $\mathbb{R}$ mit der borelschen σ-Algebra $\mathbb{B}$, welches definiert ist durch

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) := \mathbb{P}\left(X^{-1}(B)\right)$$

für alle $B \in \mathbb{B}$. Weiterhin ist die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$F_X(b) := \mathbb{P}_X((-\infty, b]).$$

Sind zwei Zufallsvariablen X, Y *identisch verteilt*, das heißt

$$F_X(b) = F_Y(b) \tag{208}$$

für alle $b \in \mathbb{R}$, so schreiben wir

$$X \stackrel{d}{=} Y. \tag{209}$$

Wichtige Kenngrößen zur Analyse und Beschreibung von Zufallsvariablen sind ihre Momente.

Definition A.10

Es sei X eine Zufallsvariable, dann ist der *Erwartungswert* von X definiert als

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X d\mathbb{P},$$

wenn das Integral auf der rechten Seite existiert.
Das *n-te zentrale Moment* von X ist definiert als

$$M_n(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^n),$$

wenn das Integral auf der rechten Seite existiert.
Von besonderem Interesse ist das 2. zentrale Moment, die *Varianz*

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) := M_2(X).$$

Neben der a-priori definierten σ-Algebra $\mathcal{F}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, gibt es weitere wichtige σ-Algebren, die sogenannten erzeugten σ-Algebren.

Definition A.11

Es sei $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots)$ eine Folge von Zufallsvariablen. Die von $\mathbf{X}$ *erzeugte σ-Algebra* $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra, für die alle X_i messbar sind.

Sei dazu

$$\mathcal{A}_{\mathbf{X}} := \left\{ \widehat{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{F} \middle| \widehat{\mathcal{F}} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra, } X_i \text{ ist messbar bezüglich } \widehat{\mathcal{F}} \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ definiert als

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) := \bigcap_{\widehat{F} \in A_{\mathbf{X}}} \widehat{\mathcal{F}}.$$

Nun folgt ein wichtiger Funktionenraum, der eine Verallgemeinerung von (205) darstellt.

Definition A.12

Der Banachraum [AL06, Theorem 3.2.2] $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit zugehöriger Norm ist definiert als

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := \left\{ X \text{ ist Zufallsvariable} \middle| \int_\Omega |X|^p d\mathbb{P} < \infty \right\}$$

$$||f||_{L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})} := \left(\int_\Omega |X|^p d\mathbb{P} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Auch dieser Raum lässt sich für $p = 2$ zu einem Hilbertraum erweitern. Analog zu (207) ist das Skalarprodukt definiert als

$$\langle X, Y \rangle_{L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})} := \int_\Omega XY \; d\mathbb{P}$$

für alle $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Bemerkung zu Definition A.12: Analog zu Definition A.2 sind auch die Räume $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ über äquivalenzklassen von $\mathbb{P}$-f.s. gleichen Zufallsvariablen definiert.

Zuletzt wollen wir eine wichtige Verteilung einführen, die in Kapitel 3 und den nachfolgenden Kapiteln eine wichtige Rolle spielen wird.

Definition A.13

Es sei X eine Zufallsvariable. Wir nennen X *normalverteilt* mit Erwartungswert μ und Varianz $\sigma^2 > 0$, wenn die Verteilungsfunktion gegeben ist über

$$F_X(b) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Wir bezeichnen X dann auch als $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ verteilt. Wenn $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, sagen wir, dass X *standardnormalverteilt* ist.

A.3 Vergleich von Verteilungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden verschiedene Verteilungen thematisiert. Diese müssen miteinander verglichen werden. Ein Maß zum Vergleich zweier Zufallsvariablen liefert die L^2-Norm (Definition A.12). Für diese Norm gilt, dass zwei identisch verteilte, aber nicht $\mathbb{P}$-f.s. gleiche Zufallsvariablen, als nicht gleich angesehen werden:

Beispiel A.14

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Es sei $Y = -X$, dann gilt

$$Y \stackrel{d}{=} X, \tag{210}$$

da die Normalverteilung symmetrisch ist. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} \|X - Y\|_{L^2}^2 &= \int_\Omega |X - Y|^2 \mathbb{P}(d\omega) && (211)\\ &= \int_\Omega |2X|^2 \mathbb{P}(d\omega) && (212)\\ &= 4\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) && (213)\\ &= 4. && (214) \end{aligned}$$

Beispiel A.14 zeigt, dass die L^2-Norm nicht geeignet ist, die Verteilung zweier Zufallsvariablen zu vergleichen. Dazu ist also ein anderer Ansatz notwendig, diesen gibt die folgende Definition.

Definition A.15 (*[Sze02]*)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y, X', Y' unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswert, so dass gilt

$$\begin{aligned} X &\stackrel{d}{=} X', && (215)\\ Y &\stackrel{d}{=} Y'. && (216) \end{aligned}$$

Dann ist die Energie-Distanz von X und Y definiert als

$$\mathcal{E}(X, Y) = 2\mathbb{E}(|X - Y|) - \mathbb{E}(|X - X'|) - \mathbb{E}(|Y - Y'|). \tag{217}$$

Die Energie-Distanz zweier Zufallsvariablen ist wohldefiniert, denn es gilt: Es sei X eine Zufallsvariable und X', X'' von X unabhängige Zufallsvariablen mit $X \stackrel{d}{=} X'$ und $X \stackrel{d}{=} X''$. Dann gilt $\mathbb{E}(X - X') = \mathbb{E}(X - X'')$. Dies lässt sich mit einer Anwendung der Transformationsformel für Maße und der Tatsache, dass die Verteilungen $\mathbb{P}_{X'}$ und $\mathbb{P}_{X''}$ identisch sind, beweisen.

Dass die Energie-Distanz tatsächlich die Gleichheit der Verteilungen von X und Y misst, liefert der folgende Satz:

Satz A.16

Unter den Voraussetzungen aus Definition A.15 gilt

$$\mathcal{E}(X,Y) \geq 0 \tag{218}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $X \overset{d}{=} Y$ gilt.

Beweis: [SR02, Corollary 1] ■

Die Berechnung dieser Energie-Distanz ist im Allgemeinen nicht einfach, da zu den zu vergleichenden Zufallsvariablen X und Y die entsprechenden identisch verteilten, aber unabhängigen Zufallsvariablen X' und Y' konstruiert werden müssen. Ist die Verteilungsfunktion der zu vergleichenden Zufallsvariablen bekannt, so lässt sich die Energie-Distanz direkt darüber berechnen.

Satz A.17

Es seien die Voraussetzungen aus Definition A.15 gegeben. Außerdem seien F_X und F_Y die Verteilungsfunktionen von X und Y. Dann gilt

$$\mathcal{E}(X,Y) = 2\int_{\mathbb{R}} |F_X(t) - F_Y(t)|^2 dt. \tag{219}$$

Beweis: [Sze02, Theorem 1] ■

Bemerkung zu Satz A.17: Die Rechte Seite von Gleichung (219) beschreibt (ohne den Faktor 2) die Cramér-von Mises Distanz.

Literatur

[AFP00] Ambrosio, L. ; Fusco, N. ; Pallara, D.: *Functions of Bounded Variations and Free Discontinuity Problems.* 2000

[AK06] Aubert, P ; Kornprobst, P: Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations. (2006)

[AL06] Athreya, K. B. ; Lahiri, S. N.: *Measure Theory and Probability Theory.* 2006

[Alt12] Alt, H.W.: *Lineare Funktionalanalysis.* 2012

[BHM00] Briggs, W.L. ; Henson, Van E. ; McCormick, S.F.: *A Multigrid Tutorial, 2nd Edition.* 2000

[BL11] Bredies, K. ; Lorenz, D.: *Mathematische Bildverarbeitung: Einführung in Grundlagen und moderne Theorie.* 2011

[BSD+05] Brock, K.K. ; Sharpe, M.B. ; Dawson, L.A. ; Kim, S.M. ; Jaffray, D.A.: Accuracy of finite element model-based multi-organ deformable imageregistration. (2005)

[Caf98] Caflisch, R.E.: Monte Carlo and quasi-Monte Carlo Methods. (1998)

[CCG+09] Castillo, R. ; Castillo, E. ; Guerra, R. ; Johnson, V.E. ; McPhail, T. ; Garg, A.K. ; Guerrero, T.: A framework for evaluation of deformable imageregistration spatial accuracy using large landmarkpoint sets. (2009)

[CHH14] Crum, W.R. ; Hartkens, T. ; Hill, D.: Non-rigid image registration: theory and practice. (2014)

[CM47] Cameron, RH ; Martin, WT: The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. (1947)

[DK06] Dongbin, Xiu ; Karniadakis, George E.: The Wiener-Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations. (2006)

[DNP+04] Debusschere, B. J. ; Najm, H. N. ; Pébay, P. P. ; Knio, O. M. ; Ghanem, R. G. ; Le Maitre, O. P.: Numerical challenges in the use of polynomial chaos representations for stochastic processes. (2004)

[EMSU12] Ernst, Oliver G. ; Mugler, Antje ; Starkloff, Hans-Jörg ; Ullmann, Elisabeth: On the convergence of generalized polynomial chaos expansions. (2012)

[Eva97] Evans, L.C.: *Partial Differential Equations.* 1997

[FL15] Feinberg, Jonathan ; Langtangen, H.P.: Chaospy: An open source tool for designing methods of uncertainty quantification. (2015)

[For13] Forster, O: *Analysis 2: Differentialrechnung im Rn, gewöhnliche Differentialgleichungen.* 2013

[For16] Forster, O: *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* 2016

[For17] Forster, O: *Analysis 3: Maß- und Integrationstheorie, Integralsätze im Rn und Anwendungen.* 2017

[Fre66] Freud, G.: *Orthogonal Polynomials.* 1966

[GF63] Gelfand, I.M. ; Fomin, S.V: *Calculus of Variations.* 1963

[GW69] Golub, H ; Wlsch, J.H.: Calculation of Gauss Quadrature Rules. (1969)

[Han09] Handels, H.: *Registrierung medizinischer Bilddaten. In: Medizinische Bildverarbeitung.* 2009

[HBHH00] Hill, L.G. ; Batchelor, P.G. ; Holden, M. ; Hawkes, D.J.: Medical image registration. (2000)

[HPS12] Harbrecht, H. ; Peters, M. ; Schneider, R.: On the Low-rank Approximation by the Pivoted Cholesky Decomposition. (2012)

[Hun07] Hunter, J.D.: Matplotlib: A 2D Graphics Environment. (2007)

[Jan97] Janson, S: *Wiener chaos. In: Gaussian hilbert spaces.* 1997

[Kle14] Klenke, A: *Probability Theory A Comprehensive Course.* 2014

[KS96] Koekoek, R ; Swarttouw, R.F.: *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.* 1996

[Loe78] Loeve, M.: *Probability Theory 2.* 1978

[MF02a] Modersitzki, J ; Fischer, B: Curvature Based Image Registration. (2002)

[MF02b] Modersitzki, J ; Fischer, B: A unified approach to fast image registration anda new curvature based registration technique. (2002)

[MMC09] M., Hub ; M.L., Kessler ; C.P., Karger: A Stochastic Approach to Estimate the UncertaintyInvolved in B-Spline Image Registration. (2009)

[Mod04] Modersitzki, Jan: *Numerical Methods for Image Registration.* 2004

[Mod09] Modersitzki, J.: *FAIR: flexible algorithms for image registration.* 2009

[MP12] Moerters, P. ; Peres, Y.: *Brownian Motion.* 2012

[Nua06] Nualart, D.: *Analysis on the Wiener space. In: The Malliavin Calculus and Related Topics.* 2006

[Oli06] Oliphant, T. E.: A guide to NumPy. (2006)

[Oli07] Oliphant, T. E.: Python for Scientific Computing. (2007)

[PKP12] Preusser, T. ; Kirby, R.M. ; Pätz, T.: Ambrosio-Tortorelli Segmentation of Stochastic Images: ModelExtensions, Theoretical Investigations and Numerical Methods. (2012)

[PKP17] Preusser, T ; Kirby, R.M. ; Pätz, T.: *Stochastic Partial Differential Equations for Computer Vision with Uncertain Data.* 2017

[PP95] Papadrakakis, M. ; Papadopoulos, V.: Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation. (1995)

[PP10] Preusser, T. ; Pätz, T.: Ambrosio-Tortorelli Segmentationof Stochastic Images. (2010)

[PP13] Preusser, T. ; Pätz, T.: Segmentation of Stochastic Images using Level Set Propagation with Uncertain Speed. (2013)

[PSK08] Preusser, T ; Scharr, H ; Krasjek, K: Building blocks for computer vision with stochastic partial differential equations. (2008)

[Ros52] Rosenblatt, M.: Remarks on a multivariate transformation. (1952)

[RTPHL14] Ristovski, G. ; Tobias Preusser, T. ; Hahn, H.K. ; Linsen, L.: Uncertainty in medical visualization: Towards a taxonomy. (2014)

[SNC09] Stefanou ; Nouy ; Clement: Identification of random shapes from images through polynomial chaos expansion of random level set functions. (2009)

[SR02] Szekely, G.J. ; Rizzo, M.L.: A new test for multivariate normality. (2002)

[STA+03] Schnabel, J.A. ; Tanner, C. ; A.D., Castellano-Smith ; A., Degenhard ; M.O., Leach ; Hose, D.R. ; Hill, D.L.G.: Validation of Nonrigid Image Registration UsingFinite-Element Methods: Application toBreast MR Images. (2003)

[Sze02] Szekely, G.J.: E-statistics: The Energy of statistical samples. (2002)

[Tho95] Thomas, J.W.: *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods.* 1995

[Wei00] Weidmann, J.: *Lineare Operatoren in Hilberträumen.* 2000

[Wie38] Wiener, N: The homogeneous chaos. (1938)

[WWD+08] Wijesooriya, K. ; Weiss, E. ; Dill, V. ; Dong, L. ; Mohan, R. ; Joshi, S. ; Keal, P.J.: Quantifying the accuracy of automated structure segmentation in 4D CTimages using a deformable image registration algorithm. (2008)