



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
IMAGE COMPUTING

Ein volumenerhaltendes Bildregistrierungsproblem

A volume preserving image registration problem

Bachelorarbeit

im Rahmen des Studiengangs
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften
der Universität zu Lübeck

Vorgelegt von

Rebekka Zimmer

Ausgegeben und betreut von

Prof. Dr. Jan Modersitzki
Institute of Mathematics and Image Computing

6. Juli 2021

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Lübeck,
6. Juli 2021

Rebekka Zimmer

Kurzfassung

Die Bildregistrierung ist ein wichtiger Teil der Bildverarbeitung und findet häufig Anwendung in der Medizin. Die Grundaufgabe ist dabei, dass die Inhalte zweier Bilder, das Objektbild und das Referenzbild, aufeinander abgebildet werden können. Dafür wird ein Bildregistrierungsproblem gelöst, um eine Transformation eines Objektbildes zu finden, sodass man dieses mit einem Referenzbild bestmöglich vergleichen kann. Dabei ist die Regularität und Plausibilität der Transformation eine große Herausforderung, da das Bildregistrierungsproblem ein schlecht gestelltes Problem ist. In dieser Bachelorarbeit wird mithilfe eines Regularisierers und vor allem mit der Volumenerhaltung als Nebenbedingung das Problem signifikant verbessert, ohne weitere Vorannahmen an die Transformation. So werden mit dem Regularisierer nur stetig differenzierbare Transformationen zugelassen und mit der Volumenerhaltung wird lokale Bijektivität der Transformation garantiert. Des Weiteren wird das Bildregistrierungsproblem mit dem diskretisieren-dann-optimieren Ansatz so für die Optimierung vorbereitet, sodass dieses mit konventionellen Verfahren gelöst werden kann. In dieser Arbeit wird die Anwendung mit dem SQP diskutiert und auf mögliche Probleme wie Konvexität und Lösbarkeit eingegangen.

Abstract

Image registration is an important part of image processing that is often used in medicine. Its basic task is to overlay the content of two images, the template image and the reference image. To achieve this, an image registration problem has to be solved in order to find a transformation of the template image that can be used as the best-possible comparison to the reference image. The regularity and plausibility of the transformation is the biggest challenge because the image registration is well known to be ill-posed. In this bachelor thesis the problem will be significantly improved by using a regularizer and, above all, volume preserving constraints without presuppositions on transformation. This way the regularizer only allows for smooth transformations while the volume preserving constraints guarantee local bijectivity of the transformation. Furthermore, image registration problem will be prepared for the optimization with the discretize-then-optimize approach in order to solve this with the standard optimization methods. This thesis discuss the application with the SQP and elaborates on possible challenges like convexity and solvability.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung in die Bildregistrierung	1
1.1	Motivation dieser Arbeit	1
1.2	Aufbau der Arbeit	1
2	Grundlagen der Bildregistrierung	2
2.1	Bilder	3
2.2	Transformationen	3
2.3	Distanzmaße und Regularisierer	4
2.4	Nebenbedingung	6
3	Das Bildregistrierungsproblem	7
3.1	Wahl des Distanzmaßes und des Regularisierers	7
3.2	Volumenerhaltung als Nebenbedingung	8
3.3	Zielfunktional mit der Nebenbedingung	9
4	Diskretisieren-dann-optimieren Ansatz	9
4.1	Gitter	10
4.2	Interpolation	12
4.3	B-Spline-Interpolation im Eindimensionalen	12
4.4	B-Spline-Interpolation im Zweidimensionalen	15
5	Diskretisieren	16
5.1	Bilder und Transformation	17
5.2	Distanzmaß	17
5.3	Regularisierer	18
5.4	Nebenbedingung	19
6	Optimierung mit SQP	23
6.1	Grundlagen des SQP's	23
6.2	Anwendung des SQP's auf das Problem	26
7	Zusammenfassung der Arbeit	27
7.1	Ausblick	28

Kapitel 1: Einführung in die Bildregistrierung

1.1 Motivation dieser Arbeit

Die Bildregistrierung ist eine der Grundaufgaben der Bildverarbeitung und hat viele verschiedene Anwendungsgebiete[1]. Ein wichtiges Anwendungsgebiet ist in der Medizin bei bildgebenden Verfahren wie zum Beispiel Computertomographie (CT), Magnetresonanztomographie (MRT, MRI) und Röntgenaufnahmen [1]. Das Ziel der Bildregistrierung ist es, für ein Objektbild und ein Referenzbild eine Transformation des Objektbildes zu finden, sodass der Inhalt des deformierten Objektbildes dem Inhalt des Referenzbildes möglichst ähnlich ist und beide Bilder aufeinander abgebildet werden können [1, 4]. Dabei können die Bilder von verschiedenen Sensoren, zu verschiedenen Zeiten oder aus verschiedenen Perspektiven aufgenommen werden [1]. Bei der Bildregistrierung muss das Bildregistrierungsproblem regularisiert werden, da es sich in der Bildregistrierung um ein schlecht gestelltes Problem handelt [10]. In dieser Bachelorarbeit wird dafür mit dem elastischem Regularisierer, welcher in Arbeiten wie [2] und [7] verwendet wird, eine Möglichkeit vorgestellt, um das Problem zu verbessern. Ein weiterer Fokus soll auf die Volumenerhaltung als Nebenbedingung gesetzt werden. Vor allem in der Medizin ist es wichtig, dass nach der Transformation das Volumen bestimmter Strukturen auf dem Bild sich nicht ändern [6]. So ist es zum Beispiel beim Vergleichen von Tumoren von prä- und postoperativen Bildern von Bedeutung, dass die Informationen möglichst genau abgebildet werden [6]. Mit der Volumenerhaltung als Nebenbedingung wird gefordert, dass sich die Volumina nicht ändern, sodass diese wichtige Eigenschaft der Transformation gefordert wird. Als Anwendungsbeispiel wird in den Arbeiten [2, 9] die volumenerhaltende Bildregistrierung auf MRI Brustbilder angewendet. Des Weiteren wird in dieser Bachelorarbeit ein Ansatz zum Lösen des Bildregistrierungsproblems vorgestellt. Dabei wird das im Folgenden aufgestellte Bildregistrierungsproblem für die Optimierung vorbereitet, indem dieses diskretisiert wird. Das resultierende diskrete Bildregistrierungsproblem ist ein nichtlineares und sehr großes Problem [2]. Zum Lösen wird mit dem SQP, sequentielle quadratische Programmierung, ein effektiver Algorithmus für große, insbesondere nichtlineare Systemen vorgestellt[3]. Das SQP kann so meistens mindestens superlineare Konvergenz garantieren [3]. In Arbeiten wie [2, 6] und [7] wird das SQP auch zum Lösen des Bildregistrierungsproblems verwendet.

1.2 Aufbau der Arbeit

Diese Bachelorarbeit ist wie folgt aufgebaut. Im zweiten Kapitel werden die Grundbegriffe der Bildregistrierung vorgestellt. Da es mehrere Möglichkeiten gibt, ein Bildregistrierungsproblem aufzustellen, werden deswegen erst einmal allgemeine Definitionen gegeben. Anschließend wird in Kapitel 3 mit den Grundlagen aus Kapitel 2 das Summender-kleinsten-Quadrate als Distanzmaß, der elastische Regularisierer und die Volumenerhaltung als Nebenbedingung gewählt, sodass mit denen dann ein Bildregistrierungsproblem explizit formuliert wird. Kapitel 4 stellt den diskretisieren-dann-optimieren Ansatz vor. Mit der Definition der Gitter und der Interpolation wird so auf die Diskretisierung in

Kapitel 5 vorbereitet. Anschließend wird dann in Kapitel 5 das Distanzmaß, der Regularisierer und die Nebenbedingung, welche in Kapitel 3 gewählt werden, diskretisiert, sodass damit das diskrete Bildregistrierungsproblem aufgestellt werden kann. Im Kapitel 6 wird mit dem SQP ein Verfahren vorgestellt, mit dem das diskrete Bildregistrierungsproblem aus Kapitel 5 gelöst werden kann. Dafür wird zunächst der Hintergrund des SQP's erläutert und anschließend die Anwendung auf das Bildregistrierungsproblem diskutiert. Eine Zusammenfassung dieser Bachelorarbeit ist in Kapitel 7 gegeben, wo anschließend mit dem Ausblick weiterführende Überlegungen in der Anwendung betrachtet werden.

Kapitel 2: Grundlagen der Bildregistrierung

Dieses Kapitel stellt die grundlegenden Begriffe der Bildregistrierung vor. Dafür wird eine allgemeine Definition eines Bildregistrierungsproblem aufgestellt, um die Notationen und Bezeichnungen für diese Arbeit und die Struktur des aufzustellenden Problems zu definieren. Anschließend werden die verwendeten Begriffe definiert.

Definition 1 (*Definition des Bildregistrierungsproblem ([1], §2)*)

Gegeben sind zwei Bilder $\mathcal{R}, \mathcal{T} : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow F$ und ein Funktional $\mathcal{I} : \{\varphi | \varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$. Finde eine Transformation $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, sodass gilt:

$$\min_{\varphi} \mathcal{I}(\varphi) := \mathcal{D}[\mathcal{T} \circ \varphi, \mathcal{R}] + \alpha \mathcal{S} \tag{1}$$

u.d.N $\mathcal{C}(\varphi) = 0$,

d :	Dimension des Bildes
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$:	Bildbereich
$\mathcal{T} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:	Objektbild
$\mathcal{R} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$:	Referenzbild
$\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$:	Transformation
$\mathcal{T} \circ \varphi$:	Transformiertes Bild
\mathcal{D} :	Distanzmaß
\mathcal{S} :	Regularisierer
α :	Regularisierungsparameter
\mathcal{C} :	Nebenbedingung

Nach Definition 1 ist das Ziel in der Bildregistrierung, eine Deformation $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ für ein gegebenes Objektbild zu finden, sodass das deformierte Objektbild einem gegebenen Referenzbild möglichst ähnlich ist. Dabei zeigen die beiden Bilder, zum Beispiel, das selbe Objekt, wobei diese aber von verschiedenen Sensoren oder zu verschiedenen Zeiten wurden [1]. Zur Einfachheit werden in dieser Bachelorarbeit nur zweidimensionale Bilder betrachtet, also $d = 2$, welche im Abschnitt 2.1 definiert werden.

2.1 Bilder

Dieser Abschnitt gibt eine Definition von Bildern, die so weiter in dieser Bachelorarbeit verwendet wird.

Definition 2 (Definition eines Bildes [4])

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ der Bildbereich und F ein Farbraum, welcher die Farbwerte eines Bildes enthält. Dabei ist ein Farbwert eine reelle Zahl. Dann ist ein Bild U eine Abbildung von dem Bildbereich Ω in den Farbraum F :

$$U : \Omega \rightarrow F,$$

wobei Ω und F jeweils kontinuierlich oder diskret sein können.

Ein Beispiel für einen diskreten Farbraum ist ein schwarz-weiß Bild, in diesem Fall kann das Bild nur zwei Farben annehmen, also es gilt $F = \{0, 1\}$. Ein kontinuierlicher Farbraum ist zum Beispiel ein Grauwert Bild mit $F = [0, 1]$. Unabhängig von dem Farbraum kann der Bildbereich kontinuierlich oder diskret sein. In dieser Bachelorarbeit werden kontinuierliche Bilder betrachtet, also Bilder mit kontinuierlichen Bildbereich $\Omega = [\omega^1, \omega^2] \times [\omega^3, \omega^4] \subset \mathbb{R}^2$ und stetigem Farbraum [4], damit das Objektbild an den von der Transformation verschobenen Stellen ausgewertet werden kann. In der Praxis können jedoch Bilder diskret vorliegen, da diese aus Messdaten von Sensoren entstehen, weshalb in Abschnitt 4.2 mittels Interpolation eine Möglichkeit diskutiert wird, diskrete Bilder als kontinuierliche Bilder zu formulieren.

2.2 Transformationen

Die Transformation wird auf das Objektbild angewendet, sodass der Bildbereich Ω des Objektbildes deformiert wird und sich das Objektbild verändert. In dieser Arbeit wird die Transformation wie folgt definiert:

Definition 3 (Transformation)

Sei $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Abbildung. Dann ist die Transformation $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch:

$$\varphi(x) = x + u(x),$$

wobei $u(x)$ die Vektorverschiebung vom Punkt x zum Punkt $\varphi(x)$ beschreibt.

Es wird zudem zwischen parametrischen Transformationen und nicht-parametrischen Transformationen unterschieden [1]. Bei der parametrischen Transformation sind Abbildungen, über die das Bildregistrierungsproblem (1) minimiert wird, schon durch Parameter restringiert, sodass bei der parametrischen Bildregistrierung nur die Parameter der Transformation φ bestimmt werden müssen. Der Nachteil dabei ist, dass die Anzahl der zugelassenen Abbildungen, über die das Funktional \mathcal{I} minimiert wird, kleiner ist, als wenn die zugelassenen Abbildungen nicht durch Parameter restringiert sind [1]. So

kann es vorkommen, dass die Lösung des Problems (1) nicht die optimale Lösung ist. Die parametrische Bildregistrierung kann jedoch gut verwendet werden, wenn vorher schon bekannt ist, wie die Transformation aussieht, weil man dann nur die Parameter bestimmen muss. Da in dieser Bachelorarbeit die Form der Transformation als nicht bekannt vorausgesetzt wird, wird der Ansatz der nichtparametrischen Bildregistrierung verwendet. Um eine kleine Vorstellung erlangen zu können, wie solche Transformationen aussehen können, werden hier kurz gängige Transformationen als Beispiel gezeigt, welche von den Parametern ω abhängen.

Beispiel 1 (*Einige Transformationen [1]*)

Was die folgenden Transformationen bewirken können, ist in den Abbildungen 6a,6b und 1c zu erkennen.

- Translation:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 + \omega_1 \\ x_2 + \omega_2 \end{pmatrix}$$

- Rigide Transformation:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1)x_1 - \sin(\omega_1)x_2 + \omega_2 \\ \sin(\omega_1)x_1 + \cos(\omega_1)x_2 + \omega_3 \end{pmatrix}$$

Diese Transformation kann eine Rotation und Translation beschreiben [1].

- Affin-lineare Transformation:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \omega_3 \\ x_1\omega_4 + x_2\omega_5 + \omega_6 \end{pmatrix}$$

Diese Transformation kann Rotationen, Translationen, Skalierungen und Scherungen beschreiben [1].

2.3 Distanzmaße und Regularisierer

Das Distanzmaß beschreibt die Ähnlichkeit zwischen dem deformierten Objektbild $\mathcal{T} \circ \varphi$ und dem Referenzbild \mathcal{R} [1], wobei für das Distanzmaß folgende Definition gegeben ist:

Definition 4 (*Distanzmaß [1]*)

Seien $\mathcal{T}, \mathcal{R} : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ zwei Bilder, dann wird durch das folgende Funktional $\mathcal{D} : \{(\mathcal{T}, \mathcal{R}) | \mathcal{T}, \mathcal{R} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ die Ähnlichkeit dieser beiden Bilder beschrieben:

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}, \mathcal{R}) = \int_{\Omega} \phi(\mathcal{T}(x), \mathcal{R}(x)) dx$$

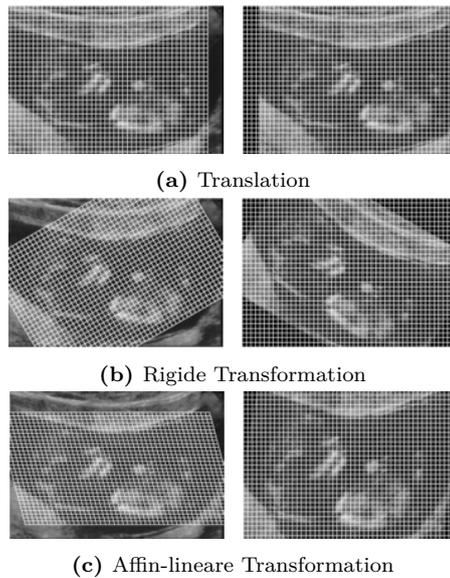


Abbildung 1: Die linken Bilder zeigen das Objektbild mit dem transformierten Bildbereich (weiße Linien). Die rechten Bilder zeigen das deformierte Objektbild mit dem nicht transformierten Bildbereich (weiße Linien). Quelle: J.Modersitzki, FAIR [1]

Dabei gibt es für die Definition 4 mehrere Distanzmaße wie zum Beispiel die Summe der kleinsten-Quadrate, die Kreuzkorrelation oder die gegenseitige-Information [1], welche in [1] definiert werden. Die Wahl eines geeigneten Distanzmaßes hängt dabei von verschiedenen Faktoren wie zum Beispiel der Modalität der Bilder, ob die Bilder von verschiedenen Sensoren aufgenommen wurden oder ob verschiedene Objekte zu sehen sind, ab [1]. Für eine ausführlichere Diskussion, wann welches Distanzmaß verwendet werden kann, wird auf [1] verwiesen. Um eine Transformation zu finden, sodass das deformierte Objektbild $\mathcal{T} \circ \varphi$ und das Referenzbild \mathcal{R} sich möglichst ähnlich sind, kann folgendes Problem aufgestellt werden:

$$\min_{\varphi} \mathcal{D}(\mathcal{T} \circ \varphi, \mathcal{R}). \quad (2)$$

Dieses Problem ist nach Hadamard kein gut gestelltes Problem [1].

Definition 5 (Gut gestelltes Problem nach Hadamard [13])

Ein mathematisches Problem ist gut gestellt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung.
- Die Lösung hängt stetig von den Eingangsdaten ab.

Ist eine der Bedingungen nicht erfüllt, ist das Problem ein schlecht gestelltes Problem.

So wird beim Bildregistrierungsproblem (1) für jede Position $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Vektor $\varphi(x)$ gesucht. Es liegt jedoch nur eine skalare Information $\mathcal{T}(\varphi(x))$ vor, sodass die Eindeutigkeit der Lösung nicht garantiert werden kann [1]. Zudem werden bis jetzt keine weiteren Anforderungen an die Abbildung φ gestellt, sodass nicht vorausgesetzt werden kann, dass auch plausible Transformationen gefunden werden. Dabei gilt eine Transformation als nicht plausibel, wenn der Inhalt des Objektbildes nach der Transformation, nicht mehr richtig dargestellt wird. So können zum Beispiel bei Unstetigkeiten in der Transformation die Inhalte des Objektbildes nicht mehr richtig im deformierten Objektbild angeordnet sein. Um das Problem (2) zu verbessern, wird ein Regularisierer verwendet [1]. Die Idee beim Regularisierer ist es, dass der Regularisierer ein Strafterm ist und nicht gewünschte Eigenschaften der Transformation bestraft und somit einige Lösungen von (2) nicht mehr zulässt. In dieser Arbeit sollen die Transformationen stetig differenzierbar sein, um bessere Transformationen zu erhalten, weshalb der Regularisierer hierüber ein Differentialquotient wird, welcher Unstetigkeiten der Transformation bestraft und Differenzierbarkeit der Transformation garantiert.

Definition 6 (*L_2 -Norm basierte stetige Regularisierer [1]*)

Der Regularisierer $\mathcal{S} : \{u|u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}$ basierend auf der L_2 -Norm vom Differentialquotienten der Vektorverschiebung $u(x)$ ist folgendermaßen über ein Differentialoperator \mathcal{B} definiert:

$$\mathcal{S}(u) = \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \langle \mathcal{B}(u), \mathcal{B}(u) \rangle dx, \tag{3}$$

mit $\alpha > 0$ als Regularisierungsparameter, welcher den Einfluss des Regularisierers auf das Distanzmaß kontrolliert.

Es ist noch einmal deutlich zu machen, dass mehrere Möglichkeiten für die Wahl eines Distanzmaßes und eines Regularisierers existieren. Für die weiteren Betrachtungen ist es jedoch wichtig, dass sowohl das Distanzmaß als auch der Regularisierer ein Gâteaux Differential besitzen [2]. Dies ist wichtig, da das Bildregistrierungsproblem (1) auch als ein Optimierungsproblem angesehen wird, wo Ableitungen eine wichtige Rolle spielen [1]. Dabei ist das Gâteaux-Differential eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Differentialbegriffes und wird somit auch in der Optimierung verwendet [12]. Da das Lösen des Bildregistrierungsproblems (1) und die damit verbundene Berechnung der Gâteaux-Differentiale nicht Teil dieser Bachelorarbeit sind, wird für genauere Informationen über das Gâteaux-Differential auf [12] verwiesen.

2.4 Nebenbedingung

Eine weitere Möglichkeit, das Bildregistrierungsproblem zu verbessern ist, eine Nebenbedingung hinzuzufügen [6]. Zwar werden mit dem Regularisierer (3) nur stetig differenzierbare Transformationen zugelassen, es können jedoch noch immer nicht plausible Transformationen als Lösung des Bildregistrierungsproblems (1) gefunden werden, die zum Beispiel starke Streckungen und Stauchungen oder Faltungen im deformierten Ob-

jektbild verursachen, welche durch eine Hinzunahme einer Nebenbedingung vermieden werden können. Die Wahl einer geeigneten Nebenbedingung ist dabei von den physikalischen Eigenschaften der zu betrachtenden Bilder abhängig [6]. In dieser Bachelorarbeit wird die Volumenerhaltung als Nebenbedingung verwendet, was in Abschnitt 3.2 diskutiert wird.

Kapitel 3: Das Bildregistrierungsproblem

In diesem Kapitel wird ein Bildregistrierungsproblem explizit aufgestellt, indem das Distanzmaß Summe-der-kleinsten-Quadrate und der elastische Regularisierer basierend auf den Definitionen 4 und 6 gewählt werden. Anschließend wird auf die Volumenerhaltung eingegangen und das Bildregistrierungsproblem formuliert.

3.1 Wahl des Distanzmaßes und des Regularisierers

Zur Einfachheit werden wir hier als Distanzmaß die Summe-der-kleinsten-Quadrate wählen, welches wir von nun an mit SSD, abgeleitet vom Englischen Sum-of-Squared-Differences, abkürzen. Damit dieses Distanzmaß aussagekräftig ist, werden wir davon ausgehen, dass die zu betrachtenden Bilder \mathcal{T} und \mathcal{R} vergleichbare Grauwerte haben [1]. Es wird nun folgende Definition für das SSD eingeführt:

Definition 7 (Definition SSD, ([1]§6.2))

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 4, dann ist das SSD Maß für das deformierte Objektbild $\mathcal{T} \circ \varphi$ und dem Referenzbild \mathcal{R} gegeben durch:

$$\mathcal{D}(\mathcal{T} \circ \varphi, \mathcal{R}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi(x)) - \mathcal{R}(x))^2 dx. \quad (4)$$

Für diese Ausarbeitung wird der elastische Regularisierer als L_2 -Norm basierter stetiger Regularisierer gemäß Definition 6 gewählt, da dieser in der Literatur [3,7] und [8] ebenfalls verwendet wird. Analog zum elastischen Regularisierer können zum Beispiel der diffusive und der curvature Regularisierer verwendet werden [1]. Auf diese Möglichkeit hier nicht weiter eingegangen. Der elastische Regularisierer wird wie folgt definiert:

Definition 8 (Der elastische Regularisierer [1])

Seien die Voraussetzungen wie in Definition 6 und der dazugehörige Differentialquotient $\mathcal{B}(u)$ des elastischen Regularisierers gegeben mit:

$$\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \nabla u & 0 \\ 0 & \sqrt{\mu} \nabla u \\ \sqrt{\mu + \lambda} \partial_1 u^1 & \sqrt{\mu + \lambda} \partial_2 u^1 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \mu \text{ und } \lambda \text{ Lamé Konstanten sind.}$$

Dann ist der elastische Regularisierer gegeben mit [1]§8.9:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(u) &= \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \langle \mathcal{B}(u), \mathcal{B}(u) \rangle dx \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \mu \langle \nabla u, \nabla u \rangle + (\lambda + \mu) (\nabla \cdot u)^2 dx, \quad (5)\end{aligned}$$

mit der Divergenz $\nabla \cdot u = \partial_1 u^1 + \partial_2 u^2$.

Der elastische Regularisierer (5) ist physikalisch motiviert [1]. Man kann diesen so verstehen, dass er das elastische Potential, welches bei der Verformung eines elastischen Materials entsteht, misst [1]. Die Lamé Konstanten μ und λ modellieren dabei das Verhalten der verschiedenen Materialien.

3.2 Volumenerhaltung als Nebenbedingung

In diesem Abschnitt wird die Volumenerhaltung als Nebenbedingung diskutiert und diese dann explizit formuliert. Wie in Abschnitt 2.4 bereits erwähnt, kann es vorteilhaft sein eine Nebenbedingung einzuführen. In dieser Bachelorarbeit wird eine Methode vorgestellt um Faltungen im deformierten Objektbild $\mathcal{T} \circ \varphi$ zu vermeiden [7]. Dazu wird die Volumenerhaltung als Nebenbedingung gefordert. Eine Faltung im deformierten Objektbild kann entstehen, wenn Punkte aus dem Bildbereich Ω durch die Transformation φ auf denselben Punkt abgebildet werden, also φ an diesen Stellen insbesondere nicht bijektiv ist, wie in Abbildung 2 zu erkennen ist. Durch Faltungen kann sich das Volumen bestimmter Strukturen im Objektbild ändern, was insbesondere in der Medizin vermieden werden muss [6]. Zur Verdeutlichung kann man als Beispiel das Vergleichen von CT-Aufnahmen nennen, welche denselben Tumor einer prä- und postoperative Behandlung zeigen. Eine durch die Transformation veränderte Struktur des Tumors kann zu Fehldiagnosen führen [6]. Mit der punktwisen Volumenerhaltung, können wir eine Nebenbedingung zu unserem Bildregistrierungsproblem hinzufügen, welches Bijektivität der Transformation fordert, indem sich das Volumen jeder Teilmenge $V \subseteq \Omega$ nach der Transformation $\varphi(V)$ nicht ändern darf. Die Volumenerhaltung wird folgendermaßen definiert:

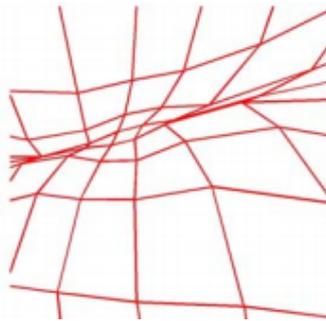


Abbildung 2: Faltungen im deformierten Bildbereich. Quelle: Haber, Modersitzki [6]

Definition 9 (Volumenerhaltung)

Sei V eine zusammenhängende Teilmenge von Ω . Das punktweise Volumen des nicht deformierten Bildbereiches ist dann mit $vol : V \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit:

$$vol(V) = \int_V dx, \forall V \subset \Omega$$

Das Volumen des deformierten Bildbereiches $vol(\varphi(V))$ ist dann gegeben mit:

$$vol(\varphi(V)) = \int_{\varphi(V)} dx, \forall V \subset \Omega.$$

Eine Deformation φ ist also genau dann volumenerhaltend, wenn $vol(\varphi(V)) = vol(V)$ gilt.

Mit Definition 9 kann man die Volumenerhaltung als Nebenbedingung wie folgt formulieren:

$$\mathcal{C}(\varphi) := \frac{vol(\varphi(V))}{vol(V)} - 1 = 0. \quad (6)$$

3.3 Zielfunktional mit der Nebenbedingung

Mit dem gewählten SSD (4), dem elastischen Regularisierer (5) und der Volumenerhaltung (6) kann das Bildregistrierungsproblem (1) nun explizit aufgestellt werden:

$$\min_{\varphi} \mathcal{I}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi(x)) - \mathcal{R}(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} \mu \langle \nabla u, \nabla u \rangle + (\lambda + \mu) (\nabla \cdot u)^2 dx \quad (7)$$

$$\text{u.d.N} \quad \mathcal{C}(\varphi) = \frac{vol(\varphi(V))}{vol(V)} - 1 = 0.$$

Kapitel 4: Diskretisieren-dann-optimieren Ansatz

Im Allgemeinen ist keine analytische Lösung des Problems (7) möglich [1], da zum Einen nicht vorausgesetzt ist, dass die Integrale aus 5 und 4 überhaupt gelöst werden können. Zum anderen sind mit der Volumenerhaltung überabzählbare Nebenbedingungen gegeben, da die Volumenerhaltung punktweise gegebene Nebenbedingungen sind [2], was beides beim Lösen zu Schwierigkeiten führen kann. Um das Bildregistrierungsproblem (7) zu lösen, gibt es einmal den Ansatz optimieren-dann-diskretisieren und den diskretisieren-dann-optimieren Ansatz [2]. Der Vorteil beim diskretisieren-dann-optimieren Ansatz liegt darin, dass Optimierungsverfahren wie das SQP angewendet werden können [2]. Deshalb wird sich im Rahmen dieser Ausarbeitung für die Verwendung jenes Ansatzes entscheiden. Dieses Kapitel dient als Vorbereitung auf die Diskretisierung in Kapitel 5. Dazu werden mit dem Gitter die Punkte, an denen das Bildregistrierungsproblem (7) ausgewertet werden soll, definiert. Zudem soll das Objektbild in dieser Arbeit als kontinuierliche Abbildung gegeben sein [2], damit eine Transformation, wie in Definition 3 gegeben,

auf den Bildbereich Ω des Objektbildes angewendet werden kann. Da in der Praxis Bilder diskret vorliegen können, wie in Abschnitt 2.1 schon erwähnt, wird im Abschnitt 4.2 die B-Spline Interpolation vorgestellt, um aus einem diskreten Bild ein kontinuierliches zu erhalten.

4.1 Gitter

Basierend auf [1] in diesem Abschnitt werden das zellzentrierte, das nodale und das gegeneinander-versetzte Gitter vorgestellt, welche im Kapitel 2.3 für die Diskretisierung verwendet werden, wobei diese drei Gitter durch die Anordnung ihrer Gitterpunkte auf diesem Gitter definiert sind. Danach wird mit der lexikographischen Anordnung eine Möglichkeit aufgezeigt, mit der jene Gitter weiter in dieser Arbeit verwendet werden können. Dabei können die Überlegungen aus diesem Abschnitt einfach auf höhere Dimensionen übertragen werden. Die Gitterpunkte schreiben wir mit $x^j := (\xi_1^j, \xi_2^j) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und $j := (j^1, j^2)$ mit $j^i := 1, \dots, m^i$ im Bildbereich $\Omega = [\omega^1, \omega^2] \times [\omega^3, \omega^4] \subset \mathbb{R}^2$, wobei mit $m := (m^1, m^2)$ die jeweiligen Datengrößen gegeben sind für $i = 1, 2$. Zudem ist dann mit $h^i := \frac{(\omega^{2i} - \omega^{2i-1})}{m^i}$ die jeweilige Schrittweite einer Gitterzelle gegeben. Abbildung 5 soll die folgenden Definitionen noch einmal veranschaulichen.

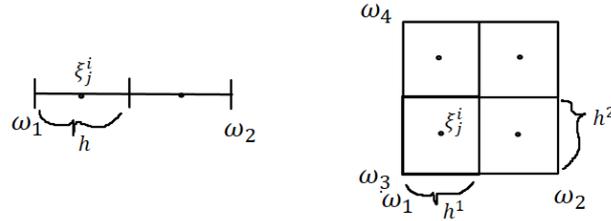


Abbildung 3: Links: Der diskrete Bildbereich $\Omega = [\omega^1, \omega^2] \subset \mathbb{R}$ mit einem zellzentrierten Gitter. Rechts: Der diskrete Bildbereich $\Omega = [\omega^1, \omega^2] \times [\omega^3, \omega^4] \subset \mathbb{R}^2$ mit einem zellzentrierten Gitter.

Mit diesen Definitionen werden nun für $i = 1, 2$ die drei erwähnten Gitter definiert.

- Zell zentriertes Gitter:

$$cell_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \frac{-h^i}{2} < x - \xi_i^j < \frac{h^i}{2} \right\} \quad (8)$$

Die dazugehörigen Gitterpunkte sind dann:

$$(\xi_1^j, \xi_2^j) = (\omega^1 + (j^1 - 0.5)h^1, \omega^3 + (j^2 - 0.5)h^2), j^i = 1, \dots, m^i$$

- Nodales Gitter:

$$cell_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < x - \xi_i^j < h^i \right\} \quad (9)$$

Die dazugehörigen Gitterpunkte sind dann:

$$(\xi_1^j, \xi_2^j) = (\omega^1 + j^1 h^1, \omega^3 + j^2 h^2), j^i = 0, \dots, m^i$$

- Gegeneinander-versetzte Gitter:

$$cell_j := \left\{ x \in \mathbb{R}^d; i, k = 1, 2 \mid \exists! i : 0 < x - \xi_j^i < h^i \wedge \forall k \neq i : \frac{-h^k}{2} < x - \xi_j^k < \frac{h^k}{2} \right\}$$

Für ein $x_{j^i}^i$ gilt:

$$\xi_i^j = \omega^i + (j^i - 0.5)h^i, j^i = 1, \dots, m^i$$

Für $x_{j^k}^k, k \neq i$ gilt dann:

$$\xi_k^j = \omega^k + (j^k - 0.5)h^k, j^k = 0, \dots, m^k$$

(10)

Im Zweidimensionalen können die Daten x^j als mehrdimensionale Arrays aufgefasst werden, also zu jeder Position $j = (j^1, j^2)$ ist ein Vektor (ξ_1^j, ξ_2^j) gegeben. Für die Optimierung, welche in Kapitel 6 betrachtet wird, ist es jedoch praktisch, wenn die Daten in Vektoren angeordnet sind, da so zu jeder Position j eine Zahl gegeben ist. Dabei sind zunächst alle Anordnungen erlaubt, wichtig ist, dass diese dabei konsistent sind. Diese Arbeit verwendet die lexikographische Anordnung aus [1]. Folgende Überlegungen können einfach auf höhere Dimension analog übertragen werden. Eine allgemeine Formulierung der lexikographischen Anordnung ist gegeben mit:

- 1D: $j^{lexiko} \mapsto j^1$
- 2D: $j^{lexiko} \mapsto j^1 + m^1(j^2 - 1)$

1	4	7
2	5	8
3	6	9

Abbildung 4: Beispiel eine lexikographischen Anordnung.

Man kann sich die Gitterpunkte als zwei Matrizen $[X^1, X^2]$, jeweils der Größe $m^1 \times m^2$, vorstellen. Das Ziel ist nun für die verschiedenen Gitter die Gitterpunkte mit der lexikographischen Anordnung in jeweils zwei Vektoren $x^1 := X^1(\cdot), x^2 := X^2(\cdot)$ der Größe $m^1 m^2$ anzuordnen, sodass im Späteren auf die Matrix mit der lexikographischen Anordnung $x_j := [x_{j^1 + m^1(j^2 - 1)}^1, x_{j^1 + m^1(j^2 - 1)}^2]$ zugegriffen werden kann. Diese Formulierung kann man nun auf die verschiedenen Gitter anwenden. Für die folgenden Kapitel werden folgende Bezeichnungen der Gitter eingeführt, wobei die Gitterpunkte immer noch wie zuvor in Abhängigkeit von j^1 und j^2 berechnet werden:

-
- Zellzentrierte Gitter: $x_j^{cc} := x_{j^1+m^1(j^2-1)}^{cc}$, $j^1 = 1, \dots, m^1$, $j^2 = 2, \dots, m^2$,
 - Nodale Gitter: $x_j^n := x_{j^1+m^1(j^2-1)}^n$, $j^1 = 1, \dots, m^1 + 1$, $j^2 = 2, \dots, m^2 + 1$,
 - 1. Möglichkeit gegeneinander-versetzte Gitter: $x_j^{x1s} := x_{j^1+m^1(j^2-1)}^{x1s}$, $j^1 = 1, \dots, m^1$, $j^2 = 2, \dots, m^2 + 1$,
 - 2. Möglichkeit gegeneinander-versetzte Gitter: $x_j^{x2s} := x_{j^1+m^1(j^2-1)}^{x2s}$, $j^1 = 2, \dots, m^1 + 1$, $j^2 = 1, \dots, m^2$,

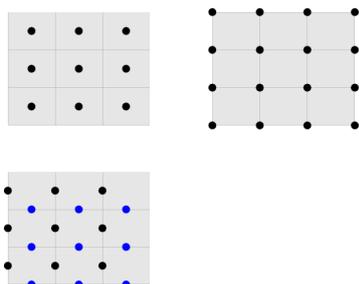


Abbildung 5: Das erste Bild zeigt das zellzentrierte Gitter (8), das zweite das nodale Gitter (9) und das dritte das gegeneinander-versetzte Gitter (10) mit beiden möglichen Ausrichtungen. Alle drei Gitter sind dabei über denselben Bildbereich definiert.

4.2 Interpolation

Wie in Abschnitt 2.1 erwähnt, werden Bilder in dieser Bachelorarbeit als kontinuierlich angenommen. Da aber in der Praxis Bilder meistens nur Messdaten von Sensoren sind, liegen die Bilder im Allgemeinen diskret vor [4]. In diesem Abschnitt wird mit der B-Spline Interpolation eine Möglichkeit vorgestellt, um aus einem diskretem Bild ein kontinuierliches zu erhalten [1]. Ein Vorteil bei den B-Splines liegt darin, dass man auch Polynome niedrigen Grades benutzen kann, um so starke Schwingungen der interpolierenden Kurve zwischen den Stützstellen, wie zum Beispiel bei einer Standard-Polynom-Interpolation, mit beliebig vielen Stützstellen, vermeiden kann [5]. Zudem sind die B-Splines aufgrund ihrer Konstruktion bezüglich Störungen in den Koeffizienten besser konditioniert als zum Beispiel einfache Splines. Für genauere Informationen bezüglich Interpolation wird auf [1] und [5] verwiesen. Im Folgenden wird zur Veranschaulichung erst einmal $d = 1$ angenommen, lineare mit kubischen B-Splines verglichen und anschließend die Überlegungen auf $d = 2$ angewendet.

4.3 B-Spline-Interpolation im Eindimensionalen

Wir gehen im Folgenden von einem äquidistanten Gitter aus den Knoten $x_1 \leq \dots \leq x_n$ mit der Schrittweite h aus. Für die Berechnung wird erst einmal die Definition betrachtet

und dann die kardinalen Splines definiert, sodass die Interpolierte als Linearkombination dieser kardinalen Splines dargestellt werden kann [1].

Definition 10 (B-Splines der Ordnung k [5]§7)

Sei $x_1 \leq \dots \leq x_n$ eine beliebige Folge von Knoten. Dann sind die B-Splines $\mathcal{B}_{i,k}(x)$ der Ordnung k für $k = 1, \dots, n$ und $i = 1, \dots, n - k$ rekursiv erklärt durch:

$$\mathcal{B}_{i,1}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x^i \leq x < x^{i+1} \\ 0 & \text{,sonst} \end{cases}, \quad (11)$$

$$\mathcal{B}_{i,k}(x) := \frac{x - x^i}{x^{i+k-1} - x^i} \mathcal{B}_{i,k-1}(x) + \frac{x^{i+k} - x}{x^{i+k} - x^{i+1}} \mathcal{B}_{i+1,k-1}(x). \quad (12)$$

Aufgrund der Eigenschaften von $\{\mathcal{B}_{1,k}, \dots, \mathcal{B}_{i,k}\}$, insbesondere dass diese eine Basis des Splineraumes \mathcal{T} bilden, besitzt jeder Spline $T \in \mathcal{T}$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination [5]:

$$T = \sum_{i=1}^n c_i \mathcal{B}_{i,k}. \quad (13)$$

Für $k = 2$ und das Intervall $[0, 2]$ können wir mit diesen Informationen die Basis-Polynome der linearen eindimensionalen B-Spline aufstellen, indem $\mathcal{B}_{i,2}$, $i = 1, \dots, n$ rekursiv berechnet wird:

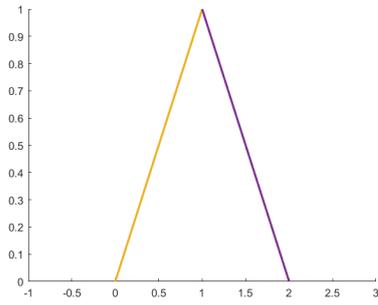
$$\mathcal{B}_1(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in [0,1) \\ 2 - x & \text{für } x \in [1,2) \\ 0 & \text{,sonst.} \end{cases} \quad (14)$$

Für $k = 4$ folgt die Berechnung analog, dafür wird hier das Intervall $[0, 4]$ gewählt:

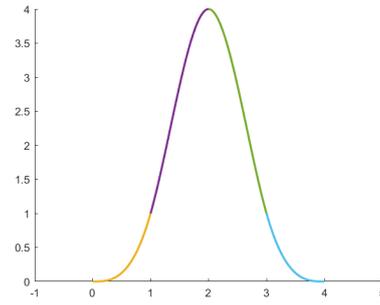
$$\mathcal{B}_3(x) := \frac{1}{6} \begin{cases} x^3 & \text{für } x \in [0,1) \\ 1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2 - 3(x - 1)^3 & \text{für } x \in [1,2) \\ 4 - 6(x - 2)^2 + 3(x - 2)^3 & \text{für } x \in [2,3) \\ 1 - 3(x - 3) + 3(x - 3)^2 - (x - 3)^3 & \text{für } x \in [3,4) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (15)$$

Dabei kann man auch jedes beliebige Intervall wählen, die B-Splines können dann analog für das gewählte Intervall erneut rekursiv berechnet werden [1]. Daraus kann man nun allgemein die kardinalen B-Splines formulieren, welche so auch für höhere Dimensionen und auf ein vorher gewähltes Intervall einfach angewendet werden können:

$$b_{k_i, h_i}^n(x) = b^n\left(\frac{x - x_0}{h_i} - k + \frac{n + 1}{2}\right) \quad (16)$$



(a) Linearen Basis-Polynome (14)



(b) Kubische Basis-Polynome (15)

Abbildung 6: Die Basis-Polynome der eindimensionalen B-Splines.

Mit diesem Wissen wird nun die allgemeine eindeutige Interpolierte [5], welche durch alle Stützpunkte verläuft, aufgestellt:

$$I(x) = \sum_{k=1}^m c_k b_{k,h}^n(x)$$

Mit den allgemeinen Interpolation Eigenschaften [5], ist es nun möglich folgendes Gleichungssystem aufzustellen:

$$I(x_i) = \sum_{k=1}^m c_k b_{k,h}^n(x_i), i = 1, \dots, m, \quad (17)$$

Dabei sind für $n = 1$ die linearen und für $n = 3$ die kubischen B-Splines gemeint. Aufgrund der Definition der kardinalen Splines und der äquidistanten Stützstellen, die hier betrachtet werden, kann $b_{k,h}^n(x_i), i = 1, \dots, m$ als eine Matrix A_n formuliert werden, sodass die Koeffizienten $c = (c_1, \dots, c_m)$ mithilfe des linearen Gleichungssystems $I(x) = A_n c$ gelöst werden können. Die Matrix A_n sieht für $n = 1$ und $n = 3$ folgendermaßen aus:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ und } A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & & 0 \\ 4 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 4 \\ 0 & & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Wie hier schnell zu erkennen ist, sind beide Matrizen strikt diagonaldominant, weshalb diese immer invertierbar sind [5]. Deshalb hat das Gleichungssystem (17) eine eindeutige Lösung, sodass auch insbesondere die Interpolierte eindeutig durch die Koeffizienten c und $b_{k,h}^n$ bestimmt ist [5]. Wie $I(x)$ aussehen kann, ist für die linearen und kubischen B-Splines in Abbildung 7 zu sehen. Es ist zudem zu erkennen, dass die linearen stetig, bei den Stützstellen x_i jedoch nicht differenzierbar sind. Die Kubischen werden hingegen als glatt wahrgenommen. Je nach dem was für Ansprüche an die zu interpolierenden Bildern

gestellt werden, können linearen und kubischen B-Splines verwendet werden. Der Vorteil der linearen B-Splines ist die bessere Laufzeit und die einfachere Berechnung der Koeffizienten, da aufgrund von A_1 kein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, weil $T(x_i) = c_i$ gilt. Jedoch ist, wie erwähnt, die Interpolierte nicht überall notwendigerweise differenzierbar. Ist also eine glatte Funktion gefordert, sind die kubischen durchaus besser geeignet, aber auch aufwendiger zu berechnen, was gerade bei sehr großen Systemen, die in der Regel in der Bildregistrierung gegeben sind, zu einer schlechteren Laufzeit führen kann. In dieser Bachelorarbeit werden die kubischen B-Splines verwendet, da für die Optimierung, welche in Kapitel 6 betrachtet wird, das Bildregistrierungsproblem (7) differenzierbar sein sollte [1].

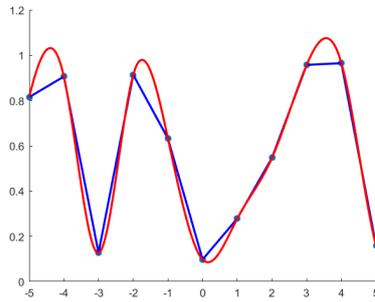


Abbildung 7: Die Interpolierte, welche durch zufällig generierte Stützpunkte (hier hellblau) verläuft, wurde einmal mit den linearen B-Splines (hier blau) und einmal mit den kubischen B-Splines berechnet (hier rot).

4.4 B-Spline-Interpolation im Zweidimensionalen

In der Bildregistrierung liegen jedoch im Allgemeinen mindestens zweidimensionale Bilder vor, weshalb in diesem Abschnitt kurz die zweidimensionalen B-Splines vorgestellt werden. Die Überlegungen können auf höhere Dimensionen erweitert werden, dies wird hier aber nicht weiter betrachtet und auf [1] verwiesen.

Es sind jetzt die Gitterpunkte (x_i^1, x_j^2) gegeben mit $x_i^1 = x_0^1 + h^1 i$ und $x_j^2 = x_0^2 + h^2 j$, $i = 0, \dots, m^1$, $j = 0, \dots, m^2$, wodurch folgendes Gleichungssystem gegeben ist:

$$I(x_i^1, x_j^2) := \sum_{k=1}^{m^2} \sum_{l=1}^{m^1} c_{l,k} b_{l,k,h}^3(x_i^1, x_j^2), \quad (18)$$

$$b_{l,k,h}^3(x_i^1, x_j^2) := b_{l,h^1}^3(x_i^1) b_{k,h^2}(x_j^2).$$

$b_{l,h^1}^3(x_i^1)$ und $b_{k,h^2}(x_j^2)$ sind wieder die tridiagonal Matrizen wie beim Eindimensionalen:

$$A_3^1 := b_{l,h^1}^3(x_i^1) = A_3 \in \mathbb{R}^{m^1 \times m^1} \quad \text{und} \quad A_3^2 := b_{k,h^2}(x_j^2) = A_3 \in \mathbb{R}^{m^2 \times m^2}.$$

Somit berechnen sich die Koeffizienten $c \in \mathbb{R}^{m^1 \times m^2}$ mit:

$$c = (A_3^1)^{-1} I(x_i^1, x_j^2) (A_3^2)^{-1}.$$

Abbildung 8 zeigt ein Beispiel für die Interpolierte

$$I(x^1, x^2) := \sum_{k=1}^{m^2} \sum_{l=1}^{m^1} c_{l,k} b_{l,k,h}^3(x^1, x^2).$$

Mit den bikubischen B-Splines wurde also eine Methode vorgestellt, um aus diskreten Bildern kontinuierliche Bilder, zu erhalten. Ein Vorteil der Herangehensweise der bikubischen B-Spline Interpolation ist, dass die Abbildung differenzierbar ist und somit für die Optimierung angewendet werden kann [1].

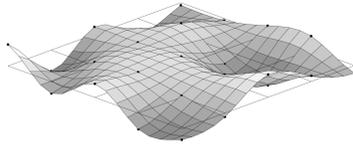


Abbildung 8: Die Interpolierte, welche durch zufällig generierte zweidimensionale Stützpunkte verläuft, wurde mit den bikubische B-Splines berechnet.

Kapitel 5: Diskretisieren

In diesem Kapitel werden jeweils das Distanzmaß SSD (4), der elastische Regularisierer (5), die Volumenerhaltung als Nebenbedingung (6), sowie die Bilder \mathcal{T}, \mathcal{R} und die Vektorverschiebung u diskretisiert. Für die Diskretisierung werden die im Abschnitt 4.1 definierten Gitter verwendet. Durch das Gitter können dann das Objektbild \mathcal{T} und das Referenzbild \mathcal{R} in Bildelemente aufgeteilt werden. Bei der Diskretisierung wird das ursprüngliche kontinuierliche Problem durch ein diskretes Problem angenähert. Das Ziel dabei ist, dass der Fehler stets angegeben und insbesondere kontrolliert werden kann. In diesem Kapitel werden die einzelnen Bestandteile des Bildregistrierungsproblems (7) so diskretisiert, dass der Fehler in Abhängigkeit von der Zellbreite $h = [h^1, h^2]$ angegeben werden kann. Der Vorteil bei dieser Herangehensweise ist, dass der Fehler über h kontrollieren werden kann. Jedoch sollte ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit der Lösung und der Laufzeit gefunden werden, da aufgrund der Definition von $h^i = \frac{\omega^{2i} - \omega^{2i-1}}{m^i}$, $i = 1, 2$ ein kleineres h zu größeren Systemen führt und somit zu einer schlechteren Laufzeit.

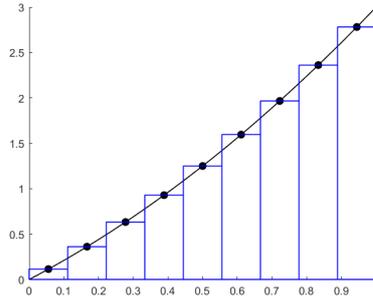


Abbildung 9: Anwendung der Mittelpunkregel auf eine eindimensionale Funktion.

5.1 Bilder und Transformation

Basierend auf [7] wird kurz die Diskretisierung des Objektbildes \mathcal{T} , des Referenzbildes \mathcal{R} und der Vektorverschiebung u vorgestellt. Die beiden Bilder werden auf einem zellzentrierten Gitter (8) diskretisiert, sodass diese jeweils in $m^1 \times m^2$ Bildelementen S_j aufgeteilt sind. Jedes Bildelement ist dann ein Rechteck mit den Längen h^1 und h^2 . Die Vektorverschiebung u wird auf dem nodalen Gitter (8) diskretisiert, also auf den Eckpunkten der Bildelemente. Der Vorteil ist bei der Diskretisierung der Nebenbedingung in Abschnitt 5.4 gegeben, wo das Volumen der Bildelemente über deren Eckpunkte berechnet wird.

5.2 Distanzmaß

In diesem Abschnitt wird das Distanzmaß SSD diskretisiert welches wie folgt mit (4) definiert wurde:

$$\mathcal{D}(\mathcal{T} \circ \varphi, \mathcal{R}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathcal{T}(\varphi(x)) - \mathcal{R}(x))^2 dx.$$

Das Integral kann mithilfe der Mittelpunkregel approximiert werden [8]. Für den eindimensionalen Fall wird das Intervall dafür in gleich große Intervalle der Länge h unterteilt. Aus dem Funktionswert des Mittelpunktes wird dann jeweils ein Rechteck gebildet, wie in Abbildung 9 zu erkennen. Die Summe der Flächen kann das Integral durch das Verkleinern von h dann beliebig gut approximieren, wobei der Fehler der Mittelpunkregel mit $\mathcal{O}((h)^2)$ angegeben werden kann[8].

In dieser Arbeit wird mit zweidimensionalen Bildern gearbeitet, sodass der Bildbereich durch das Gitter in einzelne Segmente mit einer Zellgröße $h^1 h^2$ unterteilt wird. Analog zum eindimensionalen Fall wird der Funktionswert der Mittelpunkte, also die zellzentrierten Punkte, gewählt, um ein Quader zu erzeugen. Die Summe der Volumina dieser

Quader approximiert dann das Integral, sodass für das diskrete SSD gilt:

$$\mathcal{D}^{SSD}(\mathcal{T} \circ \varphi, \mathcal{R}) = \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j^1=1}^{m^1 m^2} (\mathcal{T}(\varphi(x_j^{cc})) - \mathcal{R}(x_j^{cc}))^2 \quad (19)$$

5.3 Regularisierer

In diesem Abschnitt wird der elastische Regularisierer diskretisiert, welcher wie folgt mit (5) definiert wurde:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{elast} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \mathcal{B}(u), \mathcal{B}(u) \rangle dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu \langle \nabla u, \nabla u \rangle + (\lambda + \mu) (\partial_1 u^1 + \partial_2 u^2)^2 dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Da dieser Regularisierer über den Differentialoperator \mathcal{B} definiert ist, muss dieser erst einmal für u bestimmt werden. Dafür wird der Gradient ∇ und die Divergenz $\nabla \cdot$ erst diskretisiert. Anschließend kann das Integral des Regularisierers, wie beim Distanzmaß SSD, mit der Mittelpunkregel diskretisiert werden. Für eine bessere Übersicht wird der diskrete Gradient mit $\nabla^h u_j = [\partial_1^h u_j^1, \partial_2^h u_j^2]^\top$ und die diskrete Divergenz mit $\nabla^h \cdot u_j$ geschrieben. Zudem wurde in 5.1 davon ausgegangen, dass u_j , $j = [j^1, j^2]^\top$ auf dem nodalen Gitter lokalisiert ist und u_j somit die Vektorverschiebung an der Stelle x_j^n ist. Im Folgenden werden auch halbe Indexschritte zugelassen, sodass eine Anordnung wie in Abbildung 10 gegeben ist. Die partiellen Ableitungen $\partial_1^h u_j^1$, $\partial_2^h u_j^2$ können dann durch den Differentialquotienten der u_j angegeben werden [7]. Da die u_j auf dem nodalen Gitter angeordnet sind, werden die partiellen Ableitungen $\partial_1^h u_j^1$, $\partial_2^h u_j^2$ auf den beiden gegeneinander-versetzten Gitter (10) diskretisiert. Für das Bildelement j folgt dann für die Berechnung der partiellen Ableitungen $\partial_1^h u_j^1$, $\partial_2^h u_j^2$ von diesem Bildelement [8]:

$$\begin{aligned} \partial_1^h u_{j^1+0.5, j^2}^1 &= \frac{u_{j^1+1, j^2}^1 - u_{j^1, j^2}^1}{h^1}, \\ \partial_2^h u_{j^1, j^2+0.5}^1 &= \frac{u_{j^1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2}^1}{h^2}, \\ \partial_1^h u_{j^1+0.5, j^2}^2 &= \frac{u_{j^1+1, j^2}^2 - u_{j^1, j^2}^2}{h^1}, \\ \partial_2^h u_{j^1, j^2+0.5}^2 &= \frac{u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2}{h^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

sodass der diskrete Gradient $\nabla^h u_j = [\partial_1^h u_j^1, \partial_2^h u_j^2]^\top$ des Bildelements j mit (21) gegeben ist durch:

$$\nabla^h u_j = \begin{pmatrix} \partial_1^h u_{j^1+0.5, j^2}^1 & \partial_2^h u_{j^1, j^2+0.5}^1 \\ \partial_1^h u_{j^1+0.5, j^2}^2 & \partial_2^h u_{j^1, j^2+0.5}^2 \end{pmatrix}.$$

Anschließend wird die diskrete Divergenz über das zellzentrierte Gitter über die partiellen Ableitungen gemittelt:

$$\nabla^h \cdot u_j = \frac{1}{2}(\partial_1^h u_{j^1+0.5, j^2+1}^1 + \partial_1^h u_{j^1+0.5, j^2+1}^1 + \partial_2^h u_{j^1, j^2+0.5}^2 + \partial_2^h u_{j^1+1, j^2+0.5}^2). \quad (22)$$

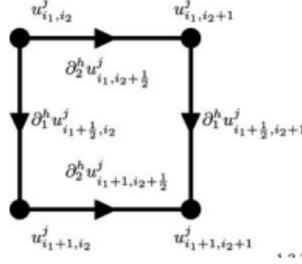


Abbildung 10: Die partiellen Ableitung am gegeneinander-versetzten Gitter. Quelle: Haber, Modersitzki [6]

Mit (21) und (22) folgt für den diskreten elastischen Regularisierer mit der Mittelpunktsregel:

$$\mathcal{S}(u) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m^1 m^2} \mu \langle \nabla^h u_j, \nabla^h u_j \rangle + (\lambda + \mu) (\nabla^h \cdot u_j)^2. \quad (23)$$

5.4 Nebenbedingung

Bei der Diskretisierung der Volumenerhaltung wird die Volumenerhaltung als Nebenbedingung auf jedes Bildelement aus Abschnitt 5.1 angewendet [2]. Es wird also gefordert, dass das Volumen von jedem Bildelement sich durch die Deformation nicht ändert. Dabei soll das Volumen der Bildelemente vor und nach der Deformation durch die Eckpunkte des Bildelements angenähert werden, wie man in Abbildung 11a sehen kann [7]. Mit der Diskretisierung der Vektorverschiebung u , aus Abschnitt 5.1, können somit auch die durch die Transformation $\varphi(x) = x + u(x)$ verschobenen Eckpunkte bestimmt werden, da sowohl die Eckpunkte als auch die Vektorverschiebung auf dem nodalen Gitter angeordnet sind [7]. Zur Veranschaulichung wird zunächst nur die Volumenerhaltung eines Bildelements S_j betrachtet, welches durch die Eckpunkte A, B, C, D wie in 11a bestimmt ist. Nach dieser Betrachtung ist es möglich diese Formulierung auf alle Bildelemente des Bildbereiches zu erweitern und so die Nebenbedingung mit endlich vielen Gleichungen in Abhängigkeit von h , zu formulieren. Da die nicht deformierten Bildelemente Rechtecke sind, ist das Volumen dieser Bildelemente mit Definition 9 eindeutig durch die Eckpunkte jeweils eindeutig gegeben durch $vol(S_j) = \int_{S_j} dx = h^1 h^2, \forall j = 1, \dots, m^1 m^2$. Das Volumen des deformierten Bildelements kann über das Kreuzprodukt der Diagonalen

angenähert werden [7].

$$\begin{aligned} \text{vol}(\varphi(x)) &= \int_{\varphi(S)} dx \approx (\varphi(C) - \varphi(A)) \times (\varphi(B) - \varphi(D)) \\ &= \det((\varphi(C) - \varphi(A)), (\varphi(B) - \varphi(D))) \end{aligned} \quad (24)$$

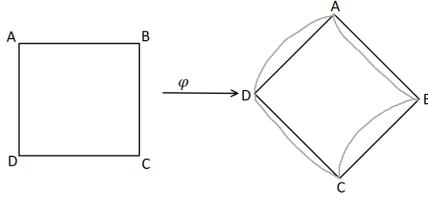
Jedoch können mit dieser Herangehensweise Faltungen innerhalb des Bildelements nicht erkannt werden, wie in Abbildung 11b zu erkennen, da auch so ein positives Volumen bei beispielsweise dem umgeklappten Dreieck herauskommt und deshalb sich das Volumen nicht ändern muss. Um das zu umgehen, wird das Bildelement in zwei Dreiecke aufgeteilt, welche dann volumenerhaltend sein sollen. Um Faltungen in jede Richtung zu erkennen, beziehungsweise durch die Nebenbedingung zu verhindern, werden die beiden dabei entstehenden Dreiecke in den jeweils beiden möglichen Ausrichtungen betrachtet (wie in Abbildung 11c). Somit wird für jede Nebenbedingung einer Zelle das Volumen von vier Dreiecken berechnet. Entsteht nun eine Faltung in dieser Zelle, hat mindestens eines der Dreiecke ein negatives Volumen durch die Änderung der Ausrichtung und das Volumen würde sich ändern [7]. Für die Berechnung der Dreiecke für die Zelle j folgt [7]:

$$\begin{aligned} V_j^1 &= \frac{1}{2}(C' - B') \times (B' - A') \\ V_j^2 &= \frac{1}{2}(D' - A') \times (C' - D') \\ V_j^3 &= \frac{1}{2}(B' - A') \times (A' - D') \\ V_j^4 &= \frac{1}{2}(D' - C') \times (C' - B') \end{aligned} \quad (25)$$

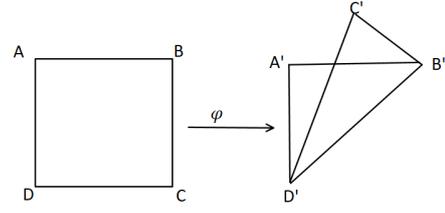
Die Eckpunkte A', B', C' und D' sind die durch die Transformation $\varphi(x) = x + u(x)$ verschobene Punkte, welche hier durch die nodalen Gitterpunkte $x_{j^1, j^2} := x_{j^1, j^2}^n$ und die Vektorverschiebung $u_{j^1, j^2} := u(x_{j^1, j^2}^n)$ bestimmt sind. Diese können nun explizit angegeben werden [7]:

$$\begin{aligned} A' &= [x_{j^1, j^2}^1 + u_{j^1, j^2}^1, x_{j^1, j^2}^2 + u_{j^1, j^2}^2], \\ B' &= [x_{j^1, j^2}^1 + u_{j^1, j^2+1}^1, x_{j^1, j^2}^2 + h^2 + u_{j^1, j^2+1}^2], \\ C' &= [x_{j^1, j^2}^1 + h^1 + u_{j^1+1, j^2+1}^1, x_{j^1, j^2}^2 + h^2 + u_{j^1+1, j^2+1}^2], \\ D' &= [x_{j^1, j^2}^1 + h^1 + u_{j^1+1, j^2}^1, x_{j^1, j^2}^2 + u_{j^1+1, j^2}^2], \end{aligned} \quad (26)$$

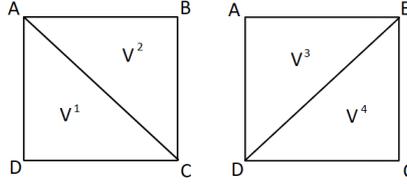
In dieser Gleichung werden, ausgehend von dem Eckpunkt $A := x_{j^1, j^2}$, die anderen Eckpunkte B, C, D mit der jeweiligen Schrittweite h^1 und h^2 berechnet. Es wird im Folgenden die Nebenbedingung für das Dreieck V_j^1 ausführlicher berechnet. Bei den anderen drei Dreiecken wird nur das Ergebnis angegeben, da die Berechnung dieselbe ist. Es müssen nur die jeweiligen Punkte richtig eingesetzt werden. Das Dreieck V_j^1 berechnet sich mit $V_j^1 = \frac{1}{2}(C' - B') \times (B' - A') = \frac{1}{2}\det((C' - B'), (B' - A'))$, es gilt mit (26):



(a) Die erste Skizze ist das nicht deformierte Bildelement, die zweite Skizze ist das von φ deformierte Bildelement mit, welches durch die Verbindungslinien der Eckpunkte angenähert wird.



(b) Die erste Skizze ist das nicht deformierte Bildelement, die zweite Skizze ist das von φ deformierte Bildelement mit einer Faltung.



(c) Ein Bildelement wird in zwei Dreiecke unterteilt, dabei sollen die beiden Abbildungen die beiden möglichen Ausrichtungen dieser Unterteilung zeigen.

Abbildung 11

$$C' - B' = \begin{pmatrix} h^1 + u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1 \\ u_{j^1+1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2+1}^2 \end{pmatrix},$$

$$B' - A' = \begin{pmatrix} u_{j^1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2}^1 \\ h^2 + u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2 \end{pmatrix}$$

Damit folgt für das Volumen des Dreieckes V_j^1 :

$$\begin{aligned} V_j^1 &= \frac{1}{2}(\det((C' - B'), (B' - A'))) \\ &= \frac{1}{2}((h^1 + (u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1))(h^2 + (u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2)) \\ &\quad - (u_{j^1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2}^1)(u_{j^1+1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2+1}^2)) \\ &= \frac{1}{2}(h^1 h^2 + h^1(u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2) + h^2(u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1) \\ &\quad + (u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1)(u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2) - (u_{j^1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2}^1)(u_{j^1+1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2+1}^2)) \end{aligned} \quad (27)$$

Mit der Nebenbedingung $\frac{\text{vol}(\varphi(S))}{\text{vol}(S)} - 1 = 0$ aus (6) folgt die Nebenbedingung vom

Dreieck mit $\text{vol}(V_j) = \frac{h^1 h^2}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_j^1(u) &:= \frac{2}{h^1 h^2} V_j^1 - 1 \\
 &= \frac{(u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2)}{h^2} + \frac{(u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1)}{h^1} + \frac{(u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1)(u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2)}{h^1 h^2} \\
 &\quad - \frac{(u_{j^1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2}^1)(u_{j^1+1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2+1}^2)}{h^1 h^2} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Analog folgt dann für die anderen drei Nebenbedingungen für ein Bildelement j :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_j^2(u) &:= \frac{2}{h^1 h^2} V_j^2 - 1 \\
 &= \frac{(u_{j^1+1, j^2+1}^2 - u_{j^1+1, j^2}^2)}{h^2} + \frac{(u_{j^1+1, j^2}^1 - u_{j^1, j^2}^1)}{h^1} + \frac{(u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1+1, j^2}^1)(u_{j^1+1, j^2}^2 - u_{j^1, j^2}^2)}{h^1 h^2} \\
 &\quad - \frac{(u_{j^1+1, j^2}^1 - u_{j^1, j^2}^1)(u_{j^1+1, j^2+1}^2 - u_{j^1+1, j^2}^2)}{h^1 h^2} \\
 &= 0. \\
 \mathcal{C}_j^3(u) &:= \frac{2}{h^1 h^2} V_j^3 - 1 \\
 &= \frac{(u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2}^2)}{h^2} - \frac{(u_{j^1, j^2}^1 - u_{j^1+1, j^2}^1)}{h^1} + \frac{(u_{j^1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2}^1)(u_{j^1, j^2}^2 - u_{j^1+1, j^2}^2)}{h^1 h^2} \\
 &\quad - \frac{(u_{j^1, j^2}^1 - u_{j^1+1, j^2}^1)(u_{j^1, j^2+1}^2 - u_{j^1+1, j^2}^2)}{h^1 h^2} \\
 &= 0. \\
 \mathcal{C}_j^4(u) &:= \frac{2}{h^1 h^2} V_j^4 - 1 \\
 &= -\frac{(u_{j^1+1, j^2}^2 - u_{j^1+1, j^2+1}^2)}{h^2} + \frac{(u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1)}{h^1} + \frac{(u_{j^1+1, j^2}^1 - u_{j^1+1, j^2+1}^1)(u_{j^1+1, j^2+1}^2 - u_{j^1, j^2+1}^2)}{h^1 h^2} \\
 &\quad - \frac{(u_{j^1+1, j^2+1}^1 - u_{j^1, j^2+1}^1)(u_{j^1+1, j^2}^2 - u_{j^1+1, j^2+1}^2)}{h^1 h^2} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Für jedes Bildelement gibt es also vier Nebenbedingungen, sodass alle Nebenbedingungen zusammen insgesamt aus $4m^1 m^2$ Gleichungen bestehen. Zudem ist, dadurch dass die Volumenerhaltung von jedem Bildelement gefordert ist, die Transformation lokal auch bijektiv, also innerhalb eines Bildelementes. Jedoch kann so globale Bijektivität nicht garantiert werden, da das globale Verhalten bezüglich Faltungen so nicht mehr kontrolliert werden kann. Eine Diskussion über das Fordern der globalen Bijektivität ist jedoch nicht Teil dieser Bachelorarbeit, da darauf nicht mehr der Fokus liegt.

Das diskrete Bildregistrierungsproblem kann nun mit (19), (23), (28) und (29) folgen-

dermaßen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \min_{\varphi} \quad & \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j^1=1}^{m^1 m^2} (\mathcal{T}(\varphi(x_j^{cc})) - \mathcal{R}(x_j^{cc}))^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{m^1 m^2} \mu \langle \nabla^h u_j, \nabla^h u_j \rangle + (\lambda + \mu) (\nabla^h \cdot u_j)^2 \\ \text{u.d.N} \quad & \mathcal{C}_j^i(u) = 0, \forall j = 1, \dots, m^1 m^2; i = 1, \dots, 4. \end{aligned} \tag{30}$$

Der Fehler von der Diskretisierung des Distanzmaßes, des Regularisierer und der Nebenbedingung ist somit immer von der Schrittweite h abhängig. Dieser Fehler geht gegen 0, wenn h gegen 0 geht und h geht wegen $h^i = \frac{\omega^{2i} - \omega^{2i-1}}{m^i}$, $i = 1, 2$ gegen 0, wenn die Datengröße m^i , $i = 1, 2$ gegen ∞ geht. Dies ist so in der Praxis jedoch nicht möglich, zudem ist die Anzahl der zu lösenden Gleichungen von $m^1 m^2$ abhängig, sodass mit steigender Anzahl der Datenpunkte die zu lösende Systeme größer werden und somit die Laufzeit negativ beeinflusst wird. Es sollte also schon vor der Registrierung festgesetzt werden, wie groß der Fehler maximal sein darf, um dann die Anzahl der Datenpunkte möglichst klein zu halten.

Kapitel 6: Optimierung mit SQP

Auch wenn die Implementierung eines Verfahrens zur Lösung des diskreten Bildregistrierungsproblems (35) nicht Gegenstand dieser Bachelorarbeit ist, wird in diesem Kapitel mit dem Algorithmus SQP, sequentielle quadratische Programmierung, eine Möglichkeit zum Lösen des Problems (35) vorgestellt. Für eine Diskussion der Ergebnisse wird auf [2] und [6] verwiesen. Im Folgenden wird zunächst die Idee des SQP's vorgestellt und wie dieser Algorithmus funktioniert. Daraufhin werden die Optimalitätsbedingungen auf das Bildregistrierungsproblem angewendet und mögliche Anwendungen diskutiert.

6.1 Grundlagen des SQP's

Basierend auf [3] wird in diesem Abschnitt mit dem SQP ein Verfahren zum Lösen von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen vorgestellt. Dabei ist das SQP für das Bildregistrierungsproblem (35) besonders gut geeignet, da dieses Verfahren auch bei sehr großen Systeme mit nichtlinearen Optimierungsproblemen mit nichtlinearen Nebenbedingungen sehr effektiv sein und kann häufig mindestens superlineare Konvergenz garantieren, also konvergiert noch relativ schnell gegen die Lösung des Optimierungsproblems. Die Grundidee des SQP besteht darin, dass in jeder Iteration ein quadratisches Modell mit linearen Nebenbedingungen für das Ausgangsproblem formuliert wird, welches durch ein Newton-Verfahren auf den Optimalitätsbedingungen gelöst wird. Im Folgenden soll zum Verdeutlichen der Idee der SQP in seiner einfachsten Form kurz hergeleitet werden. Dafür wird zunächst ein gleichungsbeschränktes Optimierungsproblem betrachtet, wobei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zweimal differenzierbare Funktionen sind. Das Optimie-

rungsproblem lautet:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{u.d.N} \quad & c(x) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

Damit kann man nun die Lagrangefunktion $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T c(x)$ formulieren. Für eine bessere Darstellung wird für die Schreibweise des Gradienten der Nebenbedingung $A(x)^\top := [\nabla c_1(x), \dots, \nabla c_m(x)] \in \mathbb{R}^{n,m}$ festgelegt. Es können nun mithilfe folgenden Satzes die Optimalitätsbedingungen aufgestellt werden:

Satz 1 (KKT-Bedingungen [3], S.321)

Sei x^* ein lokaler Minimierer des Problems (31). Wenn $A(x^*)$ vollen Rang hat, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^m$, sodass (x^*, λ) die KKT-Bedingungen erfüllt:

1. $0 = \nabla_x L(x^*, \lambda) \iff 0 = \nabla f(x^*) - A(x^*)\lambda$
2. $0 = \nabla_\lambda L(x^*, \lambda) \iff 0 = c(x^*)$.

Für das zu lösende Gleichungssystem folgt dann mit den KKT-Bedingungen:

$$F(x, \lambda) := \begin{pmatrix} \nabla f(x) - A(x)^\top \lambda \\ c(x) \end{pmatrix} = 0.$$

Für das Newton-KKT System folgt nun:

$$\begin{aligned} \nabla F(x^k, \lambda^k) \begin{pmatrix} p^k \\ p^\lambda \end{pmatrix} &= -F(x^k, \lambda^k) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) & -A(x^k)^\top \\ A(x^k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^k \\ p^\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\nabla f(x^k) + A(x^k)^\top \lambda^k \\ -c(x^k) \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) & -A(x^k)^\top \\ A(x^k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^k \\ l^k \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \nabla f(x^k) \\ c(x^k) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{32}$$

wobei gilt: $\lambda^{k+1} = p^k + \lambda^k$ und $l^k := \lambda^{k+1}$.

Zudem gilt:

Satz 2 ([3], S.531)

Das System (32) hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn

1. der Gradient $A(x)$ vollen Zeilenrang hat und
2. die Matrix $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k)$ positiv definit in der Tangentialebenen der Nebenbedingungen ist, also $d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) d > 0$ für alle $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, sodass $A(x^k)d = 0$.

Der Newton-Schritt ist dann ausgehend von $(x^k, \lambda^k)^\top$, wobei $(p^k, p^\lambda)^\top$ das Newton-KKT System löst, gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p^k \\ p^\lambda \end{pmatrix}, \quad (33)$$

Wendet man nun die Taylor-Approximation 2. Ordnung auf die Lagrange-Funktion und die Taylor-Approximation 1. Ordnung auf die Nebenbedingungen um $(x^k, \lambda^k)^\top$ an, entspricht das Lösen von (32) dem Lösen des folgenden approximierten Teilproblem:

$$\begin{aligned} \min_p \quad & \frac{1}{2} p^\top \nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k) p + \nabla_x L(x^k, \lambda^k)^\top p + L(x^k, \lambda^k) \\ \text{s.t.} \quad & A(x^k) p + c(x^k) = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Dieses Problem, welches über $p = (p^k, p^\lambda)^\top$, minimiert wird, ist somit ein quadratisches Problem mit linearen Nebenbedingungen. Beim SQP wird also in jedem Iterationsschritt ein quadratisches Teilproblem gelöst, welches das ursprüngliche Problem um $(x^k, \lambda^k)^\top$ approximiert. Mit diesem Wissen wird einmal der Algorithmus in seiner einfachsten Form vorgestellt:

Algorithm 1: Einfache Form SQP

Result: Minimum x^*

Wähle Startwert x^0 und λ^0 , setze $k = 0$;

while *Konvergenzkriterium nicht erfüllt* **do**

 Berechne $f(x^k)$; $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k)$; $c(x^k)$; $A(x^k)$;

 Löse (32) um p^k und l^k zu erhalten;

$x^{k+1} = x^k + p^k$; $\lambda^{k+1} = l^k$; $k = k + 1$;

end

Setze $x^* = x^k$;

Eine Schwierigkeit bei dieser einfachen Form ist, dass bei nicht global konvexen Problemen der Startpunkt x^0 schon nah genug an der Lösung x^* gewählt werden sollte, damit das Verfahren konvergiert. In der Praxis kann man jedoch nicht von Konvexität des Problems ausgehen, zudem kann es auch unter diesen Bedingungen Schwierigkeiten bei der richtigen Wahl des Startwertes geben. So kann es bei diesen Voraussetzungen vorkommen, dass nur lokale Minima gefunden werden oder die Lösung gegebenenfalls nicht gut genug ist. Ein weitere Schwierigkeit besteht, wenn die Hessematrix des quadratischen Teilproblems annähernd singulär oder singulär ist, da so die Lösung des Lösungssystems (32) keine gute Lösung mehr sein kann oder keine Lösung gefunden werden kann. Um den SQP zu globalisieren und Lösbarkeit zu garantieren, gibt es mehrere Variationsmöglichkeiten zum Erreichen von globaler Lösbarkeit. Welche sinnvoll für das Bildregistrierungsproblem sein könnten, soll im nächsten Abschnitt für das in dieser Arbeit aufgestellte Bildregistrierungsproblem (35) kurz diskutiert werden.

6.2 Anwendung des SQP's auf das Problem

Wie schon im Abschnitt 6.1 erwähnt kann der SQP auch für sehr große Systeme sehr effektiv sein [3] und mit weiteren Bedingungen globale Lösbarkeit erreichen, weshalb die Anwendung des SQP's auf das Bildregistrierungsproblem (35) angewendet wird. So ist bei dem hier vorgestellten Bildregistrierungsproblem die Anzahl der zu lösenden Gleichungen von der Anzahl der Bildelemente abhängig, sodass sehr große Systeme entstehen können. Das Problem kann dann wie (35) analog zu (31) aufgestellt werden:

$$\min_{\varphi} \quad \frac{h_1 h_2}{2} \sum_{j=1}^{m^1 m^2} (\mathcal{T}(\varphi(x_j^{cc})) - \mathcal{R}(x_j^{cc}))^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{m^1 m^2} \mu \langle \nabla^h u_j, \nabla^h u_j \rangle + (\lambda + \mu) (\nabla^h \cdot u_j)^2$$

$$\text{u.d.N} \quad \mathcal{C}_j^i(u) = 0, \forall j = 1, \dots, m^1 m^2; i = 1, \dots, 4. \quad (35)$$

Für die Lagrange-Funktion gilt für dieses Problem:

$$L(\varphi, \lambda) = \mathcal{I}(\varphi) + \sum_{i=1}^4 \lambda^i \mathcal{C}^i. \quad (36)$$

und damit ergibt sich die KKT-Bedingung wie folgt:

$$\begin{aligned} \nabla_{\varphi} L(\varphi^*, \lambda^*) &= 0, \\ \nabla_{\lambda} L(\varphi^*, \lambda^*) &= 0, \end{aligned} \quad (37)$$

Im Unterschied zu den Ausführungen in Abschnitt 6.1 werden nicht mehr einfache Funktionen, sondern Funktionale betrachtet. Demnach wird die Lagrangefunktion über Funktionen abgeleitet, für die bei diesem Bildregistrierungsproblem keine Informationen gegeben sind. Wie solche Funktionale abgeleitet werden, ist nicht Teil dieser Bachelorarbeit. Demnach werden im Folgenden nur allgemeine Überlegungen getroffen, die nicht weiter vertieft werden. Alle weiteren Ausführungen basieren auf [3], worauf auch für genauere Informationen verwiesen wird. Ein häufige Herausforderung beim Lösen, welches auftreten kann, ist die nicht garantierte Konvexität des Bildregistrierungsproblems. Zudem ist das aufgestellte Problem kein gut gestelltes und auch durch den Regularisierer und die Nebenbedingung, welche das Problem verbessern, kann noch nicht garantiert werden, dass das Bildregistrierungsproblem eindeutig lösbar ist. Deshalb könnte man den Algorithmus erweitern, um solche Schwierigkeiten zu umgehen. Mögliche Anwendungen sind die Vertrauensintervall-SQP-Methode und die Liniensuche-Methode. Bei der Vertrauensintervall-SQP-Methode wird so eine weitere Nebenbedingung hinzugefügt, die eine Umgebung für die Suchrichtung angibt, sodass die Hessematrix $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k)$ aus Abschnitt 6.1 auch indefinit sein kann. Über die Liniensuche wird garantiert, dass es sich bei der Suchrichtung immer um eine Abstiegsrichtung handelt. Ist die Hessematrix $\nabla_{xx}^2 L(x^k, \lambda^k)$ aus Abschnitt 6.1 indefinit, so kann diese durch eine positiv definite Quasi-Newton-Approximation angenähert werden. Zudem kann bei beiden die sogenannte l^1 -Merit-Funktion verwendet werden. Bei der Vertrauensintervall-Methode kann die

l^1 -Merit-Funktion bestimmen, ob ein Schritt akzeptiert wird oder nicht, außerdem kann der Vertrauensradius dadurch kontrolliert werden. Bei der Liniensuche wird dadurch eine Schrittweite eingeführt, die durch die l^1 -Merit-Funktion kontrolliert wird. Als einen kleinen Einblick soll die l^1 -Merit-Funktion als Beispiel für die Liniensuche für das Problem (31) kurz vorgestellt werden. Dabei soll α^k die Schrittweite sein, sodass für den Newton-Schritt folgt:

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ \lambda^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ \lambda^k \end{pmatrix} + \alpha^k \begin{pmatrix} p^k \\ p^\lambda \end{pmatrix},$$

Die l^1 -Merit-Funktion stellt dabei sicher, dass es sich beim Iterationsschritt um einen Abstieg handelt und die Nebenbedingungen nicht zu stark verletzt werden. Die l_1 -Merit-Funktion ist wie folgt definiert:

$$\phi_1(x, \mu) = f(x) + \mu \|\bar{c}(x)\|_1.$$

Ein Schritt wird akzeptiert, wenn folgendes gilt:

$$\phi_1(x^k + \alpha^k p^k, \mu^k) \leq \phi_1(x^k, \mu^k) + \eta \alpha^k \mathcal{D}(\phi_1(x^k, \mu), p^k), \eta \in (0, 1),$$

wobei $\mathcal{D}(\phi_1(x^k, \mu), p^k)$ die Richtungsableitung von $\phi_1(x^k, \mu)$ in Richtung p^k ist. Wenn gilt $\mathcal{D}(\phi_1(x^k, \mu), p^k) < 0$, dann handelt es sich bei p^k um eine Abstiegsrichtung. Dies ist erfüllt wenn μ ausreichend groß ist, also wenn gilt:

$$\mu \geq \frac{(\nabla f(x^k)^\top p^k + (1/2) p_k^\top \nabla_{xx}^2 L^k p_k)}{((1-\rho)\|c(x^k)\|_1)}, \quad \rho \in (0, 1).$$

Dieses ist wie erwähnt nur eine Möglichkeit die Lösbarkeit zu verbessern. In [3] werden weitere Möglichkeiten vorgestellt, jedoch werden dort auch nur stetig differenzierbare Funktionen betrachtet und die Übertragbarkeit auf die Funktionale in dieser Arbeit ist noch nicht geklärt.

Kapitel 7: Zusammenfassung der Arbeit

Zusammenfassend zeigt diese Bachelorarbeit, dass sich das schlecht gestellte Bildregistrierungsproblem durch den Regularisierer und die Nebenbedingung verbessern lässt und zudem plausiblere Transformationen gefunden werden. So kann durch die Volumenerhaltung lokale Bijektivität der Transformation garantiert werden. Mit dem Regularisierer hingegen werden nur stetig differenzierbare Transformationen zugelassen. Ein weiterer Vorteil ist, dass keine weiteren Vorannahmen an die Transformation gestellt werden müssen, um jenes zu garantieren. Mit dem diskretisieren-dann-optimieren Ansatz war es möglich, aus dem punktweise formulierten Bildregistrierungsproblem ein diskretes zu formulieren, sodass dieses Problem auf die Optimierung angewendet werden kann. Zu-

dem wurde mit dem SQP ein Algorithmus vorgestellt, der sich bei großen nichtlinearen Optimierungsproblemen mit nichtlinearen Nebenbedingungen bewährt hat.

7.1 Ausblick

Als Ausblick sollen in diesem Abschnitt weiterführende Überlegungen diskutiert werden. Im nächsten Schritt könnte das Problem mit dem SQP gelöst werden. Wofür zunächst die Ableitungen des Funktionals bestimmt werden müssen. Anschließend kann man den SQP mit den erwähnten Modifikationen implementieren, um dann mit echten Bilddaten das Bildregistrierungsproblem zu lösen. Dabei besteht die Möglichkeit verschiedene SQP-Verfahren miteinander vergleichen. Zudem stellt sich die Frage, wie groß der Einfluss der Volumenerhaltung auf die Ähnlichkeit des deformierten Objektbildes und des Referenzbildes ist. So ist die geforderte Volumenerhaltung eine starke Einschränkung der Transformation und es erscheint vorstellbar, dass diese Einschränkung zu starke Auswirkungen auf die Ähnlichkeit und Vergleichbarkeit des Objektbildes und Referenzbildes haben könnte. Demnach ließen sich numerische Experimente mit und ohne Nebenbedingungen mit sonst gleichen Voraussetzungen durchführen. Es ist zu erwarten, dass bei der Registrierung ohne Nebenbedingung bessere Ergebnisse als bei der Registrierung mit volumenerhaltenden Nebenbedingungen bezüglich der Ähnlichkeit auftreten werden, jedoch Faltungen im deformierten Gitter entstehen und das deformierte Bild nicht mehr plausibel erscheint. Ein anderer Ansatz den man betrachten könnte, wäre eine Lockerung der Nebenbedingungen, indem man ein ungleichungsbeschränktes Problem betrachtet und eine gewisse Volumenänderung erlauben würde. In diesem Fall könnte man den SQP für ungleichungsbeschränkte Probleme verwenden und versuchen, einen Kompromiss zwischen der Volumenänderung und der Ähnlichkeit des deformierten Objektbildes und des Referenzbildes zu finden. Dieser Kompromiss könnte jedoch von der jeweiligen Anwendung abhängig sein. So wird es in einigen medizinischen Anwendungsgebieten wie, zum Beispiel dem Vergleichen von prä- und post-operativen Behandlungen, wichtig sein, dass sich das Volumen einiger Strukturen im Körper nicht ändert. In diesem Fall scheint die Volumenerhaltung als Nebenbedingung sinnvoll. Allgemein ist die volumenerhaltende Bildregistrierung ein weitgefächertes Feld und kann auf viele Bereiche angewendet werden. Mit dem SQP ist ein effektives Verfahren zum Lösen gegeben.

Literatur

- [1] J. Modersitzki, FAIR: Flexible Algorithms for Image Registration. SIAM, 2009.
 - [2] Haber, E., Modersitzki, J., Numerical methods for volume preserving image registration, February 17, 2004
 - [3] Nocedal, J., Wright, S.J. (2006), Numerical Optimization (2. Aufl.), Springer Science+Business Media, New York, NY, USA
-

- [4] K. Bredies, D. Lorenz, *Mathematische Bildverarbeitung: Einführung in Grundlagen und moderne Theorie*, 1. Auflage 2011
- [5] P. Deuffhard, A. Hohmann, *Numerische Mathematik 1: Eine algorithmisch orientierte Einführung*, 4., überarbeitete und erweiterte Auflage, S.240-255
- [6] E. Haber, S. Heldmann, J. Modersitzki, *A computational framework for image-based constrained registration*, 2009
- [7] E. Haber, J. Modersitzki, *Image Registration with Guaranteed Displacement Regularity*, April 28, 2006
- [8] A. Meister, T. Sonar, *Numerik, Eine lebendige und gut verständliche Einführung mit vielen Beispielen*, 2019
- [9] T. Rohlfing, C. R. Maurer, Jr.*, Member, IEEE, D. A. Bluemke, M. A. Jacobs, *Volume-Preserving Nonrigid Registration of MR Breast Images Using Free-Form Deformation With an Incompressibility Constraint*, IEEE TRANSACTIONS ON MEDICAL IMAGING, VOL. 22, NO. 6, JUNE 2003
- [10] B. Fischer, J. Modersitzki, *Ill-posed medicine—an introduction to image registration*, 23 May 2008
- [11] E. Haber, J. Modersitzki, *Volume Preserving Image Registration*, 2004
- [12] M. Abbasi, A. Kruger, M. Théra, *Gateaux differentiability revisited*, 12 Oct 2020
- [13] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin 13 (1902), 49–52

