



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND  
IMAGE COMPUTING

Bachelorarbeit

# Rekonstruktionsverfahren für die Single-Photon-Emission-Computed-Tomography

Sven-Thomas Antoni

Thema ausgegeben und betreut von  
Prof. Dr. Jan Modersitzki  
Institute of Mathematics and Image Computing

und  
Dr. Hanno Schumacher  
Firma MiE Germany

Abgabe: 16.09.2011



IM FOCUS DAS LEBEN

# Erklärung

Ich versichere, die Bachelorarbeit selbstständig und lediglich unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.

Ich erkläre weiterhin, dass die vorliegende Arbeit noch nicht im Rahmen eines anderen Prüfungsverfahrens eingereicht wurde.

---

(Vorname, Nachname)

(Ort, Datum)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Einordnung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Einleitung in die Bildgebung der SPECT . . . . .	2
1.2.1	Funktionsprinzipien der SPECT . . . . .	2
1.2.2	Einordnung in die medizinische Bildgebung . . . . .	2
1.2.3	Anwendungsgebiete für die SPECT . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Bildgebung mit SPECT</b>	<b>4</b>
2.1	Der Messvorgang . . . . .	4
2.2	Problemstellung der Rekonstruktion . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Rekonstruktionsverfahren</b>	<b>8</b>
3.1	Die gefilterte Rückprojektion . . . . .	8
3.1.1	Die Radon-Transformation . . . . .	8
3.1.2	Das Fourier-Slice-Theorem . . . . .	10
3.1.3	Die ungefilterte Rückprojektion . . . . .	11
3.1.4	Die gefilterte Rückprojektion . . . . .	14
3.2	Einführung in die algebraische Rekonstruktion . . . . .	15
3.2.1	Diskretisierung der Problemstellung . . . . .	15
3.2.2	Entwicklung eines algebraischen Modells . . . . .	17
3.3	Das Maximum-Likelihood-Expectation-Maximization Verfahren . . . . .	19
3.3.1	Das Maximum-Likelihood Verfahren . . . . .	19
3.3.2	Der Expectation-Maximization Algorithmus . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Beispielbetrachtung und Vergleich</b>	<b>26</b>
4.1	Beispielbetrachtung - reale Datensätze . . . . .	26
4.2	Vergleich - simulierte Datensätze . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>30</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>31</b>

# 1 Einleitung und Einordnung

## 1.1 Motivation

Die Bildgebung ist in der heutigen Zeit aus der Medizin kaum mehr weg zu denken. Sie kann Ärzten umfassende Informationen über Morphologie und Stoffwechselfvorgänge im Körper ihrer Patienten liefern, ohne dass ein chirurgischer Eingriff notwendig ist [Buz05, S. 1]. Solche Bilddaten sind dabei wichtig für die Diagnose diverser Erkrankungen oder die Planung von Operationen [CSP03, S. 3-6]. Allein in Deutschland wurden im Durchschnitt in den Jahren 1996–2005 jedes Jahr 4,2 Millionen nuklearmedizinische Untersuchungen durchgeführt [Ber07, S. 241].

In der morphologischen Bildgebung haben sich **Magnetresonanztomographie** (MRT) und transmissionstomographische Verfahren wie **Röntgentomographie** oder **Computertomographie** (CT) etabliert [CSP03, S. 1].

Für die Anzeige von Stoffwechselaktivitäten oder des Blutflusses werden in der funktionellen Bildgebung **funktionelle Magnetresonanztomographie** (fMRT) und emissionstomographische Verfahren der Nuklearmedizin wie **Szintigraphie**, **Positron Emission Tomography** (PET) oder **Single Photon Emission Computed Tomography** (SPECT) angewandt [CSP03, S. 1-2].

Um differenziertere Diagnosen erstellen zu können, ist dabei die Wirklichkeitstreue und Qualität der Bilder entscheidend. Verbessert wird die Bildqualität einerseits durch verbesserte Aufnahmeverfahren und andererseits durch die Verbesserung und Entwicklung von Rekonstruktionsverfahren für die bei den Aufnahmen gewonnenen Daten. Beide Bereiche stellen dabei wichtige Forschungs- und Arbeitsfelder dar.

In dieser Arbeit möchte ich mich mit **Rekonstruktionsverfahren** für SPECT beschäftigen. Dabei werde ich, nachdem ich in diesem Kapitel eine Einleitung in SPECT gegeben habe, in Kapitel 2 die mathematischen und physikalischen Grundlagen der Rekonstruktion wiedergeben, wie sie z.B. bei Buzug [Buz05] und Zaidi [Zai06] beschrieben sind. In Kapitel 3 werde ich die **gefilterte Rückprojektion**, ein direktes, analytisches Verfahren und die Methode der **Maximum-Likelihood-Expectation-Maximization** (ML-EM), ein iteratives, statistisches Verfahren, näher betrachten. Dabei werde ich die gefilterte Rückprojektion nach der Beschreibung von Zaidi [Zai06] und das Maximum-Likelihood-Expectation-Maximization Verfahren nach Shepp und Vardi [SV82], nach der Beschreibung von Buzug [Buz05] wiedergeben. Im Kapitel 4 werde ich beide Verfahren mit simulierten Aufnahmedaten vergleichen und die Ergebnisse realer Projektionsdaten betrachten, die ich freundlicherweise von Dr. Schumacher (Firma MiE Germany) zur Verfügung gestellt bekommen habe. Dazu habe ich die betrachteten Verfahren in Matlab implementiert. In Kapitel 5 möchte ich mit einem Fazit schließen.

## 1.2 Einleitung in die Bildgebung der SPECT

### 1.2.1 Funktionsprinzipien der SPECT

SPECT ist ein emissionstomographisches Verfahren, welches die dreidimensionale Darstellung der Verteilung von Radioaktivität in einem Aufnahmegebiet ermöglicht [CSP03, S. 1]. In der nuklearmedizinischen Bildgebung mit SPECT werden einem Patienten zu einem zu visualisierenden Gebiet spezifische Radiopharmaka, sogenannte Tracer, verabreicht. Diese Radiopharmaka können einzelne Radionuklide oder mit Radionukliden markierte Substanzen sein, die  $\gamma$ -Strahlung emittieren [CSP03, S. 1].

Eine Aufnahme mit SPECT besteht aus zwei wesentlichen Teilen: der Messung und der Rekonstruktion. Bei der Messung wird die Strahlungsaktivität aus verschiedenen Winkeln um den Aufnahmebereich ermittelt, um mit diesen Daten die Rekonstruktion vorzunehmen. Die Qualität der gemessenen Daten hängt dabei von der gemessenen Strahlendosis und somit mittelbar von der injizierten Tracerdosis ab, da sich mit fallender Anzahl an gemessenen Zerfällen das Signal-Rausch-Verhältnis erhöhen kann [Buz05, S. 364], mehr zum Ablauf der Aufnahme siehe Abschnitt 2.1. Da die Strahlenbelastung für den Patienten möglichst niedrig gehalten werden muss und um die Aufnahmezeit zu verringern, werden typischerweise zwei oder drei **Gamma-Kameras** eingesetzt um mehr Informationen in gleicher Zeit zu erhalten. In Kombination mit intelligenten Rekonstruktionsverfahren können so bessere Ergebnisse erhalten werden [CSP03, S. 299].

Ein Problem der Messung von Daten mit SPECT ist die Abschwächung der Strahlungsaktivität durch verschiedene Effekte wie Absorption oder Ablenkung von  $\gamma$ -Quanten (siehe z.B. [Cha78]). Dies verringert die ohnehin nicht hohen gemessenen Zerfälle zusätzlich, das Signal-Rausch-Verhältnis wird schlechter. Soll zum Beispiel ein Tumor lokalisiert werden, so kann ein Tracer eingesetzt werden, der als Energielieferant dient. Dieser wird sich im Tumor stärker anreichern als im übrigen Gewebe und der Tumor ist durch eine höhere emittierte Strahlendosis vom übrigen Gewebe zu unterscheiden. Je größer ein Tumor ist und je weniger die von ihm ausgehende Strahlung abgeschwächt wird, desto besser ist er in der Rekonstruktion zu erkennen. Liegt ein kleiner Tumor im Körperinneren, so kann durch die Abschwächung eine Diagnose erschwert oder ganz verhindert werden. Die Abschwächung kann in der Rekonstruktion berücksichtigt oder zumindest nachträglich betrachtet werden, siehe dazu [CSP03, Buz05, Zai06]. Durch die Abschwächung sind bei SPECT-Aufnahmen 360°-Messungen üblich, da durch die nicht uniforme Gestalt des Körpers und entsprechend unterschiedliche Abschwächungen die Informationen gegenüberliegender Messungen verschieden sind [CSP03, S.305-306].

### 1.2.2 Einordnung in die medizinische Bildgebung

Als nuklearmedizinisches Verfahren gehört SPECT zusammen mit Verfahren wie Szintigraphie, PET und MRT in den Bereich der Emissionstomographie. Die Szintigraphie ist dabei das nuklearmedizinische Gegenstück zur Röntgentomographie, beide Verfahren parallelprojizieren ein dreidimensionales Objekt in eine zweidimensionale Ebene, wobei bei der Röntgentomographie dies durch Transmission von Röntgenstrahlen durch den Körper geschieht und bei der Szintigraphie durch Emission von  $\gamma$ -Quanten aus dem Körperinneren. Das Verfahren der Transmissionstomographie, das der SPECT am nächsten kommt, ist die Computertomographie (CT). Bei beiden Verfahren werden um ein Objekt Projektionen gemessen und anschließend mit diesen Projektionen ein Ergebnis berechnet [CSP03, S. 1;

Buz05, S. 2-3]. Dabei kommen zum Teil sehr ähnliche Modelle und Algorithmen zum Einsatz. Eine Szintigrafie zur SPECT verhält sich entsprechend einem Röntgenbild zur CT. Nahe Verwandtschaft besteht über die Szintigrafie und die verwendeten Verfahren zwischen SPECT und PET. Der wesentliche technische Unterschied liegt hier im Messverfahren. Bei der SPECT werden direkt die vom Tracer emittierten  $\gamma$ -Quanten aus verschiedenen Winkeln mit einer oder mehreren rotierenden Kameras gemessen. Bei der PET wird die bei der Wechselwirkung zwischen verabreichten Positronen und im Körper vorhandenen Elektronen entstehende Vernichtungsstrahlung (in Form von zwei im Winkel von  $180^\circ$  emittierenden Photonen) durch ringförmig angeordnete Detektoren gemessen.

In den Bereich der Nuklearmedizin gehört auch die MRT, sie unterscheidet sich jedoch grundsätzlich von den emissionstomographischen Verfahren, da bei ihr nicht die Anwendung radioaktiver Substanzen zur Bildgebung genutzt wird, sondern kernphysikalische Effekte [NW01, S. 50].

SPECT, PET, CT und Magnetresonanztomografie (MRT) basieren auf der Berechnung von Schnittbildern. Genauer werden Transversalschnitte berechnet — Schnitte, die senkrecht zur Längsachse eines stehenden Menschen stehen. Dies machen bereits die Namen deutlich: Tomographie lässt sich vom altgriechischen frei als „Schnittbildverfahren“ übersetzen.

### 1.2.3 Anwendungsgebiete für die SPECT

SPECT konkurriert in seinen Anwendungsbereichen insbesondere mit anderen funktionellen, bildgebenden Verfahren wie Szintigraphie, PET und der fMRT. Dabei ermöglichen nur SPECT, PET und fMRT eine dreidimensionale Darstellung. Von diesen drei Verfahren ist SPECT das günstigste [SMY05, S. 118; Zai06, S. 78]. Außerdem ist SPECT, ebenso wie PET, nicht anfällig gegenüber ferromagnetischen Implantaten und wird entsprechend umfangreich eingesetzt.

Im Allgemeinen sind die Anwendungsgebiete der SPECT dieselben wie bei der Szintigrafie — die Untersuchung des Funktionszustandes von Geweben und Organen mittels Messgrößen wie Stoffwechselaktivität oder Blutfluss [Zai06, S. 439, S. 481 ff], da die Morphologie systembedingt kaum ermittelt werden kann. Im Gegensatz zur Szintigrafie, die lediglich eine Parallelprojektion entlang einer Achse in die Ebene liefert, kann SPECT benutzt werden, wenn eine dreidimensionale Darstellung gewünscht ist [Zai06, S. 8].

Häufige Anwendung findet sich in Form der **gated-SPECT**, dabei wird das SPECT-Gerät mit einem EKG verbunden, um damit die Durchblutung des Herzmuskelgewebes zu untersuchen (z.B. bei Verdacht auf Gefäßverengungen). Durch diese Kombination lässt sich der Abbau der radioaktiven Substanzen im Verhältnis zu jedem einzelnen Herzschlag messen [Zai06, S. 486]. Weitere wichtige Anwendungsgebiete sind:

- *Kardiologie* als **Myocard-SPECT** zur Bestimmung der Vitalität des Herzmuskelgewebes [Zai06, S. 481 ff].
- *Skelettszintigrafie* als **Knochen-SPECT** zur Lokalisation von Regionen mit verändertem Knochenstoffwechsel [Zai06, S. 60].
- *Neurologie* als **Hirnfunktions-SPECT** zur Diagnose von Alzheimererkrankungen [Zai06, S. 290] und in der Diagnostik und Differenzierung von Parkinsonsyndromen [PB04].
- *Onkologie* als **Somatostatin-Rezeptor-Szintigrafie** mit Octreotid, einem synthetisches Analogon des Hormons Somatostatin, bei der Erkennung von Neuroendokrinen Tumoren [BH04].

# 2 Grundlagen der Bildgebung mit SPECT

## 2.1 Der Messvorgang

Dieses Kapitel soll die Grundlagen für die Rekonstruktion eines SPECT-Bildes wiedergeben. Das Funktionsprinzip einer SPECT-Aufnahme wurde dabei bereits in Abschnitt 1.2.1 kurz vorgestellt. Im Folgenden möchte ich ein mathematisches Modell des Messvorgangs beschreiben. Dabei sollen Techniken, wie die Messung durch mehrere Kameras, außer acht gelassen werden, da dies die Beschreibung nur unnötig verkomplizieren würde. Grundlage der Beschreibung sind dabei die Bücher von Buzug [Buz05], Natterer und Wübbeling [NW01] und Zaidi [Zai06].

Beim Messen einer SPECT-Aufnahme werden zweidimensionale Projektionen der Aktivitätsverteilungen auf die Gamma-Kamera aus verschiedenen Winkeln um ein dreidimensionales Aufnahmegebiet gemessen. Die Aktivitätsverteilung im Aufnahmegebiet

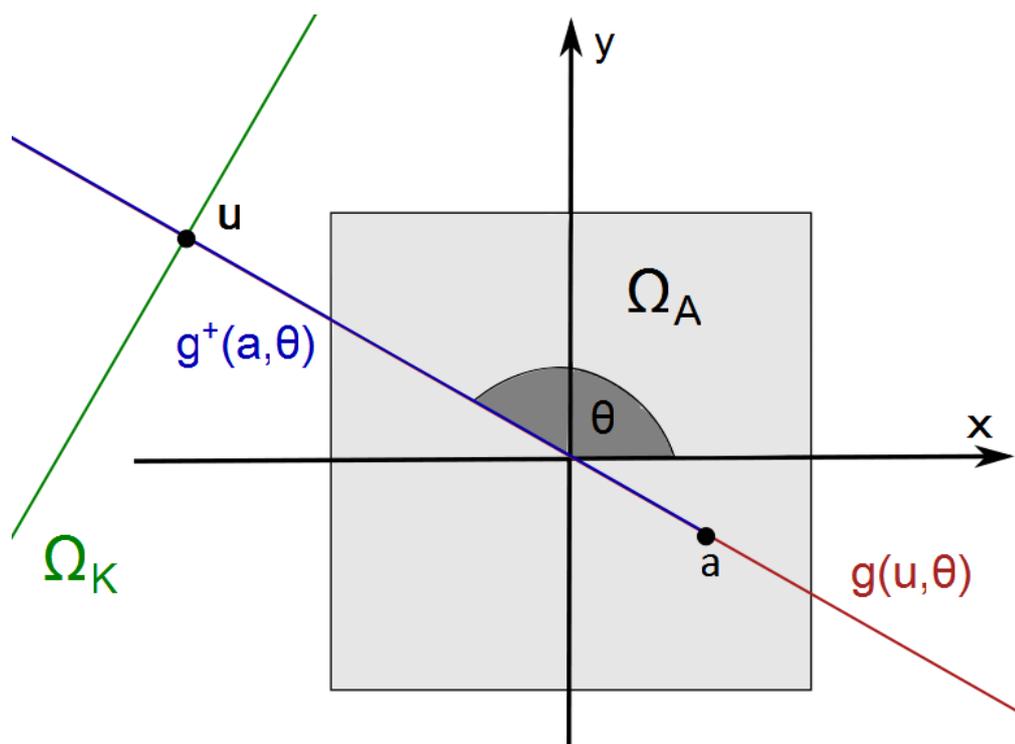


Abbildung 2.1: Skizze des Aufnahmebereiches und der Detektorfläche einer Gamma-Kamera. Außerdem ist der Strahl  $g^+(a, \theta)$  ausgehend von einem Punkt  $a$  im Aufnahmegebiet und die Gerade  $g(u, \theta)$  durch  $u$  auf der Detektorfläche eingezeichnet.

wird dabei mit einer Gamma-Kamera ermittelt, auf deren Detektorfläche eintreffende  $\gamma$ -Quanten registriert werden können. In der folgenden Betrachtung kann die dritte Dimension vernachlässigt werden, weswegen nur die Parallel-Projektion eines zweidimensionalen Aufnahmegebietes betrachtet wird. Tatsächlich wird keine Detektorfläche,

sondern eine Detektorstrecke betrachtet. Ich verwende in dieser Arbeit beide Begriffe synonym. Die zusammenhängende, abgeschlossene Menge  $\Omega_K \subset \mathbb{R}^2$  repräsentiert dann die Detektorfläche der Gamma-Kamera. Die Gamma-Kamera besitzt einen **Kollimator**, z.B. einen **Parallelloch-Kollimator**, mit dem eine Aussage über den Winkel getroffen werden kann, mit dem gemessene  $\gamma$ -Quanten auf der Detektorfläche eingegangen sind. Die nähere Funktionsweise einer Gamma-Kamera kann unter [Ang58] nachgelesen werden.

Das von der Gamma-Kamera aufgenommene Gebiet wird im Folgenden abstrahiert als offene, zusammenhängende Menge  $\Omega_A \subset \mathbb{R}^2$  bezeichnet. Es wird  $\Omega_A$  ein Koordinatensystem zugeordnet, um Positionen im Aufnahmegebiet angeben zu können. Dabei ist der Ursprung des Koordinatensystems von  $\Omega_A$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Ursprung des  $\mathbb{R}^2$ . Die Gamma-Kamera und somit die Detektorfläche, repräsentiert durch  $\Omega_K$ , rotiert in  $n \in \mathbb{N}$  separaten Aufnahmeschritten genau einen  $360^\circ$ -Umlauf um  $\Omega_A$ . Die den Aufnahmeschritten zugeordneten Winkel sind dabei mit  $\theta_i \in [0, 2\pi), i = 1, \dots, n$  bezeichnet. Die Winkel seien untereinander äquidistant über  $360^\circ$  — einen kompletten Umlauf — verteilt.

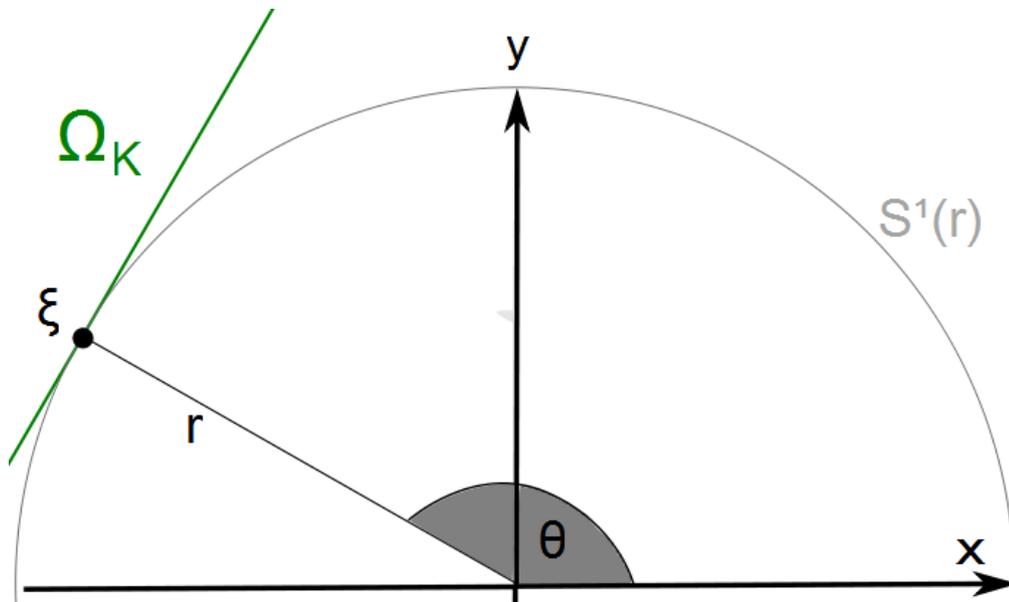


Abbildung 2.2: Skizze zur näheren Betrachtung von  $\Omega_K$ . Eingezeichnet dafür ist die Sphäre  $S^1(r)$  mit ihrem Radius  $r$ , sowie ein Punkt  $\xi$  auf der Sphäre.

In Abbildung 2.2 wird  $\Omega_K$  näher dargestellt und soll jetzt näher definiert werden. Ich betrachte dazu die Sphäre  $S^1(r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_2 = r\}$  mit Radius  $r \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ . Dann ist  $\Omega_K$  ein Abschnitt der Tangente an  $S^1(r)$  im Punkt  $\xi = r \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta))^T$ . Da  $\Omega_K$  eine Strecke repräsentieren soll, definiere ich ein abgeschlossenes, symmetrisch um 0 liegendes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ . Damit ist  $\Omega_K = \{r \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta))^T + x \cdot (-\sin(\theta), \cos(\theta))^T \mid x \in I\}$  eine Strecke. Für den weiteren Verlauf ist der Radius  $r$  und das Intervall  $I$  beliebig, aber fest zu wählen.

Wie oben bereits angedeutet, wird beim Messvorgang aus jedem Winkel  $\theta$  eine **Projektion** des **Aufnahmegebietes**  $\Omega_A$  auf die Gamma-Kamera  $\Omega_K$  gemessen, dieses wird durch eine Funktion

$$p: \Omega_K \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}, (\mathbf{x}, \theta) \mapsto p(\mathbf{x}, \theta)$$

beschrieben, wobei  $p(\mathbf{x}, \theta)$  die gemessene **Strahlungsaktivität** zu der Koordinate  $\mathbf{x} \in \Omega_K$  zum Winkel  $\theta$  ist. Diese gemessene Aktivität ist ein Maß für die Anzahl der eingetroffenen  $\gamma$ -Quanten an den gegebenen Koordinaten und enthält damit Informationen über die Verteilung der Radioaktivität im Gebiet  $\Omega_A$ .

Nachdem ich die wichtigsten Bestandteile beim Messvorgang vorgestellt habe, möchte ich im nächsten Abschnitt die Problemstellung der Rekonstruktion wiedergeben.

## 2.2 Problemstellung der Rekonstruktion

Der im vorigen Abschnitt 2.1 beschriebene Messvorgang kann als Grundlage verwendet werden, um die Problemstellung der Rekonstruktion zu formulieren. Ich möchte in diesem Abschnitt das Problem nach Zaidi [Zai06] beschreiben und erst in Abschnitt 3.2 eine numerische Betrachtungsweise einführen.

In der Messung wurden  $n$  Projektionen des Gebietes  $\Omega_A$  erhalten. Ziel ist es, aus diesen Projektionen eine Aussage über die **Strahlungsverteilung**  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $\Omega_A$  zu treffen, die jeder Koordinate die vorliegende Strahlungsintensität zuordnet.

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  beliebig und  $\mathcal{L}(\Omega, \mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) := \{\chi: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_2 \mid \chi \text{ betragintegrierbar} \wedge \text{supp}(\chi) \subset \Omega\}$  der Raum der betragintegrierbaren Funktionen von einem Körper  $\mathbb{K}_1$  in einen zweiten Körper  $\mathbb{K}_2$ , die außerhalb von  $\Omega \subset \mathbb{K}_1$  null sind. Damit kann die **Strahlungsverteilung** genauer definiert werden als  $f \in \mathcal{L}(\Omega_A, \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ . Weiterhin ist eine Funktion  $g(\mathbf{x}, \theta) := \{\mathbf{x} + t \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta))^T, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  definiert, die jedem Punkt aus dem  $\mathbb{R}^2$  zusammen mit einem Winkel die zugehörige Punktmenge der Gerade zuordnet und  $g^+(\mathbf{x}, \theta) := \{\mathbf{x} + t \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta))^T, t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^2$  ist die Funktion, die jedem Punkt aus dem  $\mathbb{R}^2$  und einem Winkel den zugehörigen von dem Punkt ausgehenden Strahl zuordnet. Ich wähle in dieser Arbeit zur Beschreibung der Vorwärtsprojektion die häufig verwendete **Ray-Transformation** [NW01, S. 17 ff].

### Definition 1: Ray-Transformation (Fritz John – 1910–1994)

Es modellieren  $f \in \mathcal{L}(\Omega_A, \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  die Strahlungsverteilung und  $\mu \in \mathcal{L}(\Omega_A, \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  die Abschwächung, dann definiert

$$P: \mathcal{L}(\Omega_A, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\Omega_A, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \rightarrow \{\chi: \Omega_K \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}\},$$

mit

$$P_{[f, \mu]}(\mathbf{x}, \theta) := \int_{g(\mathbf{x}, \theta)} f(\mathbf{y}) \exp\left(-\int_{g^+(\mathbf{y}, \theta)} \mu(\mathbf{z}) d\mathbf{z}\right) d\mathbf{y}, \quad (2.1)$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega_K$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$  die abgeschwächte Ray-Transformation.

Die Definition 1 kann für den weiteren Gebrauch vereinfacht werden. Die Abschwächung, ausgedrückt durch  $\mu$ , ist ein wichtiges Themen- und Forschungsgebiet. Sie soll jedoch nicht Thema dieser Arbeit sein, da sie das Problem unnötig erschweren und dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Beispiele zur Behandlung der Abschwächung bei SPECT können z.B unter [Cha78, Zai06, CSP03] gefunden werden.

Da die Abschwächung nicht betrachtet werden soll, setze ich für alle  $\mathbf{x} \in \Omega_A$  die Abschwächung  $\mu(\mathbf{x}) = 0$ . Der Exponentialterm ist damit für alle  $\mathbf{x}$  gleich eins und braucht nicht weiter betrachtet werden. Ich betrachte also im Folgenden die Ray-Transformation

## 2 Grundlagen der Bildgebung mit SPECT

ohne Abschwächung: (2.1)

$$p_{\text{Ray}}: \Omega_K \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$
$$p_{\text{Ray}}(\mathbf{x}, \theta) := P_{[f, \mu]}(\mathbf{x}, \theta) = \int_{g(\mathbf{x}, \theta)} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.2)$$

Für die Ray-Transformation soll in Kapitel 3 eine Inverse und eine Lösung für diese gefunden werden. Es wird entweder eine (pseudo-)inverse Funktion bestimmt, was dem analytischen Ansatz entspricht oder ich versuche das Problem numerisch zu lösen. Wenn das Problem numerisch gelöst werden soll, so muss vorher noch eine Diskretisierung des Modelles vorgenommen werden. Auf diesen Aspekt werde ich in Abschnitt 3.2.1 näher eingehen, da dies für den folgenden analytischen Ansatz nicht nötig ist.

# 3 Rekonstruktionsverfahren

Ich möchte mich in diesem Kapitel exemplarisch mit zwei Rekonstruktionsverfahren beschäftigen. Zuerst werde ich die **gefilterte Rückprojektion** betrachten und anschließend in Abschnitt 3.2 die Grundlagen der algebraischen Rekonstruktion wiedergeben, um in 3.3 mit der Methode der **Maximum-Likelihood-Expectation-Maximization** (ML-EM) fortzufahren. Basis bieten dabei die im vorigen Kapitel 2 gelegten Grundlagen und die formulierte Problemstellung (2.2), die es zu betrachten gilt. Grundlage dieses Kapitels sind insbesondere die Werke von Buzug [Buz05] und Zaidi [Zai06].

## 3.1 Die gefilterte Rückprojektion

### 3.1.1 Die Radon-Transformation

An dieser Stelle soll zuerst die **Radon-Transformation** betrachtet werden [NW01, S. 9 ff]. Sei dazu  $r \in \mathbb{R}$  der Radius einer Kreisscheibe  $K(r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\mathbf{x}| \leq r\}$ .

**Definition 2: Radon-Transformation (Johann Radon – 1887–1956)**

Es sei  $f \in \mathcal{L}(K(r), \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  und mit  $b \in \mathbb{R}, |b| \leq r$  sei  $d(b, \theta) := g(b \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta))^T, \theta)$  eine Gerade mit Abstand  $|b| \leq r$  zum Ursprung und Steigungswinkel  $\theta^\perp$ , welcher rechtwinklig zu  $\theta$  steht. Dann heißt

$$P: \mathcal{L}(K(r), \mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \rightarrow \{\xi: \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}\},$$

mit

$$P_{[f]}(b, \theta) := \int_{d(b, \theta)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Radon-Transformation.

Siehe dazu auch Abbildung 3.1. Diese Funktion kann wieder vereinfacht werden:

$$p_{\text{Radon}}: \mathbb{R} \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p_{\text{Radon}}(b, \theta) := P_{[f]}(b, \theta) = \int_{d(b, \theta)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.2)$$

Offensichtlich ist die Radon-Transformation ähnlich der Ray-Transformation aus Gleichung 2.2, lediglich die Gerade ist anders parametrisiert. Der Vorteil der Radon-Transformation liegt darin, dass es gut beschriebene Invertierungsansätze gibt, siehe dazu z.B. [Zai06, Buz05, CSP03, NW01]. Beide Transformationen können wie folgt in Zusammenhang gesetzt werden, siehe [NW01, S. 17]:

**Bemerkung 3:**

Sei  $s(b, \theta) = \Omega_K \cap d(b, \theta)$  und  $p_{\text{Ray}}(s(b, \theta), \theta^\perp)$  die Ray-Transformation am Punkt  $s(b, \theta)$ , sei außerdem  $p_{\text{Radon}}(b, \theta)$  die Radon-Transformation dann gilt für die Geraden  $g(s(b, \theta), \theta^\perp) = d(b, \theta)$  und damit:

$$p_{\text{Ray}}(s(b, \theta), \theta^\perp) = p_{\text{Radon}}(b, \theta) \quad (3.3)$$

Somit können beide Transformationen als Integration der Aktivitäten entlang der jeweiligen Geraden aufgefasst werden, siehe dazu auch Abbildung 3.1.

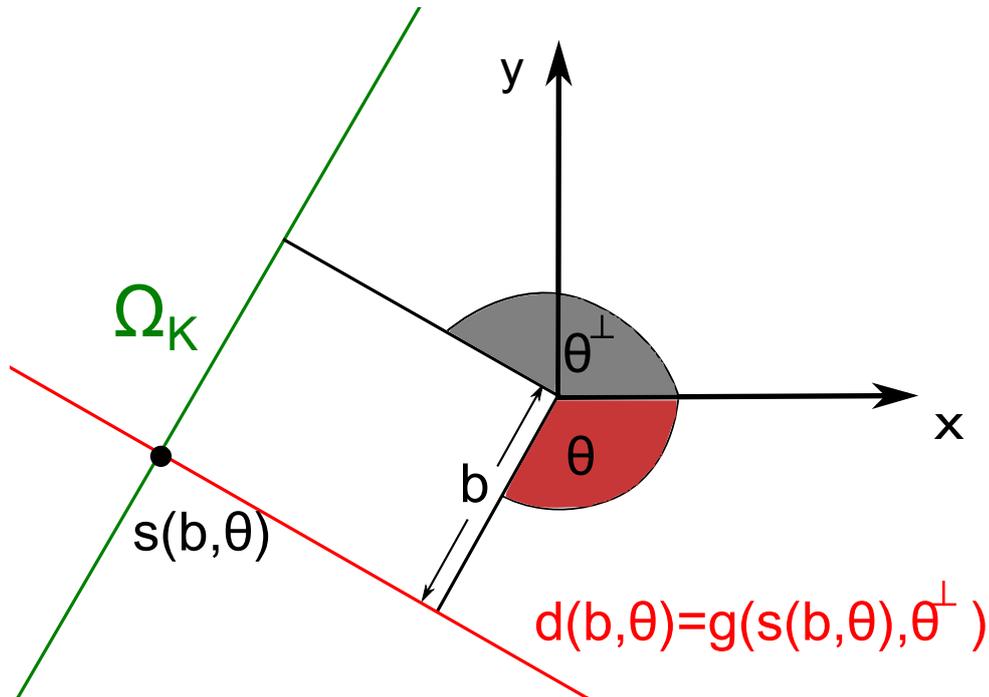


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung zu Bemerkung 3

Beide Transformationen beschreiben im zweidimensionalen den gleichen Vorgang und damit ist es adäquat, die Radon-Transformation für die Lösung der Problemstellung 2.2 zu benutzen. Eine Rekonstruktion der Strahlungsverteilung  $f$  ist das Ziel der gefilterten Rückprojektion und eine Lösung für die Problemstellung.

Ich schreibe  $p_\theta(b)$  abkürzend für  $p_{\text{Radon}}(b, \theta)$  und möchte das Geradenintegral in ein Volumenintegral überführen. Dazu wird eine Distribution — eine stetige, lineare Abbildung aus dem Testfunktionenraum  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  in den zugrundeliegenden Körper  $\mathbb{R}^n$  [BS91, S. 659f] — benötigt [Buz05, S. 62]:

**Definition 4: Dirac-Delta (Paul Dirac – 1902–1984)**

Sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , dann definiert

$$\delta: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R},$$

mit

$$\delta: f \mapsto f(0) \tag{3.4}$$

die Distribution mit Namen Dirac-Delta.

Wird Abbildung 3.1 betrachtet, so lässt sich erkennen, dass die Gerade  $d(b, \theta)$  auch als

$$d(b, \theta) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, (\cos(\theta), \sin(\theta))^T \rangle = b \} \tag{3.5}$$

geschrieben werden kann. Es wird an dieser Stelle noch eine Eigenschaft des Dirac-Deltas formuliert [Buz05, S. 72]:

**Bemerkung 5:**

Sei  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  mit endlich vielen, einfachen Nullstellen  $x_i$  und  $\phi'(x_i) \neq 0$  für alle  $x_i \in \mathbb{R}^n$ . Weiterhin sei  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  eine beliebige Testfunktion, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\phi(x))dx = \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\delta(x-x_i)}{|\phi'(x_i)|} dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|\phi'(x_i)|}. \quad (3.6)$$

Klar ist, dass obige Gleichung für  $f(x) = 1$  zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\phi(x))dx = \sum_i \frac{1}{|\phi'(x_i)|}. \quad (3.7)$$

wird.

Mit (3.5) folgt  $b = x \cos \theta + y \sin \theta = \langle \mathbf{x}, (\cos(\theta), \sin(\theta))^T \rangle$  und es gilt mit Definition 4 für (3.1):

$$p_\theta(b) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\delta(b-x\cos\theta-y\sin\theta)dxdy. \quad (3.8)$$

Im Folgenden möchte ich eine Möglichkeit betrachten, die Radon-Transformation zu invertieren. Dabei möchte ich mich über die **ungefilterte Rückprojektion** zur **gefilterten Rückprojektion** vorarbeiten.

### 3.1.2 Das Fourier-Slice-Theorem

Es wurde in Abschnitt 2.2 und 3.1.1 gezeigt, dass die am Detektor gemessenen Daten als Projektionen in der Art einer Radon-Transformation aufgefasst werden können. Um die Radon-Transformation umzukehren, wird das Fourier-Slice-Theorems verwendet [Buz05, S. 120ff]. Anschließend werde ich auf Basis dessen die gefilterte Rückprojektion nach Zaidi [Zai06] definieren. Zuerst folgt eine Definition der **Fourier-Transformation**.

**Definition 6: Fourier-Transformation (Jean B. J. Fourier (1768-1830)) [Buz05, S. 78 f]**

Es sei  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ , dann ist  $\mathcal{F}_{[f]}$  die  $n$ -dimensionale (kontinuierliche) Fourier-Transformation von  $f$  und ist gegeben durch

$$\mathcal{F}: \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$$

mit

$$\mathcal{F}_{[f]}(\mathbf{v}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})e^{-2\pi i\mathbf{v}\mathbf{z}}d\mathbf{z}. \quad (3.9)$$

für alle  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Verkürzend schreibe ich:

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$F(\mathbf{v}) := \mathcal{F}_{[f]}(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{z})e^{-2\pi i\mathbf{v}\mathbf{z}}d\mathbf{z} \quad (3.10)$$

### 3 Rekonstruktionsverfahren

Ein Nutzen der Fourier-Transformation ergibt sich durch die folgende Betrachtung. Sei dabei  $P_\theta$  die Fouriertransformation von  $p_\theta$ :

$$P_\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P_\theta(v) := \mathcal{F}_{[p_\theta]}(v) = \int_{\mathbb{R}} p_\theta(b) e^{-2\pi i v b} db. \quad (3.11)$$

Mit (3.1) und  $b = x \cos \theta + y \sin \theta$  folgt daraus:

$$P_\theta(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i v (x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy. \quad (3.12)$$

Mit  $\mathbf{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta)$  und  $\mathbf{x} = (x, y)$  steht hier die Fouriertransformation  $F$  von  $f$  und es gilt  $P_\theta = F$ . Dies entspricht genau der Aussage des Fourier-Slice-Theorems [Zai06, S. 86]:

**Satz 7: Fourier-Slice-Theorem (Ronald M. Bracewell – 1921–2007)**

Es sei  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$  und  $p_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$  die integrierbare Projektion von  $f$  zum Winkel  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Weiterhin sei  $P_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R})$  die eindimensionale Fourier-Transformation der Projektion  $p - \theta$ . Dann gilt für alle  $v \in \mathbb{R}$  und feste  $\theta$

$$F(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{v} \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} p_\theta(b) e^{-2\pi i v b} db = P_\theta(v). \quad (3.13)$$

mit  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T = (v \cos \theta, v \sin \theta)^T$ .

Das Fourier-Slice-Theorem sagt aus, dass die eindimensionale Fourier-Transformation der Projektion von  $f$  zu einem Winkel  $\theta$  das gleiche ist, wie der Querschnitt der zweidimensionalen Fourier-Transformation von  $f$  zum Winkel  $\theta$ , wie auch durch Abbildung 3.2 veranschaulicht.

#### 3.1.3 Die ungefilterte Rückprojektion

Mit dem Fourier-Slice-Theorem wird die ungefilterte Rückprojektion hergeleitet. So könnte angenommen werden, dass ein einfaches „zurückverschmieren“ der gemessenen Projektionen das zu rekonstruierende Bild ergibt, dies entspricht mathematisch:

$$f_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_B(\hat{x}, \hat{y}) := \int_0^\pi p_\theta(b) d\theta$$

$$= \int_0^\pi p_\theta(\hat{x} \cos(\theta) + \hat{y} \sin(\theta)) d\theta. \quad (3.14)$$

Dabei sei  $b \in \mathbb{R}$  durch  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$  für beliebiges festes  $\theta$  wegen (3.5) festgelegt durch:

$$b =: \hat{x} \cos(\theta) + \hat{y} \sin(\theta).$$

Wie in Abbildung 3.3 zu sehen, ist das Ergebnis verschwommen und es sind keine Details zu erkennen. Dieser Effekt ist als „blurring“ bekannt [CSP03, S. 278] und wird durch

### 3 Rekonstruktionsverfahren

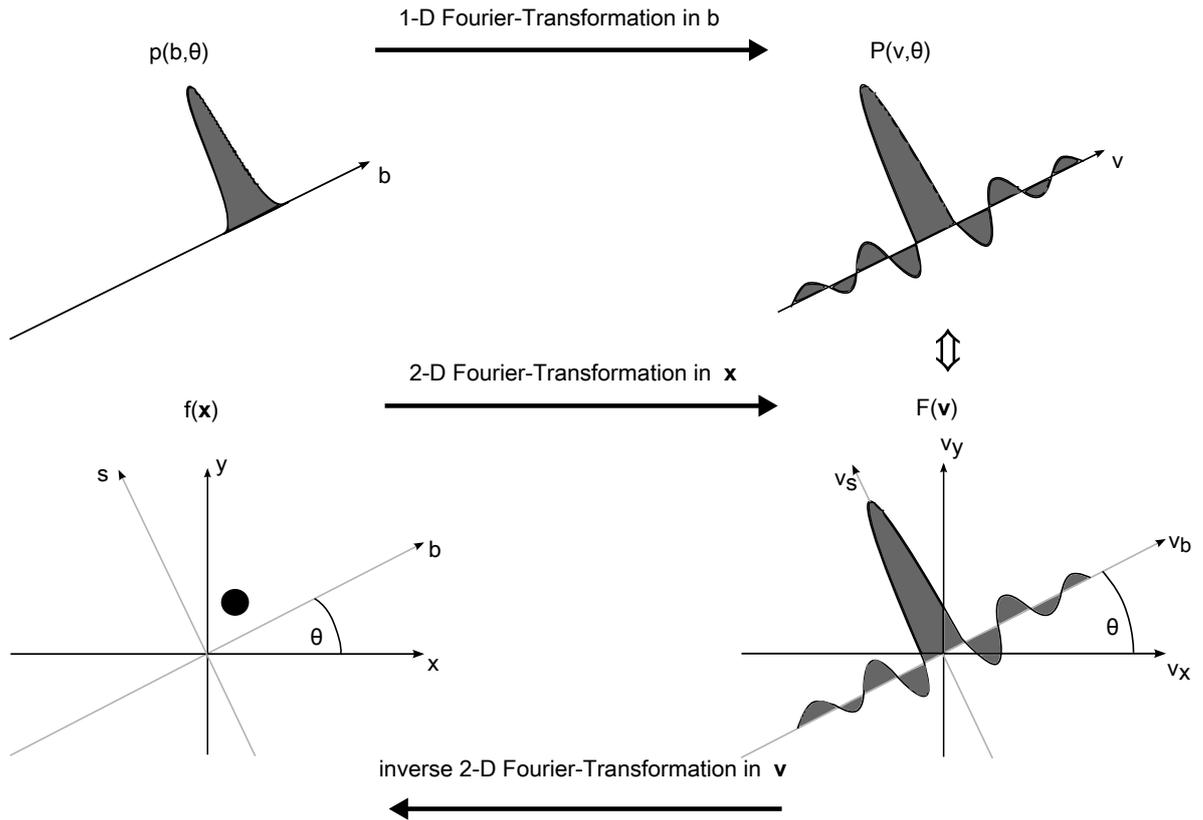


Abbildung 3.2: Grafische Veranschaulichung des Funktionsprinzips des Fourier-Slice-Theorems (Abbildung verändert nach [CSP03, Abbildung 16-7]).

Faltung der Funktion  $f$  mit einer noch näher zu bestimmenden Funktion  $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugt [Buz05, S. 133]. Eine Faltung wird für Funktionen  $f$  und  $h$  als

$$(f * h)(\hat{x}, \hat{y}) := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) h(\hat{x} - x, \hat{y} - y) dx dy \quad (3.15)$$

definiert, siehe [BS91, S. 750]. Um zu zeigen, dass eine Faltung vorliegt betrachtet man (3.14) und setzt (3.8) ein, es folgt:

$$\begin{aligned} f_B(\hat{x}, \hat{y}) &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(b - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\hat{x} \cos(\theta) + \hat{y} \sin(\theta) - x \cos \theta - y \sin \theta) dx dy d\theta \quad (3.16) \\ &= \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta((\hat{x} - x) \cos(\theta) + (\hat{y} - y) \sin(\theta)) dx dy d\theta. \end{aligned}$$

### 3 Rekonstruktionsverfahren

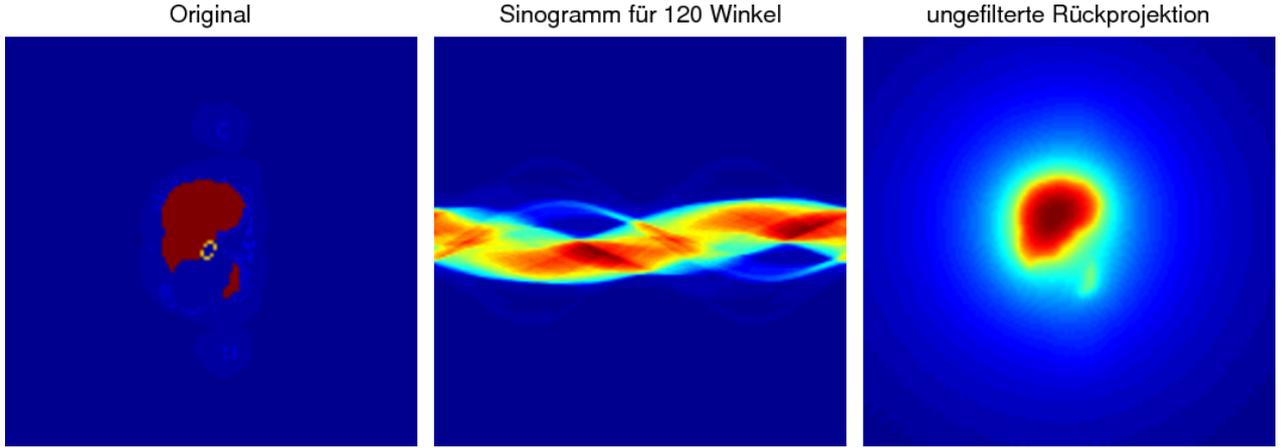


Abbildung 3.3: Beispiel einer ungefilterten Rückprojektion anhand simulierter Aufnahme-  
daten des Abdomens bei 64 Projektionen

Der Ausdruck  $(\hat{x} - x) \cos(\theta) + (\hat{y} - y) \sin(\theta)$  ist das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren  $(\hat{x} - x, \hat{y} - y)$  und  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ . Damit gilt mit  $\beta \in [0, 2\pi)$ , dem Winkel zwischen den Vektoren:  $\langle (\hat{x} - x, \hat{y} - y), (\cos(\theta), \sin(\theta)) \rangle = |(\hat{x} - x, \hat{y} - y)| \cdot |(\cos(\theta), \sin(\theta))| \cdot \cos(\beta) = |\hat{x} - x, \hat{y} - y| \cos(\beta)$ . Sei  $\xi = \beta - \theta$ , damit ergibt sich für (3.16)

$$f_B(\hat{x}, \hat{y}) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) \delta(|(\hat{x} - x, \hat{y} - y)| \cos(\theta + \xi)) dx dy d\theta, \quad (3.17)$$

was wegen Bemerkung 5 geschrieben werden kann als:

$$f_B(\hat{x}, \hat{y}) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{|(\hat{x} - x, \hat{y} - y)| |\sin(\theta_0)|} dx dy d\theta. \quad (3.18)$$

Dabei ist  $\theta_0$  die einzige Nullstelle von  $\theta - \xi$  für  $\theta \in [0, \pi]$  und je nach Vorzeichen von  $\xi$  gilt  $\theta_0 = (\theta + \xi) = \pm \frac{\pi}{2}$ . Damit gilt  $|\sin(\theta_0)| = 1$  und es folgt:

$$\begin{aligned} f_B(\hat{x}, \hat{y}) &= \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{|(\hat{x} - x, \hat{y} - y)|} dx dy d\theta \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) \int_0^\pi \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{|(\hat{x} - x, \hat{y} - y)|} d\theta dx dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) \frac{\int_0^\pi \delta(\theta - \theta_0) d\theta}{|(\hat{x} - x, \hat{y} - y)|} dx dy \end{aligned}$$

Da  $\int_0^\pi \delta(\theta - \theta_0) d\theta = 1$  ebenfalls nach Bemerkung 5 gilt, folgt:

$$f_B(\hat{x}, \hat{y}) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) \frac{1}{|(\hat{x} - x, \hat{y} - y)|} dx dy. \quad (3.19)$$

Wie gezeigt werden sollte, stellt Gleichung (3.19) eine Faltung von  $f$  mit der jetzt explizit angebbaren Funktion

$$h(\hat{x}, \hat{y}) := \frac{1}{|(\hat{x}, \hat{y})|} \quad (3.20)$$

dar. Es gilt:

$$f_B = f * h. \quad (3.21)$$

Die Funktion  $h$  wird **Point-Spread-Function** genannt und ist für das Blurring in Abbildung 3.3 verantwortlich [Buz05, S. 133]. Die Betrachtung des Effektes von  $h$  ist dabei der entscheidende Unterschied zwischen der ungefilterten Rückprojektion und der gefilterten Rückprojektion, bei letzterer wird, wie bereits der Name andeutet, ein Filter angewandt um  $h$  zu kompensieren, dies ist Thema des nächsten Abschnittes.

### 3.1.4 Die gefilterte Rückprojektion

Wie im vorigen Abschnitt hergeleitet, steht in diesem (3.20) im Fokus. Man betrachtet zuerst die inverse Fouriertransformation von  $F(v_x, v_y)$  [Buz05, S. 134]:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(v_x, v_y) e^{2\pi i(xv_x + yv_y)} dv_x dv_y. \quad (3.22)$$

Jetzt wird mit den bereits bekannten Beziehungen  $v_x = v \cos \theta$  und  $v_y = v \sin \theta$ , den Polarkoordinaten, substituiert. Zu beachten ist, dass das Integral der inversen Fouriertransformation über  $v_x$  und  $v_y$  läuft und entsprechend auch hier der Koordinatenwechsel vollzogen werden muss.

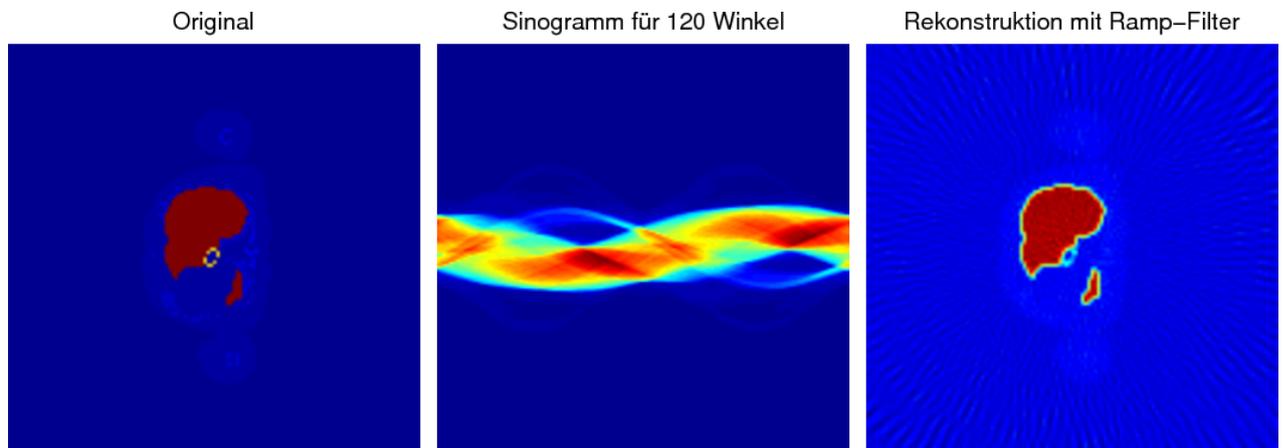


Abbildung 3.4: Beispiel einer gefilterten Rückprojektion mit Ramp-Filter anhand simulierter Aufnahmedaten des Abdomens bei 120 Projektionen

Hierbei ist das Flächenelement  $dv_x dv_y$  durch  $J dv d\theta$  gegeben, wobei  $J$  die Jacobimatrix ist, es gilt [Buz05, S. 134]:

$$J = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -v \sin(\theta) & v \cos(\theta) \end{vmatrix} = v(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = v \quad (3.23)$$

Daraus folgt für (3.22):

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} F(v \cos \theta, v \sin \theta) e^{2\pi i(xv \cos \theta + yv \sin \theta)} v dv d\theta \quad (3.24)$$

Nach Symmetriebetrachtungen, wie sie z.B. unter [Buz05, S. 135-136] durchgeführt werden, kann (3.24) geschrieben werden als:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(v \cos \theta, v \sin \theta) e^{2\pi i(xv \cos \theta + yv \sin \theta)} |v| dv d\theta \quad (3.25)$$

und wegen dem Fourier-Slice-Theorem (3.13) gilt:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\theta}(v) e^{2\pi i(xv \cos \theta + yv \sin \theta)} |v| dv d\theta. \quad (3.26)$$

Dies ist die **gefilterte Rückprojektion**, wobei  $|v|$  der so genannte **ramp-Filter** ist [Zai06, S. 92 f]. Ein Beispiel für eine Rekonstruktion mit der gefilterten Rückprojektion ist in Abbildung 3.4 zu sehen oder später in Kapitel 4. Der ramp-Filter hebt das Rauschen im hohen Frequenzband an [Buz05, S. 191], dies ist auch in der Abbildung zu erkennen. Abhilfe schafft ein von  $|v|$  verschiedener Faltungskern. Ich möchte mich in dieser Arbeit nicht näher damit befassen, sondern verweise auf [Buz05, S. 189-202].

## 3.2 Einführung in die algebraische Rekonstruktion

Das Maximum-Likelihood Verfahren mit Expectation-Maximization Algorithmus existiert sowohl in analytischer Ausführung [CCM<sup>+</sup>90], als auch in algebraischer Ausführung [Buz05, S. 171-178; Zai06, S. 115-116; SV82]). Ich werde im Folgenden die algebraische Ausführung wiedergeben. Dafür möchte ich zuerst das aus Kapitel 2 bekannte Modell diskretisieren, wie dies unter [Buz05, S. 153-157] beschrieben ist.

### 3.2.1 Diskretisierung der Problemstellung

Nach der Messung liegen die Projektionsdaten bereits in diskreter Form vor [Zai06, S. 110], wobei sich die Diskretisierung aus den technischen Gegebenheiten des verwendeten SPECT-Systems, genauer der Gamma-Kamera, ergibt [Sch08, S. 21]. Jede Projektion besteht dabei im betrachteten zweidimensionalen Fall typischerweise aus  $k = 64$  oder  $k = 128$  Pixeln [CSP03, S. 276]. Wobei jeder Pixel ein Teilintervall von  $I$  (vgl Abschnitt 2.1) und somit eine Strecke auf  $\Omega_K$  repräsentiert. Die Länge der Strecke und somit die Ausdehnung der Pixel sei dabei mit  $\delta \in \mathbb{R}$  bezeichnet. Siehe dazu auch Abbildung 3.5.

Es ergeben sich damit  $n$  Projektionen  $p_i \in \mathbb{R}^k$ , welche im Folgenden zu einem Vektor

$$\mathbf{p} = (p_{1 \cdot 1}, \dots, p_{k \cdot 1}, p_{1 \cdot k}, \dots, p_{2 \cdot k}, \dots, p_{1+(n-1) \cdot k}, \dots, p_{n \cdot k})^T \in \mathbb{R}^{n \cdot k} \quad (3.27)$$

zusammengefasst werden sollen. Dieser wird auch Sinogramm genannt [Buz05, S. 116].

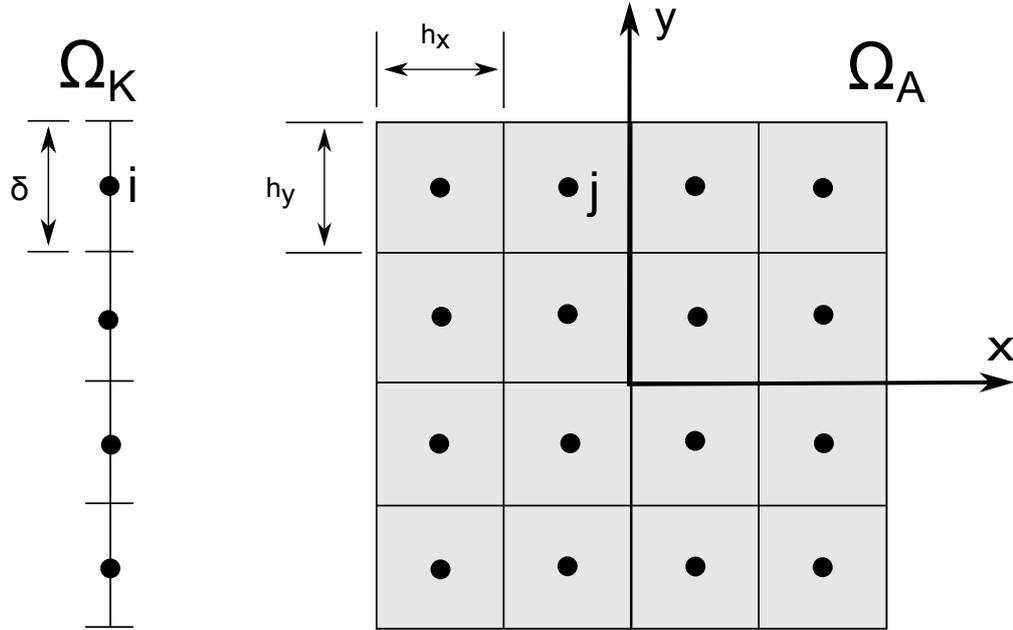


Abbildung 3.5: Beispiel zur Diskretisierung (Abbildung verändert nach [Sch08, Abbildung 3.3])

Im Folgenden soll die Vorwärtsprojektion in SPECT als lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (3.28)$$

aufgefasst werden, mit noch näher zu bestimmendem **Aufnahmeoperator**  $\mathbf{A}$  und einer Diskretisierung  $\mathbf{f}$  von  $f$ . Ich möchte an dieser Stelle als Modell für  $f$  eine Diskretisierung des Aufnahmebereiches  $\Omega_A$  in  $l_1 \times l_2$  Pixel betrachten. Die Größe der Pixel in  $x$ - und  $y$ -Richtung ist dabei durch  $\mathbf{h} = (h_x, h_y)$  gegeben. Für  $f$  ergibt sich:

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_{l_2}, f_{1+l_2}, \dots, f_{2 \cdot l_2}, \dots, f_{1+(l_1-1) \cdot l_2}, \dots, p_{l_1 \cdot l_2})^T \in \mathbb{R}^{l_1 \cdot l_2}. \quad (3.29)$$

Die Abbildung 3.5 zeigt ein Beispiel für eine Diskretisierung. Ich definiere  $N = l_1 \cdot l_2$  und  $M = n \cdot k$ , es folgt, dass  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^M$  und  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^N$  gilt. Zur Adressierung der Pixel in  $\Omega_A$  und der Abschnitte in  $\Omega_K$  kann die Koordinate der Mittelpunkte verwendet werden [Sch08, S. 31]. Dies möchte ich im Folgenden auch so verwenden. Es kann vorkommen, dass Bildwerte von Koordinaten bestimmt werden müssen, die keinem Pixel oder Abschnitt entsprechen und trotzdem aus  $\Omega_A$  bzw.  $\Omega_K$  sind. Für diesen Fall wird ein Interpolationsmodell verwendet, welches direkt in den Aufnahmeoperator integriert werden kann (vgl. Abschnitt 3.2.2). Aus  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{f}$  kann mit (3.28) und den Rechenregeln für Matrizenmultiplikation [BS91, S. 264] hergeleitet werden, dass  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times M}$  ist. Da nach einer Messung  $\mathbf{p}$  bekannt und  $\mathbf{f}$  gesucht ist, ist ein inverses Problem

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}, \text{ u.d.N. } \mathbf{f} \geq 0 \quad (3.30)$$

zu behandeln. Die Invertierbarkeit von  $\mathbf{A}$  ist dabei in der Regel nicht gegeben, das heißt es erfüllen keine oder unendlich viele Lösungen die Aufgabenstellung. Das Problem ist daher schlecht gestellt [Buz05, S. 157].

Nachdem eine Diskretisierung der Ausgangsdaten  $\mathbf{p}$  sowie der gesuchten Bilddaten  $\mathbf{f}$  vorliegt, wird im nächsten Abschnitt der Aufnahmeoperator  $\mathbf{A}$  näher betrachtet und das Interpolationsmodell integriert.

## 3.2.2 Entwicklung eines algebraischen Modells

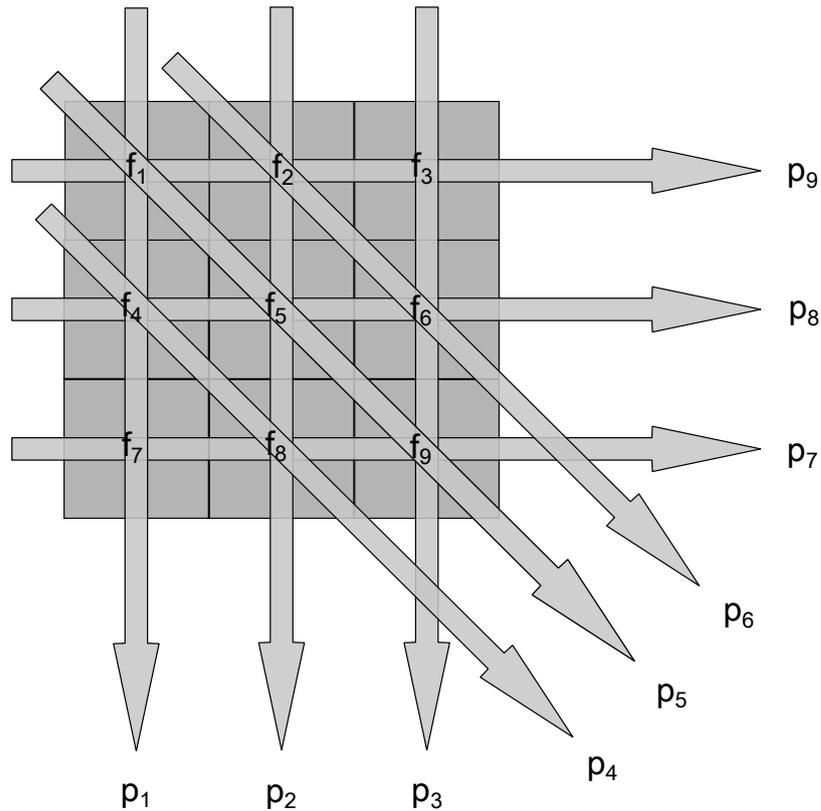


Abbildung 3.6: Veranschaulichung des Prinzips der algebraischen Rekonstruktion (Abbildung verändert nach [Buz05, Abbildung 5.34])

Abbildung 3.6 veranschaulicht schematisch die Situation räumlich diskreter Aktivitätswerte. Im Falle eines Parallelloch-Kollimators gibt die Diskretisierung eine Breite  $\delta$  für den Einzugsbereich eines Detektor-Abschnittes, aus dem dieser zu einem festen Winkel  $\theta$  Aktivitäten messen kann (vgl. Abschnitt 3.2.1). Ein solcher Messbereich  $p_i$  der Breite  $\delta$ , der im Winkel  $\theta$  zum Koordinatensystem  $(x,y)$  steht, durchläuft nicht jeden zu rekonstruierenden Pixel  $f_j$  mit gleichem Anteil [Buz05, S.152 f], siehe dazu auch Abbildung 3.7. Es müssen Gewichte  $a_{ij}$  bestimmt werden, die diesem Umstand Rechnung tragen. Diese Gewichte können als die Wahrscheinlichkeiten, dass  $\gamma$ -Quanten aus dem Flächenelement  $f_j$  in der Projektion  $i$  gemessen werden, interpretiert werden [Buz05, S. 156] und stellen eine Art Interpolationsmodell dar [Sch08, S. 24]. Über die Gewichte  $a_{ij}$  können auch physikalische Effekte, wie die Abschwächung und Scattering modelliert werden [Buz05, S. 156]. Dies ist jedoch für das Verständnis des Verfahrens nicht notwendig und nicht hilfreich, weswegen ich mich in dieser Arbeit nicht damit beschäftigen möchte.

Die Gewichte  $a_{ij}$  ergeben sich als [Buz05, S. 155]

$$\hat{a}_{ij} := \frac{\text{vom Messbereich } i \text{ erfasste Fläche des Pixels } j}{\text{Gesamtfläche des Pixels } j},$$

womit gilt:  $0 \leq \hat{a}_{ij} \leq 1$  [Buz05, S. 155].

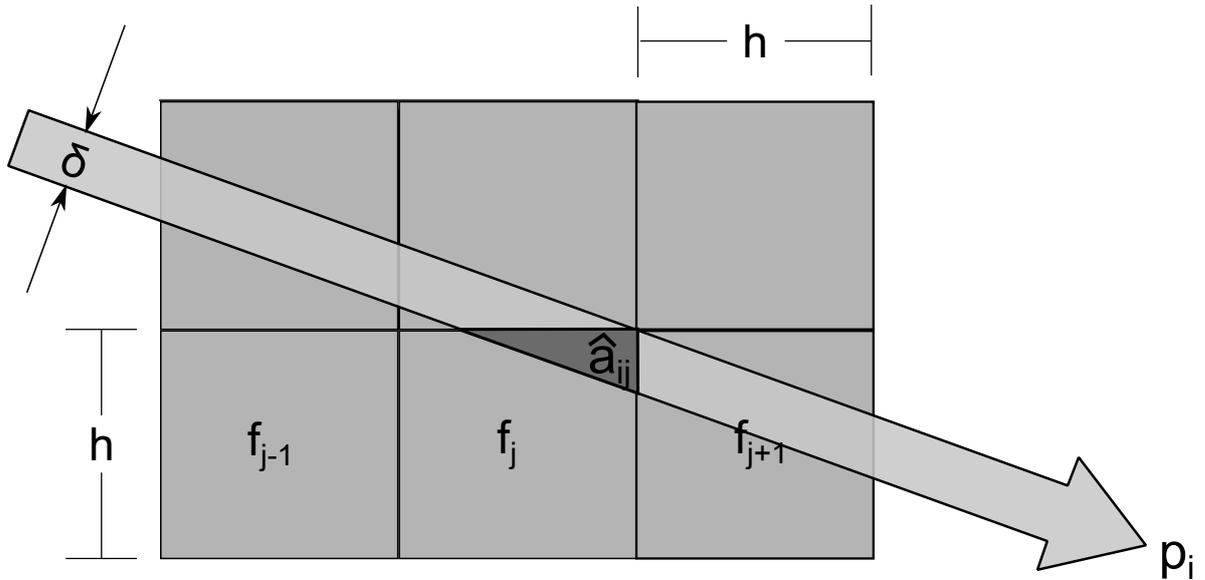


Abbildung 3.7: Veranschaulichung zur Berechnung der Gewichte  $\hat{a}_{ij}$  (Abbildung verändert nach [Buz05, Abbildung 5.35]).

Die Gesamtfläche eines Pixels ist offensichtlich  $h_x \cdot h_y$ . Zusätzlich soll zur Energieerhaltung noch eine Normierung verwendet werden [Sch08, S. 26]

$$a_{ij} := \frac{\hat{a}_{ij}}{\sum_{l=1}^M \hat{a}_{lj}}, \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (3.31)$$

Es folgt für die bereits in Abschnitt 3.2.1 definierte Matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & \ddots & & a_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix}.$$

Durch die Energieerhaltung gilt  $\sum_{j=1}^N f_j = \sum_{i=1}^M p_i$  und damit ist die Anzahl der gemessenen  $\gamma$ -Quanten gleich der Anzahl der emittierten  $\gamma$ -Quanten [Sch08, S. 26].

Im folgenden Abschnitt soll Gleichung (3.30) näher betrachtet werden. Das Problem ist, wie bereits in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, schlecht gestellt, es soll daher eine Näherungslösung für die Invertierung bestimmt werden. Um eine solche Näherungslösung zu bestimmen, gibt es mehrere Verfahren. Dies kann zum Beispiel direkt durch Bestimmung einer Pseudoinversen, auch **Moore-Penrose-Inverse** genannt (siehe [Buz05, S. 158]), mit anschließender Lösung via **Singulärwertzerlegung** (siehe [Buz05, S. 159ff]) geschehen. Außerdem gibt es iterative Techniken, wie die **Algebraic Reconstruction Technique** (siehe [Buz05, S. 162 ff]) oder das Maximum-Likelihood Verfahren mit Expectation-Maximization Algorithmus, welches ich im Folgenden genauer betrachte.

### 3.3 Das Maximum-Likelihood-Expectation-Maximization Verfahren

Wie im vorigen Abschnitt angekündigt, möchte ich die algebraische Ausführung des ML-EM Verfahrens wiedergeben. Beginnen werde ich mit einer Einführung in die Statistik hinter dem Modell und abschließend eine Formulierung der Problemstellung für das Maximum-Likelihood Verfahren wiedergeben. Ich werde mich dabei an [Buz05, S. 171-178] orientieren. Nach diesem Kapitel möchte ich den Expectation-Maximization Algorithmus einführen.

#### 3.3.1 Das Maximum-Likelihood Verfahren

Auf dem Weg zur Likelihood-Funktion soll der Aufnahmeprozess von jetzt an unter einem statistischen Aspekt betrachtet werden. Dazu verwende ich Grundbegriffe der Stochastik, wie Wahrscheinlichkeitsraum (die Menge aller Elementarereignisse [Web92, S. 11-13]), Wahrscheinlichkeitsmaß (eine Funktion, die einem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zuordnet [Web92, S. 17]) und Zufallsgröße (eine Funktion, die einem Ereignis eine reelle Zahl zuordnet [Web92, S. 54]). Eine Wahrscheinlichkeitsfunktion ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Ein Vektor, der Zufallsgrößen enthält, heißt Zufallsvektor [Web92, S. 92].

Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass am Detektor gemessene  $\gamma$ -Quanten einer Poissonstatistik unterliegen. Diesen Sachverhalt werde ich in diesem Abschnitt zeigen. Ich definiere zuerst die **Poisson-Verteilung** [Web92, S. 81]:

**Definition 8: Poisson-Verteilung (Siméon D. Poisson – 1781–1840)**

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  einer diskreten Zufallsgröße  $X$  heißt Poisson-Verteilung mit Parameter  $\lambda \geq 0, \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , wenn

$$P: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, 1],$$

mit

$$P(\lambda, k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (3.32)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt.

Zu bemerken ist, dass bei der Poissonverteilung Gleichheit zwischen Parameter und Erwartungswert gilt [Web92, S. 83].

Die im Pixel  $f_j$  emittierte  $\gamma$ -Strahlung ist direkt vom radioaktiven Zerfall abhängig, welcher poissonverteilt ist [Buz05, S. 171]. Es können damit alle  $f_j, j = 1, \dots, N$  als poissonverteilte Zufallsgrößen angesehen werden. Daraus folgt:  $\mathbf{f}$  ist poissonverteilter Zufallsvektor mit Parametern  $\lambda_{\mathbf{f}} \in (\mathbb{R}^+)^N$  [Buz05, S. 172], so dass  $(\lambda_{\mathbf{f}})_j$  der Parameter zu  $f_j$  für alle  $j = 1, \dots, N$  ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis  $f_j$  unter dem Erwartungswert  $(\lambda_{\mathbf{f}})_j$  zu beobachten, ist damit  $P((\lambda_{\mathbf{f}})_j, f_j)$  für alle  $j \in N$ . Die Projektion  $\mathbf{p}$ , bekannt aus (3.28), als

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{f},$$

ist somit komponentenweise die Summe poissonverteilter Zufallsgrößen  $f_j$ . Damit ist die Projektion  $\mathbf{p}$  eine poissonverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswert [SV82, S. 112]

$$\lambda_{\mathbf{p}} = \mathbf{A}\lambda_{\mathbf{f}}. \quad (3.33)$$

### 3 Rekonstruktionsverfahren

Und die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis  $p_i$  unter dem Erwartungswert  $(\lambda_{\mathbf{p}})_i$  beobachtet wird, ist  $P((\lambda_{\mathbf{p}})_i, p_i)$  für alle  $i \in M$ . Ein in der Projektion  $p_i$  registrierter  $\gamma$ -Quant kann nicht mehr in einer anderen Projektion  $\mathbf{p}_l, l \in \{1, \dots, M\} \setminus \{i\}$  gemessen werden. Deswegen werden die Projektionswerte als stochastisch unabhängig angenommen [Buz05, S. 179]. Die Verbundwahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}: (\mathbb{R}^+)^n \times (\mathbb{N}_0)^n \rightarrow [0, 1],$$

mit

$$\mathcal{P}(\lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = P((\lambda_{\mathbf{p}})_1, \mathbf{p}_1) \cdots P((\lambda_{\mathbf{p}})_M, \mathbf{p}_M) = \prod_{i=1}^M P((\lambda_{\mathbf{p}})_i, \mathbf{p}_i) \quad (3.34)$$

kann wie folgt angegeben werden [Buz05, S. 172]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda_{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) &= \prod_{i=1}^M \frac{(\lambda_{\mathbf{p}})_i^{p_i}}{p_i!} e^{-(\lambda_{\mathbf{p}})_i} \\ &\text{und mit Gleichung 3.33} \\ &= \prod_{i=1}^M \frac{(\mathbf{A}\lambda_{\mathbf{f}})_i^{p_i}}{p_i!} e^{-(\mathbf{A}\lambda_{\mathbf{f}})_i} = \mathcal{P}(\lambda_{\mathbf{f}}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Typischerweise wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Ereignis unter einem gegebenen Erwartungswert eintritt, verwendet. Entsprechend gibt die Verbundwahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}$  die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass  $n$  bestimmte Ereignisse unter  $n$  gegebenen Erwartungswerten eintreten. Da im vorliegenden Fall die Ereignisse, hier die Projektionen, jedoch durch die Messung bekannt und somit fest sind, soll im Folgenden die Wahrscheinlichkeit dafür betrachtet werden, dass  $n$  bestimmte Erwartungswerte zu dem gegebenen Ereignis einer  $n$ -elementigen Stichprobe geführt haben, dies entspricht dem Ansatz der **Likelihood-Funktion** [Web92, S. 267]:

#### Definition 9: Likelihood-Funktion

Es sei  $\Omega$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $P: \Omega \times \Omega \rightarrow [0, 1]$  mit  $(p, x) \mapsto P(p, x)$  die Wahrscheinlichkeits- oder Dichtefunktion einer vom Parameter  $p$  abhängenden Verteilung einer Zufallsgröße  $X$ . Es wird eine  $n$ -Elementige Stichprobe entnommen mit Werten  $x_i, i \in \{1, \dots, n\}$ . Die Funktion des Parameters  $p$

$$L: \Omega^n \times \Omega \rightarrow [0, 1]$$

mit

$$\begin{aligned} L((x_1, \dots, x_n), p) &:= P((x_1, \dots, x_n), p) \\ &:= P(p, x_1) \cdot P(p, x_2) \cdots P(p, x_n) = \prod_{i=1}^n P(p, x_i) \end{aligned} \quad (3.36)$$

heißt Likelihood-Funktion.

### 3 Rekonstruktionsverfahren

Wird der Fall einer poissonverteilten Zufallsvariable betrachtet, so ergibt sich [Web92, S. 268 f]:

**Bemerkung 10: Likelihood-Funktion der Poisson-Verteilung**

Sei  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), k \in \mathbb{N}$  mit Erwartungswerten  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  eine poissonverteilte Zufallsvariable mit Wahrscheinlichkeitsfunktion  $P: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, 1]$ , so ist mit Definition 8 und 9

$$L: (\mathbb{N}_0)^n \times (\mathbb{R}^+)^n \rightarrow [0, 1],$$

$$L(\mathbf{k}, \boldsymbol{\lambda}) = \prod_{i=1}^n \frac{(\lambda_i)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i} \quad (3.37)$$

die zugehörige Likelihood-Funktion.

Es gilt  $L(\boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{p}) = \mathcal{P}(\boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{p})$ , gesucht wird ein Erwartungswertes  $\boldsymbol{\lambda}_f$ , so dass  $L(\boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{p})$  maximal wird [Buz05, S. 172 f]. Dieses Vorgehen wird als **Maximum-Likelihood Verfahren** bezeichnet. Der Maximierer, für den  $L(\boldsymbol{\lambda}_f, \mathbf{p})$  maximal wird, wird als **Maximum-Likelihood-Lösung**  $\boldsymbol{\lambda}_f^{\max}$  des algebraischen Rekonstruktionsproblems bezeichnet, falls er existiert [Buz05, S. 173].

**Bemerkung 11:**

Die folgenden mathematischen Ausdrücke sollen in Matrixnotation erfolgen. Dazu seien die skalaren Operationen des Logarithmus und der Fakultät für Vektoren durch komponentenweise Anwendung der solchen definiert. Das bedeutet, dass mit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\ln(\mathbf{x}) := (\ln(x_1), \dots, \ln(x_n))^T \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{x}! := (x_1!, \dots, x_n!) \in \mathbb{R}^n,$$

für komponentenweise  $\mathbf{x} \geq 0$  und

$$\mathbf{x}^{-1} := \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)^T \in \mathbb{R}^n,$$

für komponentenweise  $\mathbf{x} \neq 0$ . Weiterhin sei die Multiplikation von Vektoren definiert als

$$\mathbf{x} \odot \mathbf{y} := (x_1 y_1, \dots, x_n y_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Außerdem lege ich fest, dass

$$\text{diag}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ist und, dass  $\mathbb{1}$  der Vektor passender Dimension ist, der nur Einsen enthält.

Der Logarithmus ist eine streng monotone Funktion [Buz05, S. 173]. Dies bedeutet, dass eine Variable, die den Logarithmus einer Funktion maximiert, auch die Funktion selbst maximiert.

Dies ist der Gedanke hinter der **Log-Likelihood-Funktion**

$$l: \mathbb{N}_0^n \times (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^n \rightarrow (-\infty, 0],$$

mit

$$\begin{aligned} l(\lambda_f, \mathbf{p}) &:= \ln(L(\lambda_f), \mathbf{p}) \\ &= \sum_{i=1}^M p_i \ln((\mathbf{A}\lambda_f)_i) - \sum_{i=1}^M \ln(p_i!) - \sum_{i=1}^M (\mathbf{A}\lambda_f)_i \\ &= \mathbf{p}^T \ln(\mathbf{A}\lambda_f) - \mathbf{1}^T \ln(\mathbf{p}!) - \mathbf{1}^T (\mathbf{A}\lambda_f). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Gesucht ist eine Maximum-Likelihood Lösung  $\lambda_f^{\max}$ , für die die Log-Likelihood-Funktion unter der Nebenbedingung, dass komponentenweise  $\lambda_f \geq 0$  ist, maximiert wird. Im Folgenden soll dieses Maximisierungsproblem in ein Fixpunktproblem überführt werden, um eine Fixpunktiteration, hier den namensgebene Expectation-Maximization-Algorithmus, anzuwenden. Dazu bezeichne ich  $l(\lambda_f, \mathbf{f})$  verkürzt mit  $l(\lambda_f)$ .

### 3.3.2 Der Expectation-Maximization Algorithmus

In diesem Abschnitt wird ein Maximierer für (3.38) gesucht. Ich betrachte das Maximierungsproblem

$$\arg \max \{l(\lambda_f) \mid l(\lambda_f) \in \mathbb{R}^+\} \text{ u.d.N. } (\lambda_f)_j \geq 0 \text{ für alle } j \in N. \quad (3.39)$$

Dazu ist zu zeigen, dass ein Extremum existiert und, dass dieses eindeutig ist. Dazu untersuche ich die Funktion erst auf Extrempunkte und prüfe daraufhin eventuelle gefundene Extrempunkte mit den **Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen** (KKT-Bedingungen). Notwendige Bedingung für ein solches Extremum ist das Verschwinden der ersten Ableitung [Buz05, S. 173].

Die Ableitung von (3.38) lautet [Buz05, S.173]

$$\begin{aligned} \nabla l(\lambda_f) &= \mathbf{A}^T((\mathbf{A}\lambda_f)^{-1} \odot \mathbf{p}) - \mathbf{A}^T \mathbf{1} \\ &= \mathbf{A}^T((\mathbf{A}\lambda_f)^{-1} \odot \mathbf{p} - \mathbf{1}), \end{aligned} \quad (3.40)$$

und es muss für ein Extremum  $\lambda_f^{\max}$  gelten

$$\nabla l(\lambda_f^{\max}) = 0. \quad (3.41)$$

Es ist ein Maximum gesucht. Für ein solches ist die hinreichende Bedingung die Konkavität der zu maximierenden Funktion, was mit der Hessematrix überprüft werden kann [Buz05, S. 173]. Die Hessematrix lautet

$$\nabla^2 l(\lambda_f) = -\mathbf{A}^T \text{diag}(\mathbf{p} \odot (\mathbf{A}\lambda_f)^{-1}) \mathbf{A} \quad (3.42)$$

und es muss

$$\nabla^2 l(\lambda_f^{\max}) \leq 0 \quad (3.43)$$

gelten. Gemessene Aktivitäten am Detektor seien im Modell als nichtnegativ angenommen, damit ist komponentenweise  $\mathbf{p} \geq 0$ . Flächenanteile können nicht negativ sein, weshalb komponentenweise  $\mathbf{A} \geq 0$  gilt. Unter der aus (3.30) bekannten Nebenbedingung  $\mathbf{f} \geq 0$

### 3 Rekonstruktionsverfahren

folgt, dass auch die Erwartungswerte  $\lambda_{\mathbf{f}}$  zu  $\mathbf{f}$  komponentenweise größer oder gleich null sein müssen und damit auch  $\lambda_{\mathbf{f}}^{\max} \geq 0$  ist. Die Ungleichung (3.43) ist damit erfüllt.

Es konnte gezeigt werden, dass ein Extremum für  $l$  existiert und, dass es ein Maximum ist, da  $l(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max})$  konkav ist. Da dies darüber hinaus das einzige Extremum ist, ist die Lösung eindeutig und ein globales Maximum [Buz05, S. 174].

Im Folgenden wird ein Optimierungsalgorithmus bestimmt. Es ist zu zeigen, dass  $\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}$  ein Maximierer des Problems (3.39) mit den Nebenbedingungen  $c_j(\lambda_{\mathbf{f}}) := (\lambda_{\mathbf{f}})_j \geq 0$  für alle  $\lambda_{\mathbf{f}}$  und  $j = 1, \dots, N$  ist. Die KKT-Bedingungen sind die notwendigen Bedingungen dafür. Zuerst überprüfe ich, ob die Voraussetzungen für die Anwendung der KKT-Bedingungen erfüllt sind. Diese Voraussetzungen sind z.B. unter [NW06, S. 321] aufgeführt.

Die Nebenbedingungen sind differenzierbar mit  $\nabla c_j(\lambda_{\mathbf{f}}) = e_j$  und  $e_j$  dem  $j$ -ten Einheitsvektor. Daraus folgt, dass für alle  $\lambda_{\mathbf{f}}$  alle  $\nabla c_j(\lambda_{\mathbf{f}})$  untereinander linear unabhängig sind. Die Lagrange-Funktion lautet [NW06, S. 320]

$$\mathcal{L}(\lambda_{\mathbf{f}}, \chi) := l(\lambda_{\mathbf{f}}) - \sum_{i \in N} \chi_i c_i(\lambda_{\mathbf{f}}). \quad (3.44)$$

Nach Nocedal und Wright [NW06, S. 321] gelten dann die KKT-Bedingungen und  $\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}$  ist Maximierer von (3.39). Weiterhin gilt: es existiert ein Lagrange-Multiplikator  $\chi^*$  mit Komponenten  $\chi_j^*$ ,  $j = 1, \dots, N$ , so dass

$$\nabla \mathcal{L}(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}, \chi^*) = 0 \quad (3.45)$$

$$c_j(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}) = 0 \text{ für alle } j \in N \text{ für die } \lambda_{\mathbf{f}} = 0, \quad (3.46)$$

$$c_j(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}) \geq 0 \text{ für alle } j \in N \text{ für die } \lambda_{\mathbf{f}} \geq 0, \quad (3.47)$$

$$\chi^* \geq 0 \text{ für alle } j \in N \text{ für die } \lambda_{\mathbf{f}} \geq 0, \quad (3.48)$$

$$c_j(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}) \chi_j^* = 0 \text{ für alle } j \in N, \quad (3.49)$$

gilt. Mit (3.44) und  $\nabla c_j(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}) = e_j$  folgt aus (3.45)

$$\begin{aligned} \nabla l(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}) - \chi^* &= 0 \\ \Leftrightarrow \nabla l(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}) &= \chi^*. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Durch Einsetzen von (3.50) in (3.49) ergibt sich dann

$$\lambda_{\mathbf{f}}^{\max} \odot \nabla l(\lambda_{\mathbf{f}}^{\max}) = 0, \quad (3.51)$$

und (3.51) ist die Grundlage für folgendes Iterationschema [SV82, S. 120].

$$\lambda_{\mathbf{f}} \cdot \nabla l(\lambda_{\mathbf{f}}) = \lambda_{\mathbf{f}} \odot \left[ \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \lambda_{\mathbf{f}}^{-1} \odot \mathbf{p} - \mathbf{1}) \right] = 0. \quad (3.52)$$

Da, wie durch (3.31) bekannt ist,  $\mathbf{A}^T \mathbf{1} = \mathbf{1}$  gilt, folgt

$$\lambda_{\mathbf{f}} \cdot \nabla l(\lambda_{\mathbf{f}}) = \lambda_{\mathbf{f}} \odot (\mathbf{A}^T ((\mathbf{A} \lambda_{\mathbf{f}})^{-1} \odot \mathbf{p})) - \lambda_{\mathbf{f}} = 0 \quad (3.53)$$

und damit

$$\lambda_{\mathbf{f}} = \lambda_{\mathbf{f}} \odot (\mathbf{A}^T ((\mathbf{A} \lambda_{\mathbf{f}})^{-1} \odot \mathbf{p})). \quad (3.54)$$

Der Schnittpunkt lässt sich über eine Fixpunktiteration bestimmen [Buz05, S. 175]:

$$\lambda_{\mathbf{f}}^{(n+1)} = \lambda_{\mathbf{f}}^{(n)} \odot (\mathbf{A}^T ((\mathbf{A} \lambda_{\mathbf{f}}^{(n)})^{-1} \odot \mathbf{p})). \quad (3.55)$$

### 3 Rekonstruktionsverfahren

Dabei ist Gleichung 3.55 als **Expectation-Maximization Algorithmus** (siehe hierzu auch [DLR77]) bekannt und stellt gleichzeitig die Iterationsvorschrift für die Bildrekonstruktion dar. Dabei wird im Schritt  $n \rightarrow n + 1$  angenommen, dass  $\lambda_f^{(n)}$  die gesuchten Aktivitätswerte enthält und eine Vorwärtsprojektion

$$\mathbf{p}' = \mathbf{A}\lambda_f^{(n)} \quad (3.56)$$

durchgeführt [Buz05, S. 175]. Die Elemente von  $\mathbf{p}'$  sind die **erwarteten** Projektionswerte der  $n$ -ten Iteration. Der Vergleich der originalen Projektionswerte  $\mathbf{p}$  mit den berechneten Projektionswerten  $\mathbf{p}'$  ergibt eine Multiplikative Korrektur der gesuchten Aktivitätswerte

$$\lambda_f^{(n+1)} = \lambda_f^{(n)} \odot (\mathbf{A}^T((\mathbf{p}')^{-1} \odot \mathbf{p})). \quad (3.57)$$

Es ergibt sich ein verbessertes Bild  $\lambda_f^{(n+1)}$ . Wie von Shepp und Vardi [SV82, S. 120] gezeigt, konvergiert (3.57) und wächst in jedem Schritt, wird also **maximiert**.

Der letzte Aspekt für dieses iterative Verfahren betrifft die Initialisierung. Für diese hat sich die Gleichverteilung der mittleren Projektionssummen

$$\lambda_f^{(0)} = \frac{1}{M} \mathbf{1}^T \mathbf{p},, \forall j \in \{1, \dots, M\} \quad (3.58)$$

als brauchbar herausgestellt [Buz05, S. 175]. Es handelt es sich bei dem Verfahren 3.55 um ein Gradientenverfahren, da

$$\begin{aligned} \lambda_f^{(n+1)} &= \lambda_f^{(n)} \odot (\mathbf{A}^T((\mathbf{p}')^{-1} \odot \mathbf{p})) \\ &= \lambda_f^{(n)} + \text{diag}(\lambda_f^{(n)}) \mathbf{A}^T((\mathbf{A}\lambda_f)^{-1} \odot \mathbf{p} - \mathbf{1}) \\ &= \lambda_f^{(n)} + \text{diag}(\lambda_f^{(n)}) \nabla l(\lambda_f^{(n)}) \end{aligned}$$

gilt [Buz05, S. 176].

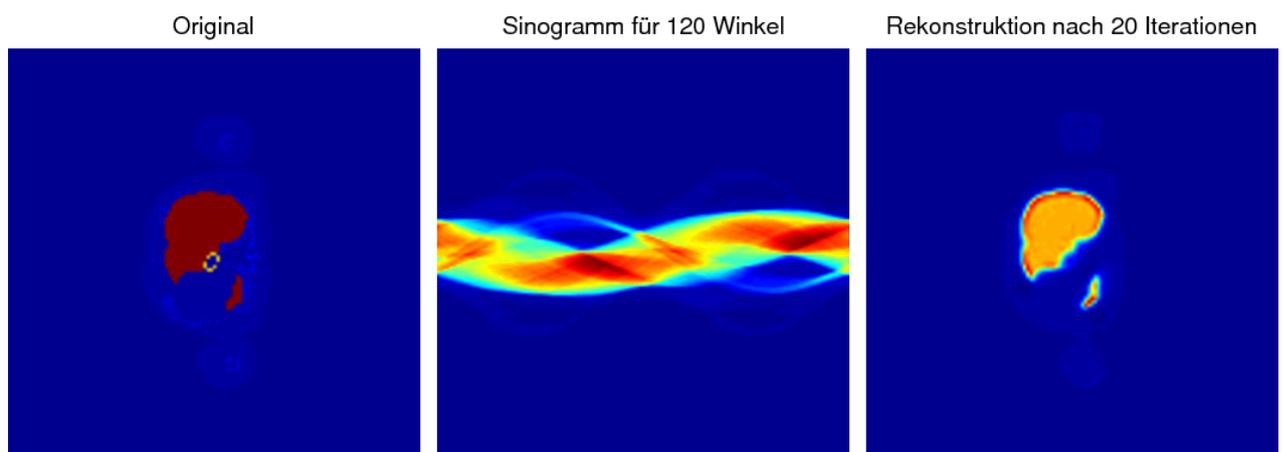


Abbildung 3.8: Beispiel einer MLEM-Rekonstruktion nach 20 Iterationen anhand simulierter Aufnahmedaten des Abdomens bei 120 Projektionen

Der erhaltene Iterationsalgorithmus kann zur Bildrekonstruktion verwendet werden. Er entspricht formal einer Vorwärtsprojektion und einer Rückprojektion pro Iteration [Buz05,

### 3 Rekonstruktionsverfahren

S. 177]. Der Rechenaufwand ist verglichen mit der gefilterten Rückprojektion sehr viel größer [Buz05, S. 176].

Ein Anwendungsbeispiel für den Algorithmus ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Im Vergleich zu Abbildung 3.4 ist deutlich die Abschwächung zu erkennen. Abbildung 3.9 zeigt einen Vergleich von Rekonstruktionen des Originals aus 3.8 nach verschiedenen Iterationsschritten.

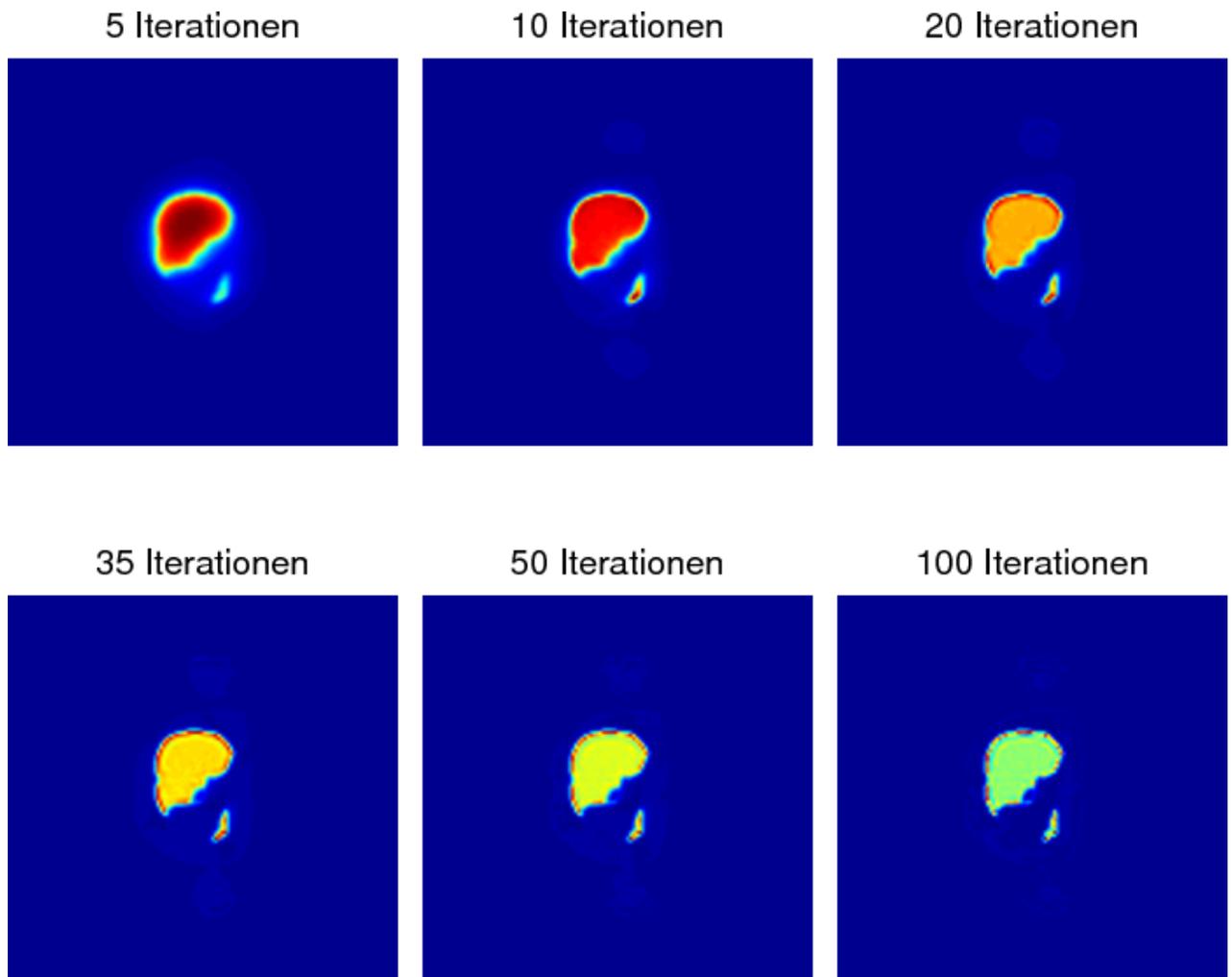


Abbildung 3.9: Auswirkung der Anzahl der Iterationen auf den Rauschanteil im Bild

Zu beachten ist, dass das Rauschen bei höheren Iterationen zunimmt. Dies ist zum Beispiel an den Armen erkennbar. Dieses Signal-Rausch-Verhältnis kann zum Beispiel als Indikator genutzt werden, wann die Iteration zu stoppen ist [Sch08, S. 34].

Im nächsten Kapitel möchte ich die beiden erhaltenen Rekonstruktionsverfahren miteinander vergleichen und reale Beispiele betrachten.

## 4 Beispielbetrachtung und Vergleich

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels möchte ich die von mir in MATLAB implementierten Rekonstruktionsverfahren auf einige reale Projektionsdaten anwenden. Nachdem ich so eine Übersicht über die Leistungsfähigkeit der Verfahren gegeben habe, möchte ich im zweiten Abschnitt dann die bereits aus den vorigen Kapiteln bekannten, simulierten XCAT-Daten zu einem Vergleich der Verfahren nutzen. Zu XCAT siehe [SSM<sup>+</sup>10].

### 4.1 Beispielbetrachtung - reale Datensätze

Ich möchte zwei verschiedene Datensätze betrachten. Ein Datensatz enthält 120 Projektionen des Jaszczak Phantom, ein Testobjekt mit dem die Leistungsfähigkeit von Geräten und Algorithmen in der emissionstomographischen Bildgebung geprüft wird.

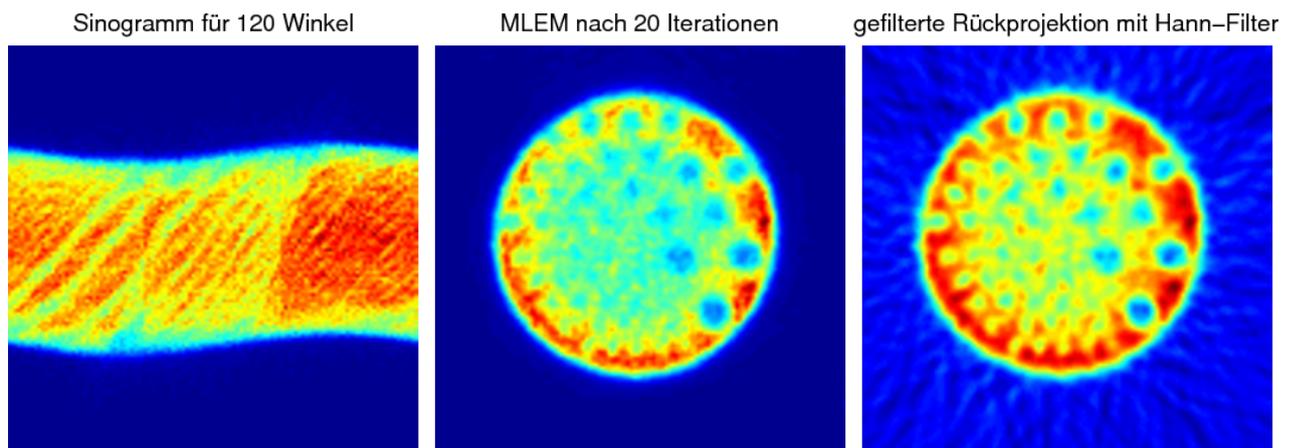


Abbildung 4.1: Der untere Bereich des Jaszczak Phantoms, rekonstruiert aus realen Aufnahmedaten

Das Phantom besteht aus einem zylindrischen Gefäß, welches mit mit einem Tracer versetztem Wasser gefüllt ist und verschiedenen Röhren und Kugeln, die keine  $\gamma$ -Strahlung emittieren. Dabei befindet sich im unteren Bereich eine Anordnung von unterschiedlich großen Röhren und im oberen Bereich eine Anordnung unterschiedlich großer Kugeln. Ich möchte im Folgenden beispielhaft einen Schnitt durch den unteren Bereich betrachten, siehe dazu Abbildung 4.1. Bei der Rekonstruktion von verrauschten Daten liefert ein simpler Ramp-Filter keine guten Ergebnisse. Ich benutze daher einen Hann-Filter. Bei diesem wird der Ramp-Filter mit einem Hanning-Fenster multipliziert. Eine genauere Herleitung möchte ich an dieser Stelle nicht geben, da die Entwicklung von Filtern für die gefilterte Rückprojektion ein eigenes Forschungsgebiet ist und nicht Teil dieser Arbeit. Eine Einführung ist zum Beispiel unter [Buz05, S. 193] zu finden.

## 4 Beispielbetrachtung und Vergleich

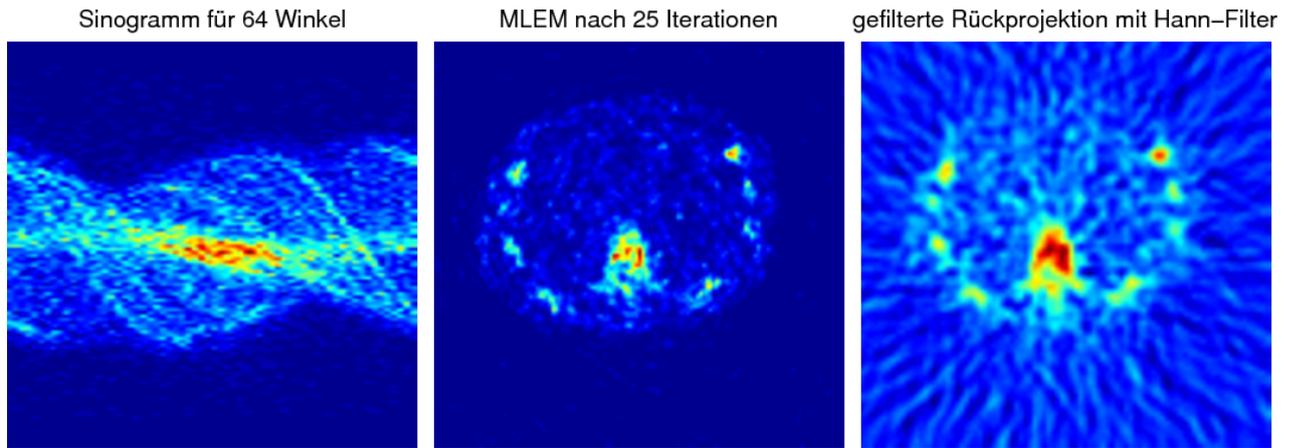


Abbildung 4.2: Ein Schnitt durch den Brustkorb, rekonstruiert aus realen Aufnahmedaten

Der zweite Datensatz enthält die Messdaten eines Knochen-SPECTs mit 64 Projektionen. Abbildung 4.2 zeigt dabei einen Schnitt durch den Brustkorb. Deutlich zu erkennen sind die Wirbelsäule und einige Rippen, wobei im Vergleich der beiden Rekonstruktionen auffällt, dass die Rippen in der gefilterten Rückprojektion deutlicher zu erkennen sind. In der MLEM-Rekonstruktion sind dafür die Konturen des Körpers zu erkennen und die Rippen sind deutlich abgegrenzt vom umliegenden Gewebe.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass beide Verfahren in der von mir implementierten Form starke Probleme mit realen Daten haben. Dies liegt vermutlich daran, dass die Daten verrauscht sind. Dies fällt insbesondere stark auf, wenn Datensätze wie das Knochen-SPECT betrachtet werden, die, wie aus dem Sinogramm ersichtlich, ein geringes Signal-Rausch-Verhältnis bieten. Im Folgenden möchte ich simulierte Daten betrachten und die Verfahren damit genauer vergleichen.

### 4.2 Vergleich - simulierte Datensätze

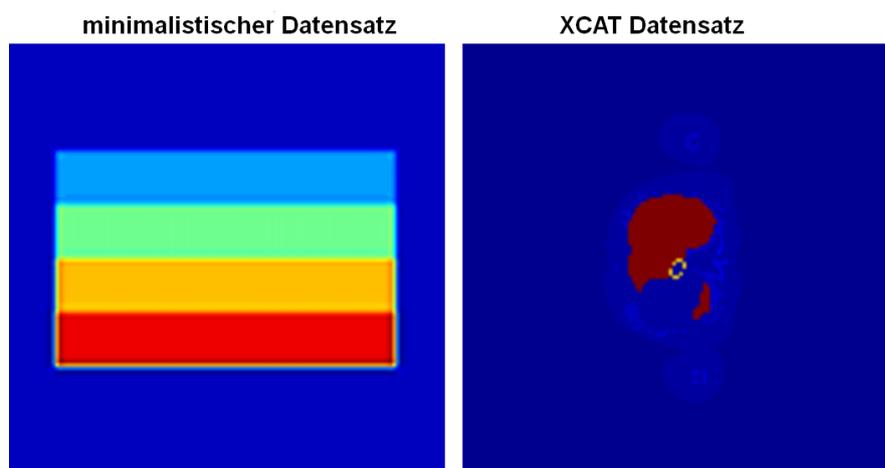


Abbildung 4.3: Die Originaldatensätze

In diesem letzten Abschnitt möchte ich eine Aussage über die Qualität der Daten, die durch die beiden Verfahren ermittelt werden, treffen. Da die von mir verwendeten Algorithmen keine Energieerhaltung garantieren (vgl. 3.2.2) möchte ich anstatt der originalen

#### 4 Beispielbetrachtung und Vergleich

Daten  $\mathbf{f}$  die normalisierten Daten  $\mathbf{f}_{\text{Normalisiert}} = \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{f}|_1}$  betrachten. Alle Angaben im Folgenden beziehen sich auf solche normalisierten Daten.

Um die Daten zu vergleichen möchte ich keine Differenzbilder zeigen, sondern ich benutze eine Metrik als Abstandsmaß. Ich verwende hier die durch die 1-Norm induzierte Manhattan-Metrik

$$d(\mathbf{f}_R, \mathbf{f}_O) = |\mathbf{f}_R - \mathbf{f}_O|_1, \quad (4.1)$$

mit den normalisierten Datensätzen  $\mathbf{f}_R$  der rekonstruierten Daten und  $\mathbf{f}_O$  der Originaldaten. Ich wähle die Manhattan-Metrik, weil sie die Summe aller Differenzen liefert. Sie ist also die Aufsummierung aller Werte eines Differenzbildes. Durch das Abstandsmaß lässt sich eine Aussage über die Ähnlichkeit der Daten treffen und damit über die Qualität der Rekonstruktionsverfahren, wobei kleinere Werte ein ähnlicheres Bild bedeuten.

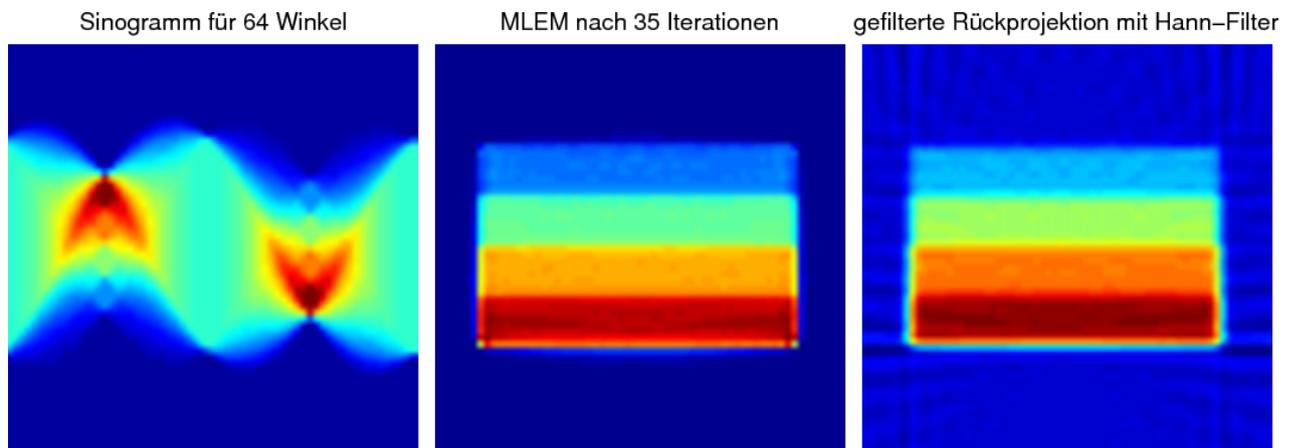


Abbildung 4.4: Vergleich der Rekonstruktionen der minimalistischen Daten

Eine Qualitätsaussage möchte ich für zwei simulierte Datensätze treffen. Als erstes betrachte ich den in Abbildung 4.3 links dargestellten minimalistischen Fall eines Rechtecks mit vier Gebieten unterschiedlicher Aktivität.

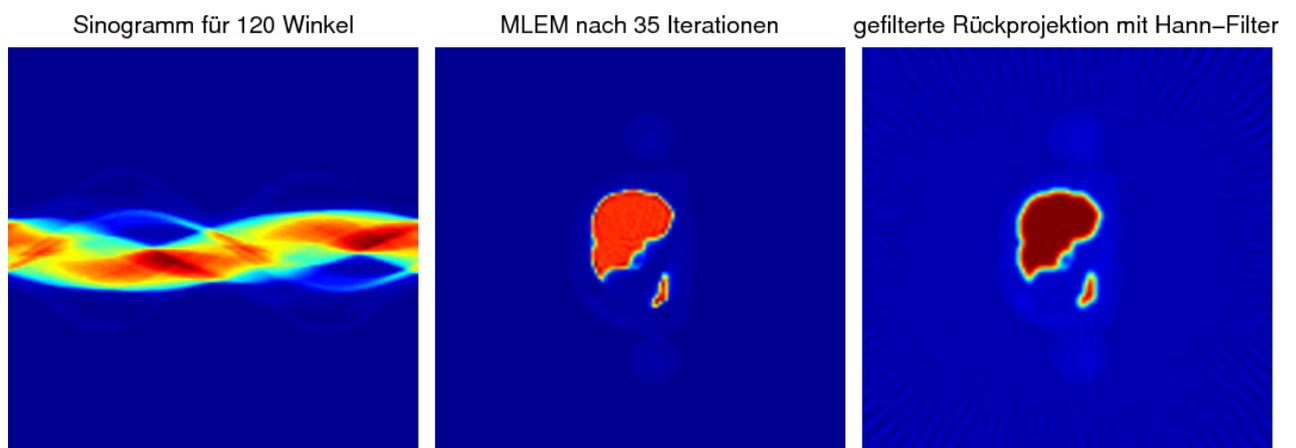


Abbildung 4.5: Vergleich der mit XCAT erstellten Daten

Abbildung 4.4 zeigt das Sinogramm einer Projektion des ersten Datensatzes mit 64 Projektionen und eine MLEM-Rekonstruktion nach 35 Iterationen, sowie eine gefilterte Rückprojektion mit Hann-Filter. Das Abstandsmaß (4.1) zwischen den Rekonstruktionen und dem

#### 4 Beispielbetrachtung und Vergleich

Original ist für MLEM 0.0605 und für die gefilterte Rückprojektion 0.1392. Die Ähnlichkeit ist damit für die MLEM-Rekonstruktion höher, was sich auch in den schärferen Kanten und der homogeneren Aktivitätsverteilung in der Rekonstruktion deutlich macht.

Als zweite Grundlage für einen Vergleich verwende ich die in Abbildung 4.3 rechts dargestellte XCAT-Simulation. Abbildung 4.5 zeigt dabei die Rekonstruktion mit gefilterter Rückprojektion mit Hann-Filter und MLEM nach 35 Iterationen. Ein Vergleich mit dem Maß (4.1) zwischen XCAT-Datensatz und MLEM-Rekonstruktion führt zu einem Wert von 0.115, während ein Vergleich der XCAT-Daten und der gefilterten Rückprojektion zu einem Wert von 0.307 führt. Die MLEM-Rekonstruktion ist damit auch hier überlegen. Zu sehen ist wieder die deutlich homogener dargestellte Strahlungsverteilung und die bessere Abgrenzung der Konturen. Sogar einige Knochen, wie z.B. die Armknochen, sind deutlich zu erkennen. Es finden sich jedoch am Rand des Objektes störende Rekonstruktionsartefakte, die durch meine nicht optimale Implementierung hervorgerufen werden.

## 5 Fazit

Ich habe in dieser Arbeit zwei Rekonstruktionsverfahren für die **Single-Photonen-Emission-Computed-Tomography** betrachtet. Dafür habe ich in Kapitel 2 ein mathematisches Modell des Messvorganges wiedergegeben, um eine Beschreibung für den Aufnahmevergong zu erstellen und damit die Problemstellung zu formulieren. Ich wählte hierfür die **Ray-Transformation**.

In Abschnitt 3.1 habe ich nachvollzogen, dass die **Radon-Transformation** im zweidimensionalen äquivalent zur Ray-Transformation ist und als Grundlage für eine Rekonstruktion dienen kann. Ich habe daraufhin die Invertierung der Radon-Transformation mit dem **Fourier-Slice-Theorem** beschrieben und konnte mit der **ungefilterten Rückprojektion** eine erste Lösung wiedergeben. Diese Lösung wies für die betrachteten Beispiele ein verwischenes Bild auf. Ich habe daraufhin nachvollzogen, dass bei der ungefilterten Rückprojektion eine Faltung der Daten vorliegt. Dies führte mich zur gefilterten Rückprojektion, bei der dieser Faltung durch einen Filter entgegengewirkt wird.

In Abschnitt 3.2 habe ich das mathematische Modell diskretisiert und in Abschnitt 3.3 einen numerischen Rekonstruktionsansatz wiedergegeben: das **Maximum-Likelihood-Expectation-Maximization Verfahren**. Dazu habe ich angenommen, dass die gemessene Radioaktivität einer **Poisson-Verteilung** unterliegt und mit der **Likelihood-Funktion** eine Lösungsansatz gefunden werden kann. Es kann also ein **Maximum-Likelihood-Verfahren** betrachtet werden. Ich vollzog nach, dass eine Lösung existiert und, dass für diese die **Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen** gelten müssen. Diese führten mich auf ein Iterationsschema: den **Expectation-Maximization-Algorithmus**.

In Kapitel 4 konnte ich schließlich die Vorteile und Probleme der Verfahren aufzeigen. Es gab mit beiden von mir implementierten Verfahren Probleme mit realen und damit verrauschten Daten. Diese Ergebnisse hätten wahrscheinlich verbessert werden können, wenn die bisher vernachlässigten Effekte wie Absorption, Scattering oder die Detektorgeometrie in das mathematische Modell integriert worden wären. Außerdem spielt im Falle der gefilterten Rückprojektion die Wahl des Filters eine entscheidende Rolle für die Bildqualität, die ich in dieser Arbeit nicht betrachtet habe.

Trotzdem konnte ich zeigen, dass zumindest mit den simulierten SPECT-Aufnahmen die Rekonstruktion mit dem ML-EM-Verfahren dem Original ähnlicher ist als die Rekonstruktion mit der gefilterten Rückprojektion. Ob dafür der deutlich höhere Rechenaufwand und damit der erhöhte Zeitbedarf in Kauf genommen wird, ist sicherlich situationsbedingt zu entscheiden.

# Literaturverzeichnis

- [Ang58] ANGER, H.O.: Scintillation Camera. In: *Review of Scientific Instruments* 29 (1958), Nr. 1, S. 27–33
- [Ber07] BERNHARD-STRÖL, C. AND HACHENBERGER, C. AND TRUGENBERGER-SCHNABEL, A.: Umweltradioaktivität und Strahlenbelastung / Bundesamt für Strahlenschutz. Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, 2007. – Jahresbericht. – urn:nbn:de:0221-20100331975
- [BH04] BAUM, R.P. ; HOFMANN, M.: Nuklearmedizinische Diagnostik neuroendokriner Tumoren. In: *Der Onkologe* 10 (2004), Nr. 6, S. 598–610
- [BS91] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1991
- [Buz05] BUZUG, T. M.: *Einführung in die Computertomographie - Mathematisch-physikalische Grundlagen der Bildrekonstruktion*. Springer, 2005. – ISBN 9783540208082
- [CCM<sup>+</sup>90] CHORNOBOY, E. S. ; CHEN, C. J. ; MILLER, M. I. ; MILLER, T. R. ; SNYDER, D. L.: An evaluation of maximum likelihood reconstruction for SPECT. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 9 (1990), Nr. 1, S. 99–110
- [Cha78] CHANG, L.-T.: A Method for Attenuation Correction in Radionuclide Computed Tomography. In: *IEEE Transaction on Nuclear Science* NS-25 (1978), Februar, Nr. 1, S. 638–643
- [CSP03] CHERRY, S. R. ; SORENSON, J. A. ; PHELPS, M. E.: *Physics in Nuclear Medicine*. Dritte Auflage. Saunders, 2003. – ISBN 9780721683416
- [DLR77] DEMPSTER, A. P. ; LAIRD, N. M. ; RUBIN, D. B.: Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. In: *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* 39 (1977), Nr. 1, S. 1–38
- [NW01] NATTERER, F. ; WÜBBELING, F.: *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001 (Mathematical Modeling and Computation). – ISBN 9780898716221
- [NW06] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S.J.: *Numerical optimization*. Springer, 2006 (Springer series in operations research). – ISBN 9780387303031
- [PB04] PIRKER, W. ; BRÜCKE, Th.: SPECT in der Diagnostik von Parkinson-Syndromen. In: *Journal für Neurologie, Neurochirurgie und Psychiatrie* (2004), Nr. 5, S. 9–20
- [Sch08] SCHUMACHER, H.: *Bewegungskorrektur in SPECT-Aufnahmen*, Universität zu Lübeck, Diss., 2008

## LITERATURVERZEICHNIS

- [SMY05] SILVER, J.M. ; MCALLISTER, T.W. ; YUDOFKY, S.C.: *Textbook of traumatic brain injury*. American Psychiatric Pub., 2005. – ISBN 9781585621057
- [SSM<sup>+</sup>10] SEGARS, W.P. ; STURGEON, G. ; MENDONCA, S. ; GRIMES, J. ; TSUI, B.M.W.: 4D XCAT phantom for multimodality imaging research. In: *Medical physics* 37 (2010), Nr. 9, S. 4902–15
- [SV82] SHEPP, L.A. ; VARDI, Y.: Maximum Likelihood Reconstruction of Emission Tomography. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 1 (1982), S. 113–122
- [Web92] WEBER, H.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure*. Teubner, 1992. – ISBN 9783519029830
- [Zai06] ZAIDI, H.: *Quantitative analysis in nuclear medicine imaging*. Springer, 2006. – ISBN 9780387238548