



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND  
IMAGE COMPUTING

Bachelorarbeit

# SPECT-Rekonstruktion bei geringer Strahlendosis mit dem EM-TV- Verfahren

Christiane Schmidt

Thema ausgegeben von  
Prof. Dr. Jan Modersitzki  
Institute of Mathematics and Image Computing

Arbeit betreut von  
Dipl.-Inf. Sven Barendt  
Institute of Mathematics and Image Computing

Abgabe: 23.07.2012



IM FOCUS DAS LEBEN



### **Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel verfasst habe.

Lübeck, den 21. Juli 2012

---



## **Kurzfassung**

Zur Rekonstruktion von SPECT-Aufnahmen wird standardmäßig der EM-Algorithmus verwendet. Dieser liefert besonders bei geringer Strahlung, durch Verwendung von Kontrastmitteln mit niedriger Halbwertszeit oder geringer Dosis, unzureichende Ergebnisse. Dies wird in der vorliegenden Arbeit aufgezeigt und ein Ansatz zur Lösung dieses Problems in Form des EM-TV-Verfahrens vorgestellt. Dieses wird zunächst hergeleitet, getestet und abschließend die Vorteile gegenüber dem Standardverfahren aufgezeigt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	SPECT Vorwärtsmodell . . . . .	2
1.2	SPECT Rekonstruktionsproblem . . . . .	4
1.3	SPECT Rekonstruktion . . . . .	4
1.3.1	Testumgebung . . . . .	5
1.3.2	Die Expectation Maximization-Methode . . . . .	8
1.3.3	Abbruchbedingungen . . . . .	12
1.3.4	Ergebnisse der EM-Methode . . . . .	12
<b>2</b>	<b>EM-TV Rekonstruktion</b>	<b>15</b>
2.1	Diskrete Herleitung . . . . .	16
2.2	Ergebnisse . . . . .	21
2.3	Gedämpfter EM-TV . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Diskussion</b>	<b>27</b>



# 1 Einleitung

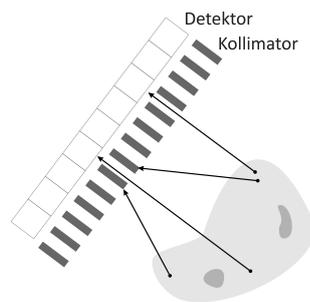
Tomographische Verfahren stellen einen wichtigen Teil der medizinischen Bildgebung dar, wobei es verschiedene Arten gibt.

Bei der Transmissionstomographie (Computertomographie, Magnetresonanztomographie) wird der Körper von außen bestrahlt und dahinter die abgeschwächte Intensität gemessen. Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT) hingegen gehört mit der Positronen-Emissions-Tomographie - (PET) zu den Verfahren der Emissionstomographie.

Ihre Besonderheit liegt im Vergleich zur Transmissionstomographie in der Fähigkeit funktionelle Eigenschaften der untersuchten Regionen sichtbar zu machen. So wird sie beispielsweise zu funktionellen Gehirn- oder Herzuntersuchungen genutzt [7]. Einem Patienten werden Radiopharmazeutika verabreicht, die sich je nach Art des Tracers über den Stoffwechsel in bestimmten Regionen des Körpers anreichern. Die abgeschwächte Strahlung des Kontrastmittels wird außerhalb des Körpers mit den Detektoren eines Tomographen gemessen. Im Gegensatz zu PET wird bei SPECT pro radioaktivem Zerfall nur ein Teilchen emittiert.



(a) SPECT-Scanner [4]



(b) Kollimation

Ein Photon kann in beliebigem Winkel abgestrahlt werden. Ein Detektor könnte also Strahlung aus beliebigen Winkeln von beliebigen Punkten des Objektes

messen. Besonders bei der SPECT-Rekonstruktion ist es hilfreich eine gewisse Geometrie zu Grunde zu legen, um herausfinden zu können, wo der Ursprung der gemessene Strahlung liegt. Aus diesem Grund werden die Strahlen vor dem Detektor kollimiert, sodass nur senkrecht auftreffende Strahlen detektiert werden. Man misst also für jeden Winkel einen Satz paralleler Strahlen. Die restliche Strahlung wird nicht berücksichtigt. So wird immer nur ein Bruchteil der tatsächlich emittierten Strahlung gemessen.

Auf Grund der Kollimation und der Tatsache, dass radioaktiver Zerfall bereits ein eher seltenes Ereignis ist, weisen die zur Verfügung stehenden Daten eine schlechte Statistik auf. Soll zusätzlich noch die Kontrastmitteldosis gesenkt oder ein Tracer mit kurzer Halbwertszeit verwendet werden, um die Strahlenbelastung für den Patienten zu verringern, wirkt sich dies negativ auf die Bildqualität aus, da so die Anzahl der gemessenen Ereignisse weiter verringert wird.

In dieser Arbeit geht es um ein Verfahren zur SPECT-Rekonstruktion, welches trotz der schlechten Statistik der Daten Resultate mit akzeptabler Qualität liefern kann. Dabei handelt es sich um einen iterativen Lösungsansatz zur Lösung des inversen Problems der SPECT-Rekonstruktion.

Zunächst wird ein Modell der SPECT-Rekonstruktion und das Rekonstruktionsproblem vorgestellt. Als erster Lösungsansatz des Problems wird der EM-Algorithmus präsentiert, der ein weit verbreitetes Standardverfahren in der Emissionstomographie darstellt. Außerdem bildet er die Basis für das EM-TV-Verfahren, welches dann im Hauptteil vorgestellt und diskret hergeleitet wird. Die Ergebnisse dieses Verfahrens werden mit denen des EM-Algorithmus verglichen und diskutiert.

### 1.1 SPECT Vorwärtsmodell

Bei der Emissionstomographie soll die Dichte  $f$  eines Radiopharmazeutikums im Innern eines Objektes bestimmt werden. Die Strahlung des Tracers wird außerhalb des Objektes durch Detektoren gemessen. Entlang des Weges vom Auftreten der Strahlung im Körper zum Detektor wird sie durch Knochen oder Gewebe verschiedener Dichte abgeschwächt.

Dementsprechend wird als Vorwärtsmodell der SPECT-Rekonstruktion die At-

tenuated Raytransform [6] gewählt

$$\mathcal{P}[f, \mu](x, \theta) = \int_{L(x, \theta)} f(z) \mathcal{A}[\mu](z, \theta) dz$$

$$\text{mit } \mathcal{A}[\mu](z, \theta) = e^{-\int_{L^+(z, \theta)} \mu(\tilde{z}) d\tilde{z}}$$

und  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,  $z \in \mathbb{R}^2$ .

Wobei  $L(x, \theta)$  eine Gerade im Winkel  $\theta$  an der Detektorposition  $x$  und  $f$  die

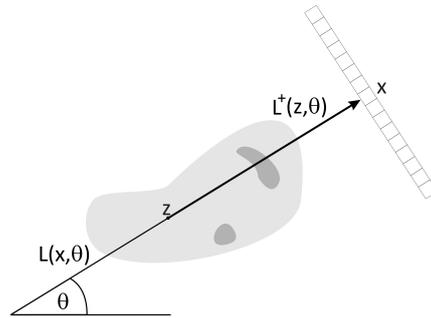


Abbildung 1.1: Modell einer SPECT-Messung

Dichte des radioaktiven Kontrastmittels innerhalb des Objektes ist.  $L^+(z, \theta)$  ist die Halbgerade vom Punkt  $z$  bis zum Detektor und  $\mu(\tilde{z})$  eine Funktion, die jedem Punkt des Objektes einen Abschwächungskoeffizienten zuordnet.

Man modelliert eine Messung als  $g = Pf := \mathcal{P}[f, \mu]$ . In der Praxis wird  $\mu$  oft als gegeben angenommen. Da dieses z.B. durch CT-Aufnahmen bestimmt werden kann [12].

Dabei ergeben sich jedoch die folgenden Probleme. Es muss z.B. eine Intensitätsskalierung von CT zu SPECT vorgenommen werden. Die CT-Intensitäten bilden nur den Mittelwert der Energien eines Materials in verschiedenen Energien ab, da Röntgenstrahlen ein breites Energiespektrum aufweisen. Bei gewissen Materialien ist die photoelektrische Absorption höher als bei anderen sodass eine materialabhängige Energieskalierung sinnvoll ist [1].

Außerdem kommt es bei der Bestimmung der Abschwächungskoeffizienten zu einem räumlichen Korrespondenzproblem. Weil die Messungen nicht gleichzeitig vorgenommen werden können, unterscheiden sich die Aufnahmen auf Grund von Atmung oder Bewegung des Patienten [10].

Hier werden diese Probleme nicht weiter verfolgt und das  $\mu$  als bekannt vorausgesetzt.

## 1.2 SPECT Rekonstruktionsproblem

Nach dem Scannen erhält man also eine Messung  $g := \mathcal{P}[f, \mu]$ , die als Attenuated Raytransform modelliert wird. Die Aufgabe besteht nun darin, die Dichte des Kontrastmittels im Körper  $f$  zu bestimmen, welche diese Messungen erzeugt hat. Nun sind  $g$ , der Operator  $\mathcal{P}[f, \mu](x, \theta)$  und  $\mu$  gegeben und es wird versucht die entsprechende Funktion  $f$  zu berechnen, somit liegt ein inverses Problem vor.

Offensichtlich liegen nur endlich viele diskrete Messungen vor, was die Invertierung nicht eindeutig macht. Außerdem hat  $f$  unendlich viele Freiheitsgrade. Wie viele inverse Probleme ist auch dieses nach Hadamard schlecht gestellt [7].

## 1.3 SPECT Rekonstruktion

Besonders in der Computertomographie wird das inverse Problem der Bildrekonstruktion oft mit direkten Rekonstruktionsverfahren wie der gefilterten Rückprojektion (FBP) realisiert, da diese besonders schnell ist [11]. Iterative Verfahren haben jedoch den Vorteil, dass sie speziell auf ein Modell mit Rauschen aufgebaut sein können und eine explizite Glattheit der Rekonstruktion fordern können, weshalb sie gerade für die Rekonstruktion von PET und SPECT-Daten die Standard-Methode sind.

Ein gängiger Algorithmus zur iterativen SPECT-Rekonstruktion ist der Expectation Maximization Algorithmus (EM). Zuvor wurde das Rekonstruktionsproblem durch ein Linienintegral in Form der Attenuated Raytransform modelliert. Der EM-Algorithmus basiert auf einem stochastischen Modell.

Radioaktiver Zerfall ist ein seltenes Ereignis und wird durch die Poissonverteilung beschrieben. Die Messung kann also auch stochastisch modelliert werden. Für die Wahrscheinlichkeit das Bild  $f$  bei einer gegebenen Messung  $g$  zu beobachten gilt nach dem Modell von Bayes

$$p(f|g) \sim p(g|f)p(f),$$

wobei  $p(g|f)$  die Wahrscheinlichkeit  $g$  aus  $f$  zu erhalten ist und  $p(f)$  die A-priori Dichte der zu rekonstruierenden Funktion. Über diese können zusätzliche Anforderungen an  $f$  gestellt werden. In der Standardmethode dem EM-Algorithmus wird zunächst darauf verzichtet und  $p(f) = 1$  angenommen.

Die Poissonverteilung ist diskret, sodass es nahe liegt das Problem diskret zu betrachten. Nach Shepp und Vardi gilt,  $\varphi_j$  beschreibt die Anzahl der Ereignisse in Pixel  $j$ , wobei  $\varphi_j$  poissonverteilt ist.  $f_j$  ist das Maß der Aktivität in Pixel  $j$  und damit der Erwartungswert von  $\varphi_j$ .

Gesucht wird also  $f \in \mathbb{R}^m$ . Die gegebene Messung  $g \in \mathbb{R}^n$  ist die Realisierung einer poissonverteilten Zufallsvariablen  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ , wobei  $\gamma_i$  die Anzahl der gemessenen Ereignisse im Detektor  $i$  ist. Die Einträge  $p_{ij}$  aus der Matrix  $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$  sind die Wahrscheinlichkeit Ereignis  $j$  in Detektor  $i$  zu messen. Für die Erwartete Messung gilt  $E(\gamma) = Pf$ . Das stochastische Modell entspricht also dem aus Abschnitt 1.1.

Eigentlich liegen kontinuierliche  $P^*$ ,  $f^*$  und  $g^*$  vor, wobei  $f^*$  die genaue Dichte des Kontrastmittels,  $g^*$  das exakte Signal, bevor es detektiert wird, und  $P^*$  die Abbildung zwischen  $f^*$  und  $g^*$  darstellt. Da aber nur eine endliche Anzahl an Detektoren verfügbar ist, kann  $g^*$  nur diskret gemessen werden, sodass

$$\chi_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in M_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt, wobei  $M_i$  die Region von Detektor  $i$  ist und die Messwerte  $g_i$  dargestellt werden können als Mittelwerte des diskreten  $g$

$$g_i = \int_{M_i} g dx = \int_{\Sigma} \chi_i g dx. \quad (1.1)$$

Es gilt nach wie vor  $g = Pf$ , wobei  $P$  semi-diskret  $P : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist und  $f$  die Approximation von  $f^*$  ist, welche bei der Rekonstruktion berechnet wird [2].

### 1.3.1 Testumgebung

Zur Beurteilung der Verfahren zur SPECT-Rekonstruktion werden sie implementiert und getestet. Dazu wurde eine Testumgebung in Matlab erstellt. Zunächst werden sinnvolle Messdaten benötigt, um Rekonstruktionen durchführen zu können.

Bei der Emissionstomographie geht es um die Detektion von radioaktiven Zerfallsprozessen. Es wird eine Realisierung einer poissonverteilten Zufallsvariablen erstellt, um das Auftreten dieser Ereignisse korrekt zu simulieren. Die

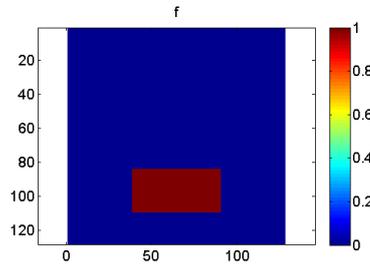


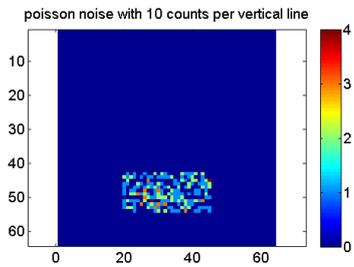
Abbildung 1.2: Testbild: Kasten

Dichte der Verteilung wird durch  $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$  beschrieben. Dementsprechend wird aus einem Ausgangsbild  $f$  des Objektes Poissonrauschen erstellt. Aus diesem verrauschten Bild  $f_{poisson}$  wird dann mit Hilfe der Attenuated Ray Transform die SPECT-Messung simuliert  $g = P f_{poisson}$ .

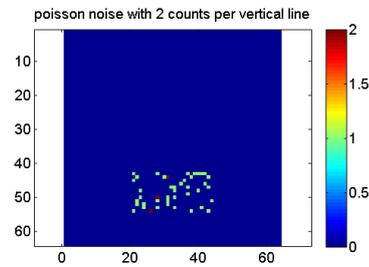
Diese Messung kann nun zum Testen von Rekonstruktionsverfahren verwendet werden. Die Intensität der Strahlung ist unter anderem von der Wahl und Dosierung des Tracers abhängig und besonders in dieser Arbeit wird die Rekonstruktion bei geringer Strahlendosis behandelt. Deshalb müssen Messungen mit unterschiedlicher Intensität erzeugt werden. Dazu wird beim Erzeugen des Rauschens eine Skalierung vorgenommen. Die Matlab-Funktion *imnoise* zum Erzeugen von Rauschen verlangt bereits eine Skalierung des Bildes mit  $10^{-12}$ , damit der Erwartungswert der Poissonverteilung auf dem Wert des jeweiligen Pixels liegt. Zur Beschreibung der Intensität der Messung wird die Anzahl der Ereignisse pro Strahl verwendet. Die ersten Testbilder bestehen aus einem simplen gefüllten Rechteck, da anhand dieses Bildes leicht eine Skalierung für bestimmte Anzahlen von Ereignissen berechnet werden kann. Für einen vertikalen Strahl ergibt sich ein Skalierungsfaktor  $s = \text{Ereignisanzahl} \cdot \frac{\text{Pixelgröße}}{\text{Höhe des Kastens}}$ .

Mit dieser Berechnung wurden „high count“- mit etwa 10 Ereignissen pro Strahl und „low count“-Messungen mit etwa 2 Ereignissen pro Strahl erzeugt. Für komplexere Ausgangsbilder wurde die Skalierung dann anhand dieser Ergebnisse abgeschätzt.

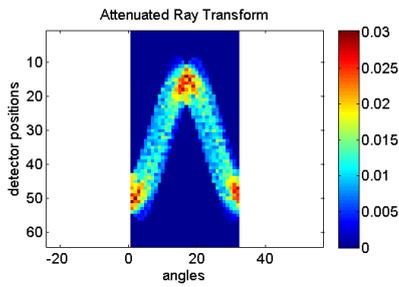
Für die Tests, welche in den Abschnitten 1.3.4 und 2.2 ausgewertet werden, wurden Daten des XCAT-Phantoms verwendet. Phantome sind ein wichtiges Hilfsmittel in der Bildgebung, mit denen unterschiedlichste Tests durchgeführt werden können ohne, dass dafür weitere Patienten Strahlung ausgesetzt wer-



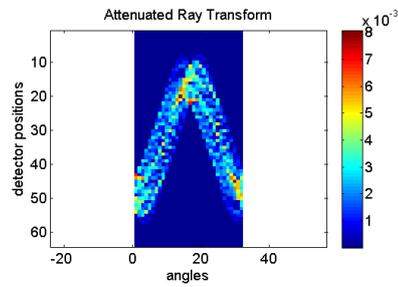
(a) 10 Ereignisse pro Strahl



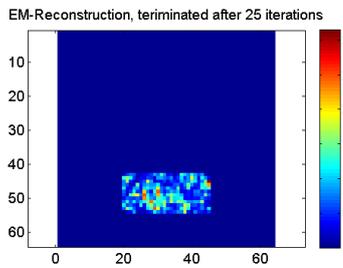
(b) 2 Ereignisse pro Strahl



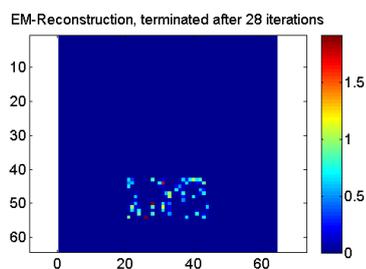
(c) high count-Messung



(d) low count-Messung



(e) high count-Rekonstruktion



(f) low count-Rekonstruktion

Abbildung 1.3: Simulation von Messungen mit Poissonrauschen

den müssen. Außerdem liegt mit einem Phantom eine exakte Grundwahrheit vor, was die Auswertung erleichtert.

Bei dem XCAT-Phantom handelt es sich um ein digitales Hybridphantom. Es

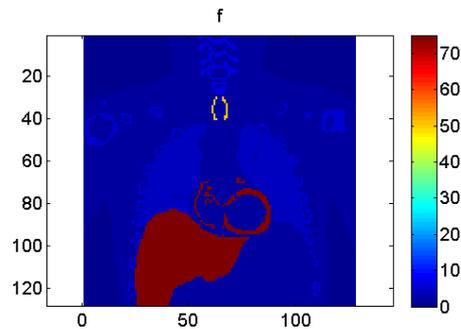


Abbildung 1.4: Thoraxaufnahme mit Herz und Leber (XCAT-Phantom)

basiert sowohl auf segmentierten Daten realer Patienten, als auch auf mathematischen Modellen. Es werden die realen Daten durch NURBS (nonuniform rational B-Splines) und Polygonengitter modelliert. Dadurch ist ein reales und flexibles anatomisches Abbild gegeben, sodass auch Herz und Atembewegungen simuliert werden können [9].

Es können beliebige Regionen des Körpers betrachtet werden. Hier wurde eine frontale Thoraxaufnahme verwendet, bei der Leber und Herz sichtbar sind. Die Daten haben eine Auflösung von  $128 \times 128$  Pixeln und die Messungen wurden an 128 Detektorpunkten und 64 Winkeln durchgeführt.

### 1.3.2 Die Expectation Maximization-Methode

Um rauszufinden für welches  $f$  es am wahrscheinlichsten ist die Messung  $g$  erzeugt zu haben, verwendet man die Maximum-Likelihood-Methode. Dabei maximiert man die Likelihoodfunktion, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt  $g$  zu erhalten, wenn  $f$  gegeben ist

$$\hat{L}(f) = \prod_{i=1}^n \frac{(Pf)_i^{g_i}}{g_i!} e^{-(Pf)_i} \stackrel{!}{=} \max.$$

Sie ergibt sich aus dem Produkt der bedingten Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Detektorelemente  $p(g_i|f) = \frac{(Pf)_i^{g_i}}{g_i!} e^{-(Pf)_i}$ . Denn nach Abschnitt 1.3 sind diese unabhängig identisch poissonverteilt mit dem Parameter  $(Pf)_i$ . Zur einfacheren Optimierung geht man zur Minimierung der negativen log-Likelihood-Funktion über

$$\hat{\ell}(f) = \sum_{i=1}^n (Pf)_i - g_i \ln(Pf)_i \stackrel{!}{=} \min.$$

Bis jetzt wurde die Likelihoodfunktion diskret betrachtet. Eigentlich wird ein kontinuierliches Signal an einer endlichen Zahl Detektoren gemessen. Deshalb ist es sinnvoll von einer diskreten in eine kontinuierliche Formulierung des Problems zu wechseln, sodass mit (1.1) folgt

$$\ell^*(f) = \int_{\Sigma} Pf - g \ln(Pf) d\mu,$$

mit  $\mu = \sum_{i=1}^n \chi_i(x) d\lambda$ , wobei  $\lambda$  das Lebesguemaß ist. Für eine numerische Berechnung der kontinuierlichen Funktion  $\ell^*$  ist eine Diskretisierung nötig. Durch Quadratur mit der Mittelpunktsregel ergibt sich

$$\ell(f) = h \left( \sum_{i=1}^n (Pf)_i - g_i \ln(Pf)_i \right),$$

wobei  $h$  die Größe eines Pixels ist. Damit ergibt sich das folgende Problem

$$\begin{aligned} L(f) &= h e^\top (Pf - g \ln(Pf)) \stackrel{!}{=} \min & (1.2) \\ \text{s.t. } & f \geq 0. \end{aligned}$$

Die Operationen zwischen Vektoren sind elementweise und  $e$  bezeichnet den Einsvektor.

Die Lagrange-Funktion für das Problem (1.2) mit der Nebenbedingung  $f \geq 0$  lautet

$$\mathcal{L}(f, \lambda) = L(f) - \sum_i \lambda_i f_i$$

und es gelten die Karush-Kuhn-Tucker(KKT)-Bedingungen:

1. Die Stationäre Bedingung (1.3), dass der Gradient der Lagrange-Funktion verschwindet und
2. die Komplementaritätsbedingung (1.4) der Multiplikatoren  $\lambda_i$ , die genau dann 0 sind, wenn die Nebenbedingung nicht aktiv ist

$$\nabla \mathcal{L}(f, \lambda) = hP^\top \left( e - \frac{g}{Pf} \right) - \lambda = 0 \quad (1.3)$$

$$\lambda_i f_i = 0 \quad \forall i. \quad (1.4)$$

Durch Auflösen von (1.3) nach  $\lambda$  ergibt sich

$$\lambda = hP^\top \left( e - \frac{g}{Pf} \right). \quad (1.5)$$

Damit wurden die Multiplikatoren eindeutig bestimmt. Durch Einsetzen der Multiplikatoren in die Komplementaritätsbedingung (1.4) folgt

$$0 = f \cdot hP^\top \left( e - \frac{g}{Pf} \right)$$

und lässt sich nach  $f$  umformen

$$\begin{aligned} f \cdot hP^\top e &= f \cdot hP^\top \frac{g}{Pf} \\ \Leftrightarrow f &= \frac{f \cdot P^\top \frac{g}{Pf}}{P^\top e}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich eine Fixpunktiteration

$$f^{k+1} = \frac{f^k \cdot P^\top \frac{g}{Pf^k}}{P^\top e}, \quad (1.6)$$

die laut [6] gegen einen Minimierer der Zielfunktion  $L(f)$ , also den Maximierer der Maximum-Likelihood-Funktion konvergiert.

Da  $L(f)$  konvex ist, ist jedes Minimum ein globales Minimum.

**Satz 1.**

Für die Zielfunktion  $L(f) = he^\top (Pf - g \cdot \ln(Pf))$  gilt, sie ist konvex, falls  $Pv \neq 0$  für alle  $v \in \mathbb{R}^m$ ,  $g \geq 0$  elementweise und  $f \neq 0$ .

*Beweis.* Es wird gezeigt, dass die Hessematrix von  $L(f)$ , bezeichnet durch  $H_L(f)$ , symmetrisch positiv semidefinit ist. Da  $h > 0$ , gilt hier ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit  $h = 1$ .

Für alle  $v \neq 0, v \in \mathbb{R}^m$  gilt

$$w := Pv = \left( \sum_{j=1}^m p_{ij} v_j \right)_i \neq 0.$$

Dann gilt für  $H_L(f)$

$$\begin{aligned} v^\top H_L(f) v &= v^\top P^\top \left[ \frac{g}{(Pf)^2} \right] Pv \\ &= w^\top \left[ \frac{g}{(Pf)^2} \right] w \\ &= \sum_{i=1}^m w_i^2 \frac{g_i}{(Pf)_i^2} \geq 0, \quad \text{falls } g \geq 0 \text{ und } f \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow H_L(f)$  ist positiv semidefinit für alle  $P$  mit  $Pv \neq 0$  für alle  $v \neq 0, v \in \mathbb{R}^m$ ,  
 $g \geq 0$  und  $f \neq 0$   
 $\Rightarrow L(f)$  ist konvex

□

Aus der Fixpunktiteration (1.6) ergibt sich der EM-Algorithmus:

---

**Algorithmus 1** EM Methode

---

```

function EM( $g, f^0$ )
   $f^k \leftarrow f^0$ 
  while not terminated do
     $f^{k+1} \leftarrow \frac{f^k \cdot P^\top \frac{g}{Pf^k}}{P^\top e}$ ;
  end while
   $f \leftarrow f^{k+1}$ 
  return  $f$ 
end function

```

---

Wobei *not terminated* bedeutet, dass die Iteration solange fortgesetzt wird bis sie durch die im Folgenden erläuterten Abbruchbedingungen beendet wird.

### 1.3.3 Abbruchbedingungen

Es werden die folgenden Abbruchbedingungen aus [5] verwendet:

$$\tau > 0$$
$$f(x^{k-1}) - f(x^k) \leq \tau(1 + |f(x^k)|) \quad (\text{K1})$$

$$\|x^{k-1} - x^k\| \leq \sqrt{\tau}(1 + \|x^k\|) \quad (\text{K2})$$

$$\|\nabla f(x^k)\| \leq \sqrt[3]{\tau}(1 + |f(x^k)|) \quad (\text{K3})$$

$$\|\nabla f(x^k)\| \leq \epsilon \quad (\text{K4})$$

$$k \geq k_{max} \quad (\text{K5})$$

$$(K1 \wedge K2 \wedge K3) \vee K4 \vee K5$$

Falls der Fortschritt pro Iteration hinreichend klein ist, wird die Iteration durch **K1** und **K2** beendet, **K3** und **K4** sorgen außerdem für einen Abbruch bei Erfüllung der stationären Bedingung. **K3** verhindert eine Endlosschleife, falls die übrigen Bedingungen nicht erfüllt werden können, oder um die Rechenzeit zu beschränken.

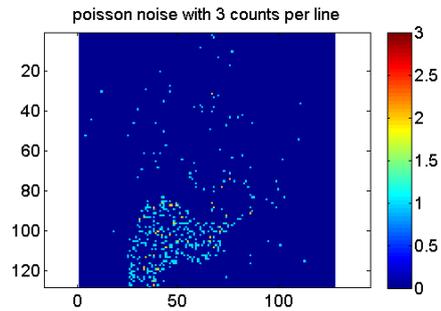
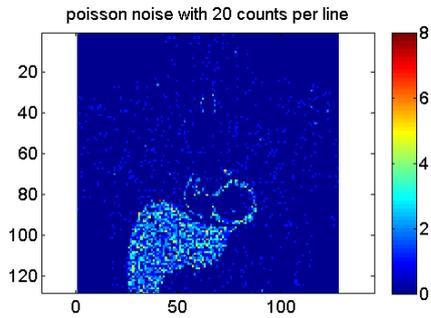
In den Tests wurde die Iteration mit  $\tau \leq 10^{-5}$  ausschließlich auf Grund von Bedingung **K5** abgebrochen. Alternativ könnte auch auf die Abbruchbedingungen verzichtet und die Iteration bei Erreichen der maximalen Iterationszahl terminiert werden. Ein in der Praxis häufig verwendetes Vorgehen, das hier nicht weiter verfolgt wird, ist ein Abbruch „von Hand“ bei gewünschter Glattheit.

### 1.3.4 Ergebnisse der EM-Methode

Der EM-Algorithmus wurde in Matlab implementiert und mit der in Abschnitt 1.3.1 vorgestellten Testumgebung getestet. Um glattere Ergebnisse zu erhalten wurde mit einem Abbruchparameter  $\tau = 10^{-4}$  gerechnet.

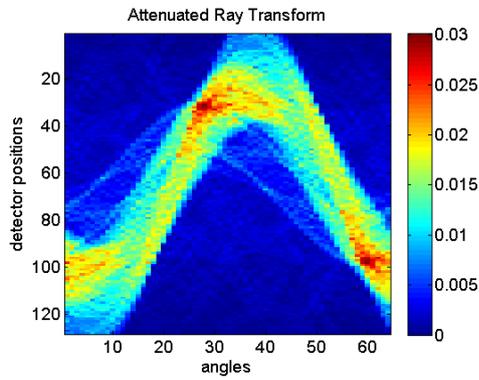
Abbildung 1.5 zeigt in der ersten Zeile die verrauschten Daten, darunter sind die jeweiligen Messungen und in der dritten Zeile die Rekonstruktionen abgebildet.

Für die high count-Messung 1.5(c) werden noch relativ glatte Ergebnisse erzielt 1.5(e) auch die Ränder der Organe sind zu erkennen. Auf Grund der Abbruchbedingungen wurde die Iteration nach 25 Iterationen beendet. Bei der Rekonstruktion der low count-Messung 1.5(d) lässt sich keine akzeptable Glattheit erreichen 1.5(f), sodass zusammenhängenden Strukturen nur schwer

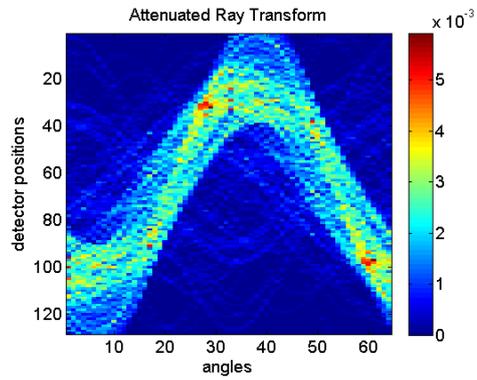


(a) Original mit hoher Strahlendosis ( $\approx 20$  Ereignisse pro Strahl)

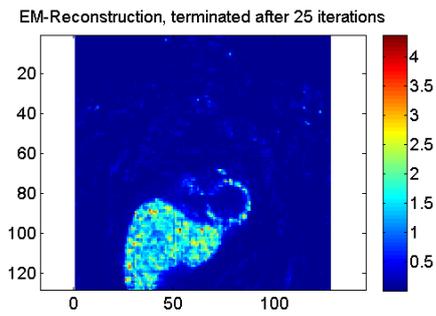
(b) Original mit niedriger Strahlendosis ( $\approx 3$  Ereignisse pro Strahl)



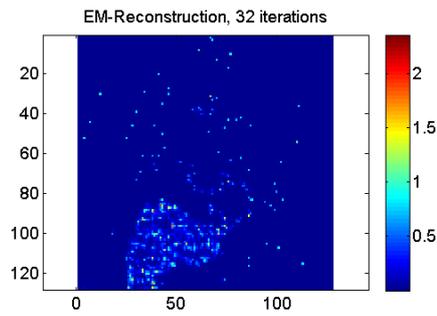
(c) high count-Messung



(d) low count-Messung



(e) high count-Rekonstruktion



(f) low count-Rekonstruktion

Abbildung 1.5: EM-Rekonstruktionen von Messungen bei verschiedenen Strahlendosen

erkennbar sind. Die Rekonstruktion nähert sich stark dem verrauschten Originalbild 1.5(b). Der Grund dafür ist, dass der Algorithmus so konstruiert ist, dass es möglichst wahrscheinlich ist, dass das rekonstruierte Bild die Messung erzeugt hat, welche offensichtlich für das Originalbild sehr hoch ist. Eine Glätte wird nicht gefordert.

Für Messungen mit geringer Ereigniszahl erweist sich der EM-Algorithmus als problematisch. Denn um Aussagen über die Funktionalität von bestimmten Organen treffen zu können, sollten diese als zusammenhängende Strukturen identifizierbar sein. Dies ist bei verringerter Strahlendosis für die Rekonstruktion mit dem EM-Algorithmus nicht gegeben. Darüber hinaus ist auch ein Abbruch der Iteration „von Hand“ kritisch zu betrachten, da er nicht automatisierbar und eher willkürlich ist.

## 2 EM-TV Rekonstruktion

Wie zuvor gezeigt, liefert der EM-Algorithmus stark verrauschte Ergebnisse, wenn zum Beispiel die Strahlendosis gering ist oder ein Kontrastmittel mit kurzer Halbwertszeit verwendet wird.

Zur Verbesserung der Bildqualität der Rekonstruktionen wird der EM-Algorithmus modifiziert. Um zusätzlich Glattheitsanforderung zu berücksichtigen, wird nun die A-priori-Wahrscheinlichkeit  $p(f)$  genutzt. Meist werden für dafür Gibbs-Funktionen  $p(f) \sim e^{-\alpha R(f)}$  verwendet [8], mit  $\alpha > 0$  und einem Regularisierungsfunktional  $R(f)$ .

Eine Regularisierung, die nicht-glatte Lösungen bestraft, aber trotzdem Kanten erhält, ist die Totale Variation. Die meist verwendete Definition  $|f|_{BV} = \int_{\Omega} \|\nabla f\|$  erweist sich jedoch als problematisch, da Funktionen mit Kanten nicht zwangsläufig stetig und differenzierbar sind. Bei Approximationen wie  $|f|_{BV} = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla f|^2 + \varepsilon}$  soll  $\varepsilon$  so klein wie möglich sein, was wieder dazu führt, dass keine Differenzierbarkeit mehr vorliegt. Ein zu großes  $\varepsilon$  sorgt für einen zu großen Fehler bei der Berechnung der Totalen Variation. Deshalb wird hier die folgende Formulierung der Totalen Variation verwendet

$$|f|_{BV} = \sup_{\|z\|_{\infty} \leq 1; z \in C_0^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n)} \int_{\Omega} f \operatorname{div} z.$$

Analog zum Abschnitt 1.3 erhält man aus

$$p(f|g) \sim p(g|f)p(f)$$

$$\hat{L}(f) = \prod_{i=1}^n \frac{(Pf)_i^{g_i}}{g_i!} e^{-(Pf)_i} e^{-\alpha |f|_{BV}}$$

das Problem

$$L(f) = \int_{\Sigma} Pf - g \cdot \ln(Pf) d\mu + \alpha |f|_{BV} \stackrel{!}{=} \min$$

s.t.  $f \geq 0$ .

Es ergibt sich das folgende Problem bei dem Infimum und Supremum vertauscht werden können

$$\inf_{f \geq 0} \sup_{\|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \int_\Sigma P f - g \ln(P f) d\mu + \alpha \int_\Omega f \operatorname{div} z \right\}$$

$$\sup_{\|z\|_\infty \leq 1} \inf_{f \geq 0} \left\{ \int_\Sigma P f - g \ln(P f) d\mu + \alpha \int_\Omega f \operatorname{div} z \right\}, \quad (2.1)$$

mit  $f \in BV(\Omega)$ , dem Raum der Funktionen von beschränkter Variation [8].

## 2.1 Diskrete Herleitung

Im Gegensatz zu [8] wird hier der EM-TV-Algorithmus diskret hergeleitet.  $D$  ist ein durch finite Differenzen diskretisierter linearer Differentialoperator mit der Schrittweite  $h$

$$f \in \mathbb{R}^{N \times M}, \quad h \in \mathbb{R}^2$$

$$(\nabla f)_{l,j} = ((\nabla f)_{l,j}^1, (\nabla f)_{l,j}^2)$$

$$(\nabla f)_{l,j}^1 = h_1^{-1} \begin{cases} f_{l,j+1} - f_{l,j} & j < M \\ 0 & j = M \end{cases}$$

$$(\nabla f)_{l,j}^2 = h_2^{-1} \begin{cases} f_{l+1,j} - f_{l,j} & l < N \\ 0 & l = N \end{cases}.$$

Ab jetzt liegt  $f$  als Vektor aus dem  $\mathbb{R}^m$  ( $m = NM$ ) vor und  $D$  ist eine Matrix aus dem  $\mathbb{R}^{2m \times m}$ , sodass gilt

$$\nabla f = Df$$

$$(\nabla f)_i = ((\nabla f)_{i_1}, (\nabla f)_{i_2}), \quad (2.2)$$

$$i_k = l + (N - j) + NM(k - 1) \text{ mit } k \in \{1, 2\}.$$

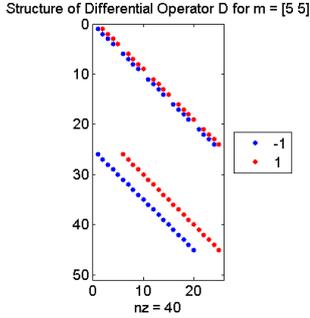
Da der negative Divergenzoperator der adjungierte Operator zum Differentialoperator ist [3] und für

$$D \in \mathbb{R}^{2m \times m}$$

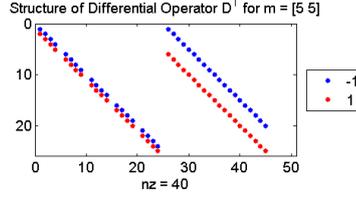
und für alle  $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^{2m}$

$$\langle v, Du \rangle = v^\top Du = (D^\top v)^\top u = \langle D^\top v, u \rangle$$

gilt, ist  $D^\top$  der entsprechende diskrete Divergenzoperator. Damit ergibt sich



(a) Differentialoperator für  $N = M = 5$ ,  $h = 1$



(b) Divergenzoperator

für die totale Variation

$$|f|_{BV} = \max_{\|z\|_\infty \leq 1} f^\top D^\top z$$

und für das Problem (2.1) die folgende Diskretisierung

$$\max_{\|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \min_{f \geq 0} \left\{ h_M e^\top (Pf - g \ln(Pf)) + \alpha h_R f^\top D^\top z \right\} \right\}$$

mit  $h_M, h_R \in \mathbb{R}_{>0}$ ,

wobei wieder die Mittelpunktsregel mit  $h_M$  als Schrittweite in der Messung und  $h_R$  als Schrittweite in der Rekonstruktion verwendet wird. Es gelten wieder die KKT-Bedingungen, die Stationäre Bedingung  $\nabla \mathcal{L}(f, \lambda) = 0$  (2.3) und die Komplementaritätsbedingung (2.4), für das Problem in  $f$

$$h_M P^\top \left( e - \frac{g}{Pf} \right) + \alpha h_R D^\top z - \lambda = 0 \quad (2.3)$$

$$\lambda_i f_i = 0 \quad \forall i. \quad (2.4)$$

Durch Auflösen von (2.3) nach  $\lambda$  und sind die Multiplikatoren eindeutig bestimmt und können in die Komplementaritätsbedingung eingesetzt werden

$$\begin{aligned} & (P^\top \left( e - \frac{g}{Pf} \right) + \alpha \frac{h_R}{h_M} D^\top z)_i f_i = 0 \\ \Leftrightarrow & (P^\top e)_i f_i - (P^\top \frac{g}{Pf})_i f_i + \alpha \frac{h_R}{h_M} (D^\top z)_i f_i = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2 EM-TV Rekonstruktion

---

Zur Vereinfachung gilt im Folgenden  $\alpha := \alpha \frac{h_R}{h_M}$ . (2.5) lässt sich zu der folgenden Iterationsvorschrift umformen

$$f^{k+1} - f^k \frac{1}{P^\top e} \cdot \frac{P^\top g}{P f^k} + \alpha f^k \frac{D^\top z}{P^\top e} = 0,$$

die diskret, analog zu [8], in zwei Teile gesplittet wird

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{k+\frac{1}{2}} = f^k \frac{1}{P^\top e} \cdot \frac{P^\top g}{P f^k} \quad (\text{EM-Schritt}) \\ f^{k+1} = f^{k+\frac{1}{2}} - \alpha f^k \frac{D^\top z}{P^\top e} \quad (\text{TV-Schritt}) \end{array} \right\}.$$

Der TV-Schritt entspricht der Optimalitätsbedingung

$$\Leftrightarrow \frac{f^{k+1} - f^{k+\frac{1}{2}}}{f^k} + \alpha \frac{D^\top z}{P^\top e} = 0$$

für die Minimierung über  $f^{k+1}$  des Problems

$$\max_{z; \|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \min_{f^{k+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{f^{k+1} - f^{k+\frac{1}{2}}}{\sqrt{f^k}} \right\|_2^2 + \alpha f^{k+1 \top} \frac{D^\top z}{P^\top e} \right\} \right\}.$$

Für ein bekanntes optimales  $z$  kann ein optimales  $f^{k+1}$  berechnet und der innere Teil des Problems minimiert werden. Wird der TV-Schritt in das Problem

eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \max_{z; \|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{-\alpha f^k \frac{D^\top z}{P^\top e}}{\sqrt{f^k}} \right\|_2^2 + \alpha \left( f^{k+\frac{1}{2}} - \alpha f^k \frac{D^\top z}{P^\top e} \right)^\top \frac{D^\top z}{P^\top e} \right\} \\
&= \max_{z; \|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \frac{1}{2} \left\| -\alpha \begin{bmatrix} f^k \\ P^\top e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{f^k} \end{bmatrix} D^\top z \right\|_2^2 + \alpha \left( f^{k+\frac{1}{2}} \right)^\top \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix} D^\top z \right. \\
&\quad \left. - \alpha^2 \left( \begin{bmatrix} f^k \\ P^\top e \end{bmatrix} D^\top z \right)^\top \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix} D^\top z \right\} \\
&= \max_{z; \|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 z^\top D[f^k] \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix}^2 D^\top z + \alpha \left( f^{k+\frac{1}{2}} \right)^\top \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix} D^\top z \right. \\
&\quad \left. - \alpha^2 z^\top D[f^k] \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix}^2 D^\top z \right\},
\end{aligned}$$

welches nur noch von  $z$  abhängig ist.

Durch Multiplikation mit  $-2$  und die Addition von  $(f^{k+\frac{1}{2}})^\top \left[ \frac{1}{\sqrt{f^k}} \right]^2 f^{k+\frac{1}{2}}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \min_{z; \|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \alpha^2 z^\top D[f^k] \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix}^2 D^\top z - 2\alpha \left( f^{k+\frac{1}{2}} \right)^\top \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix} D^\top z \right. \\
&\quad \left. + \left( f^{k+\frac{1}{2}} \right)^\top \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{f^k} \end{bmatrix}^2 f^{k+\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

und somit das folgende Optimierungsproblem mit Ungleichheitsrestriktionen

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \min_z \left\{ \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{f^k} \end{bmatrix} f^{k+\frac{1}{2}} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{f^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ P^\top e \end{bmatrix} D^\top z \right\|_2^2 \right\} \\
& \text{s.t. } \|z\|_\infty - 1 \leq 0.
\end{aligned}$$

Für dieses Problem in  $z$  wird nun analog zu Chambolle [3] ein semi-implizites Gradientenabstiegsverfahren verwendet.

Mit (2.2) gilt  $z_i = (z_{i_1}, z_{i_2})$ . Deshalb entspricht  $\|z\|_\infty$  der induzierten Matrixnorm also der Zeilensummennorm und es gilt

$$1 \geq \|z\|_\infty = \max_i (|z_{i_1}| + |z_{i_2}|) \geq \max_i \sqrt{z_{i_1}^2 + z_{i_2}^2}.$$

Wird auf die Abschätzung nach oben verzichtet, gilt nach dem Quadrieren

$$1 \geq z_{i_1}^2 + z_{i_2}^2 \quad \text{für alle } i,$$

wobei sich nach Definition

$$1 \geq |z_i|^2$$

ergibt. Die Nebenbedingung ist also äquivalent zu  $|z_i|^2 - 1 \leq 0$ , mit  $|z_i| = \sqrt{z_{i_1}^2 + z_{i_2}^2}$ . Die Lagrangefunktion für das Problem lautet somit

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = \left\| \left[ \frac{1}{\sqrt{f^k}} \right] f^{k+\frac{1}{2}} - \alpha \left[ \sqrt{f^k} \right] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] D^\top z \right\|_2^2 - \sum_i \lambda_i (|z_i|^2 - 1)$$

und erneut werden die KKT-Bedingungen für das Problem genutzt:

Es gelten die Stationäre Bedingung

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{L}(z, \lambda) &= 0 \\ - \left( 2\alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z - 2\alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i + 2\lambda_i |z_i| &= 0 \\ \Leftrightarrow \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i &= \lambda_i |z_i| \end{aligned}$$

und die Komplementaritätsbedingung

$$\begin{aligned} \lambda_i (|z_i|^2 - 1) &= 0 \\ (\lambda_i > 0 \wedge |z_i| = 1) \vee (\lambda_i = 0 \wedge |z_i| < 1). \end{aligned}$$

$\lambda$  ist immer dann 0, wenn die Nebenbedingung nicht aktiv ist. Also gilt entweder

$$\begin{aligned} \lambda_i = 0 &= \left| \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i \right| \\ \text{oder } \lambda_i \cdot 1 &= \left| \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i \right|. \end{aligned}$$

Somit sind die Multiplikatoren eindeutig durch  $\lambda_i = \left| \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i \right|$  bestimmt und der Gradient der Lagrangefunktion kann als Abstiegsrichtung verwendet werden. Gradientenabstieg mit  $\tau > 0$ ,  $z^0 = 0$ :

$$\begin{aligned} z_i^{n+1} &= z_i^n + \tau (-\nabla \mathcal{L}(z, \lambda)) \\ &= z_i^n + \tau \left( \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z^n - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i \right. \\ &\quad \left. - \left| \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z^n - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i \right| z_i^{n+1} \right) \\ \Leftrightarrow z_i^{n+1} &= \frac{z_i^n + \tau \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z^n - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i}{1 + \tau \left| \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z^n - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i \right|} \end{aligned}$$

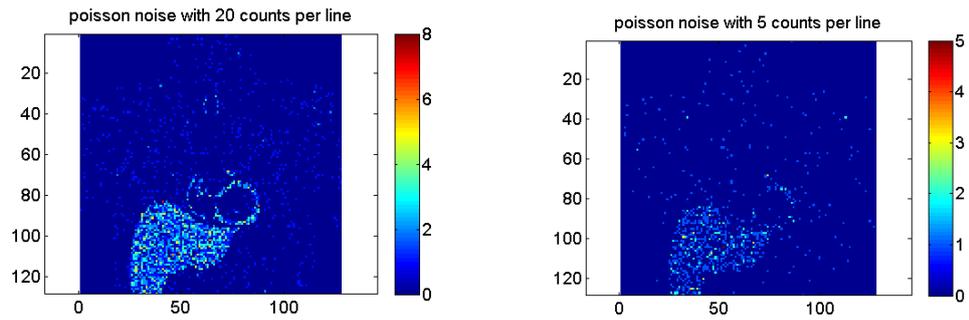
Damit wurde ein Verfahren zur Bestimmung eines optimalen  $z$  gefunden, welches genutzt wird um ein optimales  $f$  zu bestimmen. Ein Nachteil jedoch ist die relativ lange Rechenzeit des Verfahrens. Um die Stabilität und Konvergenz des Algorithmus zu sichern, wird wie in [8] empfohlen,  $\tau < \frac{P^\top e}{4\alpha f^k}$  gewählt.

## 2.2 Ergebnisse

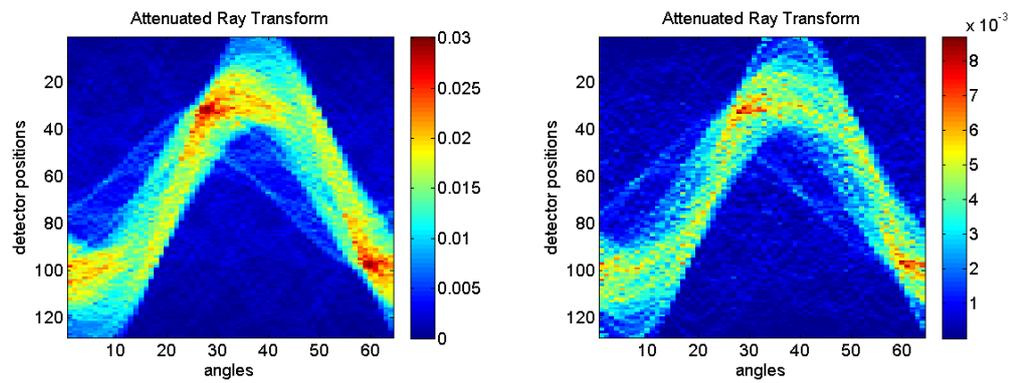
Der EM-TV-Algorithmus wurde ebenfalls in Matlab implementiert und mit der in Abschnitt 1.3.1 vorgestellten Testumgebung getestet. Die Ergebnisse wurden dann mit denen des EM-Algorithmus verglichen.

Es wurden Tests mit 500 bis 2000 Iterationen für die Bestimmung von  $z$  durchgeführt, wodurch die Rechenzeit für den EM-TV-Algorithmus relativ lang wurde. Es wurde mit einer vorgegeben Anzahl an Gesamtiterationen als einzige Abbruchbedingung gerechnet. Die Rechenzeit des EM-Algorithmus wurde durch die Überprüfung der Abbruchbedingungen erhöht.

Die Rekonstruktion der high count-Messung mit dem EM-TV 2.2(a) mit einem Parameter von  $\alpha = 9 \cdot 10^{-1}$  zeigen relativ deutliche Kanten und sehr glatte zusammenhängende Strukturen. Dies gilt sowohl im Bereich der Leber als auch des Herzens, welches im Originalbild 1.4 lediglich als schmaler Umriss zu sehen ist und deshalb dort weniger Zerfallsprozesse gemessen werden



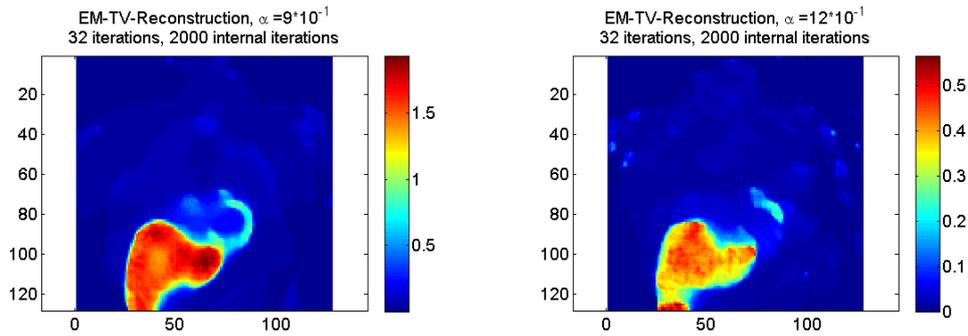
(c) Original mit hoher Strahlendosis ( $\approx 20$  Ereignisse pro Strahl)      (d) Original mit niedriger Strahlendosis ( $\approx 5$  Ereignisse pro Strahl)



(e) high count-Messung

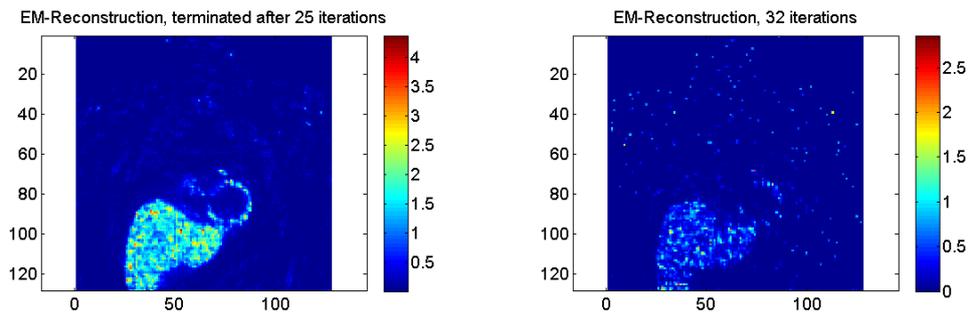
(f) low count-Messung

Abbildung 2.1: Original und Messungen mit verschiedenen Strahlendosen



(a) high count-EM-TV-Rekonstruktion

(b) low count-EM-TV-Rekonstruktion



(c) high count-EM-Rekonstruktion

(d) low count-EM-Rekonstruktion

Abbildung 2.2: EM-TV- und EM-Rekonstruktionen im Vergleich

---

**Algorithmus 2** EM-TV Methode

---

```

function EM-TV( $g, f^0$ )
   $f^k \leftarrow f^0$ 
   $z^0 \leftarrow 0$ 
  while not terminated do
     $f^{k+\frac{1}{2}} \leftarrow f^k \frac{1}{P^\top e} \cdot \frac{P^\top g}{P f^k}$  ▷ EM-Schritt
    while not terminated do
       $z_i^{n+1} \leftarrow \frac{z_i^n + \tau \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z^n - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i}{1 + \tau \left| \left( \alpha^2 D[f^k] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right]^2 D^\top z^n - \alpha D \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] f^{k+\frac{1}{2}} \right)_i \right|}$  ▷ Gradientenabstieg
    end while
     $z \leftarrow z^{n+1}$ 
     $f^{k+1} \leftarrow f^{k+\frac{1}{2}} - \alpha f^k \frac{D^\top z}{P^\top e}$  ▷ TV-Schritt
  end while
   $f \leftarrow f^{k+1}$ 
  return  $f$ 
end function

```

---

können. Der EM-Algorithmus liefert für diese Messung zwar ebenfalls relativ glatte Ergebnisse mit Kanten. Rauschen ist aber durchaus noch sichtbar 2.2(c). Wie bereits in Abschnitt 1.3.4 erwähnt, wurde die Iteration auf Grund der Abbruchbedingungen K1, K2 und K3 nach 25 Iterationen abgebrochen. Während der EM für Messungen mit geringer Ereigniszahl das verrauschte Original rekonstruiert 2.2(d), gehen bei EM-TV auf Grund der wenigen Zerfälle in gewissen Bereichen (Herz) zwar Details verloren und die Kanten sind etwas weniger deutlich (Leber), die Rekonstruktion insgesamt ist aber auch hier relativ glatt 2.2(b). Diese Rekonstruktion wurde mit einem Regularisierungsparameter von  $\alpha = 12 \cdot 10^{-1}$ , 32 Gesamtiterationen und 2000 internen Iterationen zur Berechnung des optimalen  $z$  für den TV-Schritt durchgeführt.

## 2.3 Gedämpfter EM-TV

Um die Konvergenz zu verbessern wird in [8] der TV-Schritt gedämpft. Dies ist auch in der diskreten Herleitung möglich. Mit einem Parameter  $w_k \in [0, 1]$  wird das letzte Ergebnis der Gesamtiteration mit dem Ergebnis des EM-Schrittes

verbunden, sodass für den TV-Schritt nun gilt

$$f^{k+1} = (1 - w_k)f^k + w_k f^{k+\frac{1}{2}} - w_k \alpha f^k \frac{D^\top z}{P^\top e}.$$

Dieser ist analog zu Abschnitt 2.1 die Optimalitätsbedingung für ein Problem in  $f^{k+1}$  und  $z$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{f^{k+1} - w_k f^{k+\frac{1}{2}} - (1 - w_k)f^k}{f^k} + w_k \alpha \frac{D^\top z}{P^\top e}$$

$$\max_{z; \|z\|_\infty \leq 1} \left\{ \min_{f^{k+1}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| \frac{f^{k+1} - w_k f^{k+\frac{1}{2}} - (1 - w_k)f^k}{\sqrt{f^k}} \right\|_2^2 + w_k \alpha f^{k+1 \top} \frac{D^\top z}{P^\top e} \right\} \right\}.$$

Durch einsetzen des TV-Schrittes in das Problem, umformen und elementweise Multiplikation mit  $-2$  und Addition von  $\left\| \left( (1 - w_k)f^k + w_k f^{k+\frac{1}{2}} \right) \left[ \frac{1}{\sqrt{f^k}} \right] \right\|_2^2$  erhält man

$$\min_z \left\{ \left\| \left[ \frac{1}{\sqrt{f^k}} \right] \left( (1 - w_k)f^k + w_k f^{k+\frac{1}{2}} \right) - w_k \alpha \left[ \sqrt{f^k} \right] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] D^\top z \right\|_2^2 \right\}$$

s.t.  $\|z\|_\infty - 1 \leq 0.$

Der entsprechende Gradientenabstieg nach Chambolle lautet dann

$$z_i^{n+1} = \frac{z_i^n + \tau \left( \nabla \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{f^k}} \right] \left( (1 - w_k)f^k + w_k f^{k+\frac{1}{2}} \right) - w_k \alpha \left[ \sqrt{f^k} \right] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] D^\top z \right) \right)_i}{1 + \tau \left| \left( \nabla \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{f^k}} \right] \left( (1 - w_k)f^k + w_k f^{k+\frac{1}{2}} \right) - w_k \alpha \left[ \sqrt{f^k} \right] \left[ \frac{1}{P^\top e} \right] D^\top z \right) \right)_i \right|}.$$

In [8] wird nicht auf die genaue Wahl von  $w_k$  eingegangen und auch nicht wie sich der Parameter während der Iteration verändert. Außerdem wurden keine Rekonstruktionsergebnisse gezeigt. Die Ergebnisse einiger weniger Tests werden in Abbildung 2.3 gezeigt.

Zunächst werden die Rekonstruktionen nach 20 Iterationen des normalen und des mit konstantem  $w_k = 0.9$  gedämpften EM-TV-Algorithmus verglichen. Es wird der gleiche Regularisierungsparameter  $\alpha = 0.9$  verwendet. Es wird deutlich, dass die Rekonstruktion mit dem gedämpften EM-TV nach 20 Iterationen 2.3(a) glatter ist als die des normalen EM-TV 2.3(b). Diese Glattheit wird mit

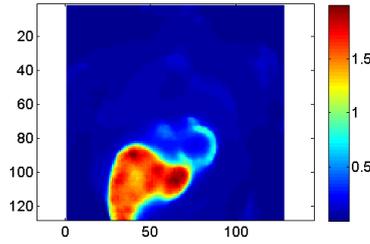
## 2 EM-TV Rekonstruktion

---

dem normalen EM-TV erst nach weiteren Iterationen erreicht 2.3(d). Wird die Dämpfung zu stark z.B  $w_k = 0.2$  gewählt, geht die Schärfe der Kanten verloren 2.3(c).

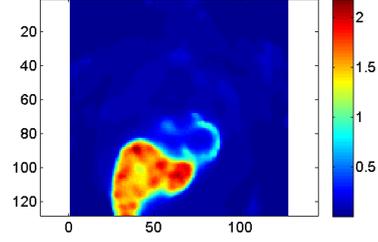
Mit geeignetem Parameter  $w_k$  kann also die Konvergenz des EM-TV-Algorithmus aus Abschnitt 2 noch verbessert werden.

damped EM-TV-Reconstruction,  $\alpha = 9 \cdot 10^{-1}$ ,  $w_k = 0.9$   
20 iterations, 2000 internal iterations



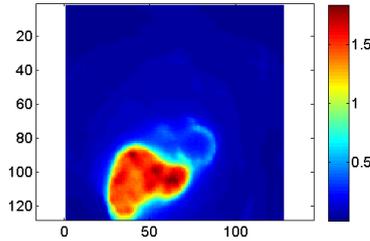
(a) gedämpfter EM-TV nach 20 Iterationen mit  $w_k = 0.9$

EM-TV-Reconstruction,  $\alpha = 9 \cdot 10^{-1}$   
20 iterations, 2000 internal iterations



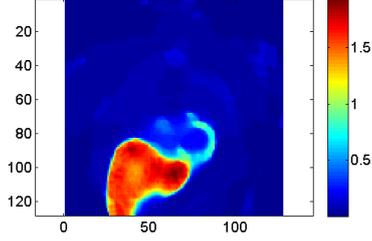
(b) EM-TV nach 20 Iterationen

damped EM-TV-Reconstruction,  $\alpha = 9 \cdot 10^{-1}$ ,  $w_k = 0.2$   
32 iterations, 2000 internal iterations



(c) gedämpfter EM-TV nach 32 Iterationen mit  $w_k = 0.2$

EM-TV-Reconstruction,  $\alpha = 9 \cdot 10^{-1}$   
32 iterations, 2000 internal iterations



(d) EM-TV nach 32 Iterationen

Abbildung 2.3: Vergleich der Rekonstruktionen einer high count-Messung mit und ohne Dämpfung

### 3 Diskussion

Die Ergebnisse zeigen, dass besonders bei geringer Anzahl von Ereignissen, der EM-TV-Algorithmus besser rekonstruiert als der reine EM-Algorithmus insofern, dass bei EM nur auf die Exaktheit der Rekonstruktion geachtet wird und so möglichst genau das verrauschte Bild rekonstruiert wird. Durch die Regularisierung mit Totaler Variation wird erreicht, dass eine Glattheit des Ergebnisses miteinbezogen wird, sodass zusammenhängende Strukturen sichtbar werden, so wie sie auch wirklich im Körper vorliegen. Um auch bei sehr geringen Ereigniszahlen noch glatte Ergebnisse zu erhalten muss  $\alpha$  entsprechend groß gewählt werden, sodass mehr Gewicht auf der Regularisierung als auf der Rekonstruktion liegt, sodass die Kanten weniger deutlich werden.

Probleme bei EM-TV ergeben sich dadurch, dass ein großer Regularisierungsparameter  $\alpha$  zu einer geringen Schrittweite  $\tau < \frac{P^\top e}{4\alpha f^k}$  führt. Außerdem benötigt die Berechnung des optimalen  $z$  benötigt viel Rechenzeit.

Die Konvergenz des Algorithmus kann, wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, bei geeigneter Parameterwahl mit einer Dämpfung des TV-Schrittes verbessert werden.

Die Idee Totale Variation als Regularisierung zu verwenden ist im Vergleich zum EM-Algorithmus durchaus positiv zu bewerten. Möglicherweise sollte nach einer Alternative zu der langsamen Berechnung des optimalen  $z$  für den TV-Schritt gesucht werden.



# Literaturverzeichnis

- [1] BAI, C. ; SHAO, L. ; DA SILVA, A. ; ZHAO, Z. : A Generalized Model for the Conversion From CT Numbers to Linear Attenuation Coefficients. In: *IEEE Transactions on Nuclear Science* 50 (2003), S. 1510–1515
- [2] BRUNE, C. : *4D Imaging in Tomography and Optical Nanoscopy*, University of Muenster, Germany, Diss., July 2010. /2010/Bru10. – Reviewer: Prof. Dr. Martin Burger, Prof. Dr. Stanley Osher
- [3] CHAMBOLLE, A. : An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. In: *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 20 (2004), S. 89–97
- [4] <http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:SiemensEcamDuet.JPG&filetimestamp=20061201164229>
- [5] GILL, P. ; MURRAY, W. ; WRIGHT, M. ; GILL, P. (Hrsg.) ; MURRAY, W. (Hrsg.) ; WRIGHT, M. (Hrsg.): *Practical Optimization*. Emerald Group Publishing Limited, 1982
- [6] NATTERER, F. ; WÜBBELING, F. ; NATTERER, F. (Hrsg.) ; WÜBBELING, F. (Hrsg.): *Mathematical methods in image reconstruction*. Siam, 2001. – 44–46,118–119 S.
- [7] RIEDER, A. ; RIEDER, A. (Hrsg.): *Keine Probleme mit inversen Problemen*. Vieweg, 2003
- [8] SAWATZKY, A. ; BRUNE, C. ; WÜBBELING, F. ; KÖSTERS, T. ; SCHÄFERS, K. ; BURGER, M. : Accurate EM-TV algorithm in PET with low SNR. In: *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2008. NSS'08. IEEE* IEEE, 2008, S. 5133–5137

- [9] SEGARS, W. P. ; STURGEON, G. ; MENDONCA, S. ; GRIMES, J. ; TSUI, B. M. W.: 4D XCAT phantom for multimodality imaging research. In: *Medical Physics* 37 (2010), S. 4902–4915
- [10] UTSUNOMIYA, D. ; NAKAURA, T. ; HONDA, T. ; SHIRAISHI, S. ; TOMIGUCHI, S. ; KAWANAKA, K. ; MOROSHITA, S. ; AWAI, K. ; OGAWA, H. ; YAMASHITA, Y. : Object-specific Attenuation Correction at SPECT/CT in Thorax: Optimization of Respiratory Protocol for Image Registration. In: *Radiology* 237 (2005), S. 662–669
- [11] YANG, M. ; VESE, L. A.: Expectation Maximization and Total Variation Based Model for Computet Tomography Reconstruction from Undersampled Data. In: *Medical Imaging* 7961 (2011), S. 79612X–1 – 79612X–8
- [12] ZAIDI, H. ; ZAIDI, H. (Hrsg.): *Quantitative Analysis in Nuclear Medicine Imaging*. Springer, 2005

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Modell einer SPECT-Messung . . . . .	3
1.2	Testbild: Kasten . . . . .	6
1.3	Simulation von Messungen mit Poissonrauschen . . . . .	7
1.4	Thoraxaufnahme mit Herz und Leber (XCAT-Phantom) . . . . .	8
1.5	EM-Rekonstruktionen von Messungen bei verschiedenen Strahlendosen . . . . .	13
2.1	Original und Messungen mit verschiedenen Strahlendosen . . . . .	22
2.2	EM-TV- und EM-Rekonstruktionen im Vergleich . . . . .	23
2.3	Vergleich der Rekonstruktionen einer high count-Messung mit und ohne Dämpfung . . . . .	26