UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS
AND IMAGE COMPUTING

Einführung in die Wohlgestelltheit mathematischer Probleme am Beispiel der Schätzung des optischen Flusses

Introduction to the well-posedness of mathematical problems exemplified by optical flow estimation

Bachelorarbeit

im Rahmen des Studiengangs
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften
der Universität zu Lübeck

vorgelegt von
Andrea Büter

ausgegeben und betreut von
Prof. Dr. Jan Modersitzki
Institute of Mathematics and Image Computing

mit Unterstützung von
Kai Brehmer, M.Sc.
Institute of Mathematics and Image Computing

Lübeck, den 6. November 2018

MIC

IM FOCUS DAS LEBEN

Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

(Andrea Büter)
Lübeck, den 6. November 2018

Kurzfassung Diese Arbeit befasst sich mit der Wohlgestelltheit verschiedener Regularisierer, die für die Berechnung des optischen Flusses eingesetzt werden. Nach einer kurzen Einführung in das Thema des optischen Flusses werden die Ergebnisse von Weickert und Schnörr aus dem Jahr 2001 vorgestellt. Hierbei wird Wohlgestelltheit für einen allgemeinen konvexen Regularisierer hergeleitet. Danach wird diese Eigenschaft für den in der 2004 vorgestellten Methode von Brox, Bruhn, Papenberg und Weickert verwendenten Regularisierer gezeigt. Dieser ist ein Spezialfall der allgemeinen Form von Weickert und Schnörr.

Abstract This thesis deals with the well-posedness of different regularizers used for optical flow estimation. After a short introduction into the topic of optical flow estimation, the results of Weickert and Schnörr from the year 2001 are presented. They infer the well-posedness of a general convex regularizer. This property is then shown for the regularizer used in the method presented by Brox, Bruhn, Papenberg and Weickert in 2004. This is a special case of the general form of Weickert and Schnörr.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**
1.1 Motivation der Arbeit . . . 1
1.2 Einordnung der Problemstellung in den wissenschaftlichen Kontext . 2
1.3 Gliederung der Arbeit . . . 2

2 Grundlagen **5**
2.1 Mathematische Grundlagen . . . 5
2.2 Bildverarbeitung und optischer Fluss . . . 7
2.2.1 Bilder und Bildsequenzen . . . 7
2.2.2 Grundstruktur des optischen Flusses . . . 8
2.2.3 Regularisierer . . . 10

3 Analyse **13**
3.1 Wohlgestelltheit . . . 13
3.1.1 Theorem zur Wohlgestelltheit und dessen Voraussetzungen . . 14
3.1.2 Konvexität von Energiefunktionalen . . . 15
3.1.3 Ausartung des Datenterms . . . 17
3.1.4 Existenz, Eindeutigkeit und kontinuierliche Abhängigkeit von den Eingangsdaten . . . 19
3.2 Die Methode von Brox et al. . . . 20
3.2.1 Annahmen und Voraussetzungen . . . 20
3.2.2 Das Energiefunktional . . . 21
3.2.3 Minimierung . . . 22
3.3 Wohlgestelltheit der Methode von Brox et al. . . . 24
3.3.1 Existenz einer eindeutigen Lösung . . . 25
3.3.2 Kontinuierliche Abhängigkeit von den Eingangsdaten . . . 26

4 Ergebnisse **27**

Literaturverzeichnis **29**

1 Einleitung

1.1 Motivation der Arbeit

Im alltäglichen Leben trifft man immer wieder auf Bilder. Als solche fasst man zum Beispiel eine analoge Fotografie auf, die mit einer Kamera gemacht und danach entwickelt wurde. Im digitalen Bereich treten noch mehr Bilder auf, wie Handyfotos oder Animationen. Doch wie lassen sich Bilder mithilfe mathematischer Methoden untersuchen? In der mathematischen Bildverarbeitung ist ein Bild eine Funktion $I : \Omega \to F$. Die Trägermenge Ω ist die Menge aller Bildpunkte, diese wird abgebildet auf den Farbbereich F. Beide Mengen können hierbei sowohl diskrete als auch kontinuierliche Werte annehmen.

In der mathematischen Bildverarbeitung gibt es viele Teilbereiche wie die Bildsegmentierung, also zum Beispiel die Separierung von Objekten vom Hintergrund, oder das nachträgliche Entrauschen eines Bildes. Diese Problemstellungen treten auch im Fall von statischen Bildern auf. Diese Arbeit soll die Bestimmung des optischen Flusses behandeln, dessen Ziel es ist, die Bewegungen in Bildsequenzen zu ermitteln. Es wird also nicht mehr nur ein einzelnes Bild betrachtet, sondern eine Sequenz, für welche nicht nur die Ortskoordinaten der Bildpunkte wichtig sind, sondern in welchem Bild sie welche Koordinate haben. Doch wofür benötigt man die Berechnung des optischen Flusses? Ein aktuelles Beispiel ist das autonome Fahren. Mithilfe von optischen Flussfeldern lässt sich anhand von Videoaufnahmen beispielsweise ermitteln, ob und wie schnell sich Verkehrsteilnehmer an einer Straßenkreuzung bewegen und in welche Richtung. Anstatt auf statische Informationen oder vergleichsweise ungenaue GPS-Signale könnte ein autonomes Fahrzeug so auf die Bewegungsdaten der anderen Teilnehmer reagieren.

In dieser Arbeit soll eine Methode zur Berechnung des optischen Flusses von Brox et al. aus dem Jahr 2004 [BBPW04] auf Wohlgestelltheit untersucht werden. Das bedeutet, dass sie eine eindeutige Lösung besitzen muss, die kontinuierlich von den Eingangsdaten, also der Bildsequenz beziehungsweise der Veränderung der Bilder in der Sequenz, abhängt. Für Methoden zur algorithmischen Problemlösung ist dies eine wichtige Eigenschaft. Da ein Algorithmus am Ende idealerweise exakt eine Lösung ausgibt, wäre die Existenz keiner oder mehrerer Lösungen problematisch. Außerdem ist es einem Computer unmöglich, die Lösung eines Problems zu bestimmen, wenn er keine stetige Verbindung zwischen Ein- und Ausgabe herstellen kann.

1.2 Einordnung der Problemstellung in den wissenschaftlichen Kontext

Der Begriff der Wohlgestelltheit stammt ursprünglich aus der Physik und wurde 1902 von [Had02] definiert. Das Problem der Schätzung des optischen Flusses ist deutlich neuer, da es auf Computertechnologie basiert. Es wurde 1981 von Horn und Schunck [HS81] eingeführt. Im Laufe der Jahre wurde deren Ausgangsmethode weiterentwickelt und verbessert. Im Jahr 2001 fassten Weickert und Schnörr [WS01] konvexe Regularisierer in zwei Ausdrücken zusammen und zeigten deren Wohlgestelltheit (siehe Abschnitt 3.1). Die in Abschnitt 3.2 vorgestellte Methode von Brox et al. aus dem Jahr 2004 [BBPW04] war ein Meilenstein in der Entwicklung der Schätzung des optischen Flusses. Sie erhöhten die Geschwindigkeit der Berechnungen bei genaueren Ergebnissen. Auch in neueren Arbeiten, beispielsweise von Ilg et al. [IMS+17], wird Bezug auf diese Methode genommen.

1.3 Gliederung der Arbeit

Zu Beginn dieser Arbeit sollen in Abschnitt 2.1 mathematische Grundlagen gelegt werden. Dabei werden mehrere Begriffe aus dem Bereich der partiellen Differentialgleichungen eingeführt. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit nicht auf den Differentialgleichungssystemen zur Schätzung des optischen Flusses, sondern auf der Wohlgestelltheit der einzelnen Methoden liegt, ist Näheres über solche Differentialgleichungen in [HB09] nachzulesen.

Im Anschluss an die mathematischen Grundlagen werden die der Bildverarbeitung aufgeführt. In Unterabschnitt 2.2.1 wird auf die, in Abschnitt 1.1 angerissene, Beschreibung von Bildern genauer eingegangen. Danach wird die Grundstruktur des optischen Flusses erläutert. Am Ende von Kapitel 2 werden allgemeine Terme für konvexe Regularisierer vorgestellt. Dies ist ein wichtiger Teil des Kapitels, da diese Regularisierer Gegenstand der Analysen in Kapitel 3 sind.

Nachdem die Grundlagen für diese Arbeit gelegt wurden, gibt es am Anfang von Abschnitt 3.1 eine weitere Definition, die der Wohlgestelltheit. Nach dieser Definition ist Kapitel 3 in drei Abschnitte aufgeteilt. Im ersten wird nach einer Arbeit von Weickert und Schnörr [WS01] unter gewissen Voraussetzungen Wohlgestelltheit für die in Unterabschnitt 2.2.3 vorgestellten Regularisierer gezeigt. Im zweiten Abschnitt wird die Methode zur Berechnung des optischen Flusses von Brox et al. [BBPW04] vorgestellt. In Abschnitt 3.3 wird diese Methode auf Wohlgestelltheit untersucht.

In Kapitel 4 werden die Ergebnisse der Analyse, im Besonderen die aus Abschnitt 3.3, zusammengetragen und ausgewertet. Dabei wird auf deren Bedeutung für die Methode von Brox et al. [BBPW04] eingegangen.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel sollen Grundlagen zum Verständnis der Vorgehensweisen in Kapitel 3 geschaffen werden. Begonnen wird mit den zum Verständnis erforderlichen mathematischen Grundlagen. Danach erfolgt eine Einführung in das Thema des optischen Flusses. In diesem Sinn soll als Erstes in die mathematische Bildverarbeitung eingeleitet werden, als Zweites wird die Grundstruktur des optischen Flusses dargelegt und am Ende des Kapitels werden Regularisierer vorgestellt. Hierbei wird sich auf Definitionen aus den Büchern *Mathematische Bildverarbeitung* [BL11] und *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens* [HB09], sowie auf die Arbeit von Weickert und Schnörr über konvexe Regularisierer [WS01] bezogen.

2.1 Mathematische Grundlagen

Definition 2.1 (Lebesgue-Raum)**.** Sei $p \in [1, \infty)$, die Menge $\Omega \in \mathbb{R}^d$ nichtleer und $\|\cdot\|$ eine Norm. Dann ist der *Lebesgue-Raum* der p-integrierbaren Abbildungen die Menge

$$L^p(\Omega) \coloneqq \left\{ f \;\middle|\; \int_\Omega \|f(t)\|^p \,\mathrm{d}t < \infty \right\},$$

mit der zugehörigen L^p-Norm

$$\|f\|_p \coloneqq \left(\int_\Omega \|f(t)\|^p \,\mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

Im folgenden Kapitel wird sich vor allem auf die L^1*-Norm* bezogen.

Im Folgenden werden partielle Ableitungen benötigt, wofür zunächst der Begriff der Divergenz eingeführt wird.

Definition 2.2 (Divergenz und Laplace-Operator [BL11])**.** Sei $\mathbb{K}$ der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen und $F : U \to \mathbb{K}^N$ ein Vektorfeld mit offener, nichtleerer Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^N$. Dann nennt man die Funktion

$$\mathrm{div} F = \mathrm{spur}(\nabla F) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

Divergenz von F. Für Funktionen $F : U \to \mathbb{K}^N$ bezeichnet man Δ mit

$$\Delta F = \operatorname{spur}\left(\nabla^2 F\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 F_i}{\partial x_i^2}$$

als *Laplace-Operator*.

Beim optischen Fluss soll die Bewegung von Objekten in Bildsequenzen ermittelt werden. Das ist nach [HB09] ein Spezialfall aus der Problemstellung der Mehrkörpersysteme. Dafür betrachte man n Körper (im späteren Fall Bildpunkte) mit Massen m_i, $i = 1, .., n$, die sich entlang gewisser Bahnen $x_i(t)$ im Raum bewegen. Die Ableitungen $x_i'(t)$ und $x_i''(t)$ geben je die Geschwindigkeit und die Beschleunigung der Körper an. Nach dem Newtonschen Gesetz $F = ma$, die auf einen Körper wirkende Kraft F berechnet sich aus dem Produkt seiner Masse m und der auf ihn wirkenden Beschleunigung a, gilt dann für die Bewegung der Körper

$$m_i x_i''(t) = F_i, \qquad i = 1, ..., n, \tag{2.1}$$

wobei F_i die auf den i-ten Körper wirkende Kraft bezeichnet. Bei Mehrkörpersystemen sind einzelne Komponenten oftmals über starre oder flexible Verbindungen gekoppelt. Daraus resultieren Nebenbedingungen an die Ortskoordinaten der einzelnen Körper. Nimmt man diese in die mathematischen Gleichungen auf, spricht man von restringierten Mehrkörperproblemen.
In der folgenden Darstellung nach Hanke-Bourgeois [HB09] steht der Vektor x für die Ortskoordinaten x_i der n Körper und F für die zugehörigen Kräfte F_i. In der Regel hängt F von der Zeit t, den Positionen x der Körper und ihren Geschwindigkeiten x' ab, $F = F(t, x, x')$. Die Bewegungsgleichungen 2.1 lassen sich dann als

$$Mx'' = F(t, x, x')$$

mit zugehöriger Massematrix

$$M = \begin{bmatrix} m_1 E & & & \\ & m_2 E & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_n E \end{bmatrix}$$

schreiben. Die Nebenbedingungen an die Körper seien hierbei durch $g(x) = 0$ gegeben. Die für die Bewegung nötigen Anfangsbedingungen an x und x' zu einem Zeitpunkt $t = 0$ sind nach Hanke-Bourgeois [HB09] für das restringierte Mehrkörperproblem nicht frei wählbar. Zum einen muss der Anfangswert $x(0)$ die Nebenbedingung $g(x(0)) = 0$ erfüllen. Zum anderen ist die Geschwindigkeit $x'(0)$ durch $g'(x)x' = 0$ eingeschränkt. Im Allgemeinen erfüllt die Lösung der obigen Gleichung selbst bei zulässigen Anfangswerten $x(0)$ und $x'(0)$ nicht diese beiden Nebenbedingungen. Stattdessen ergänzt Hanke-Bourgeois [HB09] die äußeren Kräfte F durch eine weitere Kraft Z, die die Nebenbedingung ersetzen soll. Da diese Kraft lokal immer senkrecht zum Tangentialraum der Menge $\{x : g(x) = 0\}$ steht, wirkt sie in Tangentialrichtung nicht beschleunigend. Es folgt $Z = g'(x) \cdot \lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Damit lautet die nach Hanke-Bourgeois [HB09] korrekte Bewegungsgleichung, die sogenannte *Euler-Lagrange-Gleichung*,

$$Mx'' = F(t, x, x') + g'(x) \cdot \lambda, \qquad 0 = g(x).$$

Da der optische Fluss sich mit der Bewegung von Objekten befasst, wird er oft bestimmt, indem man für die zugehörige Funktion diese Gleichung löst.

2.2 Bildverarbeitung und optischer Fluss

Die Bestimmung des optischen Flusses ist ein Teilbereich der mathematischen Bildverarbeitung. Deshalb sollen zunächst allgemein die Grundlagen der Bildverarbeitung betrachtet werden.

2.2.1 Bilder und Bildsequenzen

Unter einem Bild versteht man umgangssprachlich eine Abbildung von realen oder fiktiven Szenarien auf eine zweidimensionale Fläche, so zum Beispiel eine Fotografie. Im mathematischen Sinne ist die Definition nach Bredies und Lorenz [BL11] verwandt, jedoch etwas komplexer.

Definition 2.3 (Bild)**.** Ein *Bild* I ist eine Abbildung einer Trägermenge Ω in einen Farbraum F.

$$I : \mathbb{R}^d \supseteq \Omega \to F \subseteq \mathbb{R}^n,$$

wobei d die Raumdimension und n die Anzahl der Farbkanäle bezeichnet.

Die Trägermenge Ω ist die Menge aller Bildpunkte (Pixel) des Bildes. Im Bereich der digitalen Bildverarbeitung betrachtet man vor allem Bilder mit diskreten Trägermengen. Im Folgenden wird sich, sofern nicht anders gekennzeichnet, auf rechteckige Bilder mit $d = 2$ bezogen.

Auch für den Farbraum F sind diskrete Werte sinnvoll, da die Bilder so besser automatisch verarbeitet werden können. Kontinuierliche Funktionen können zwar digital interpoliert werden, allerdings können sie nicht exakt erzeugt oder verarbeitet werden.

Im Bereich des optischen Flusses spielt es keine Rolle, welche Farbe genau im Bild vorliegt, es ist wichtiger, konkrete Objekte durch Grauwertunterschiede erkennen zu können. Dementsprechend werden im Weiteren nur die Grauwerte, die der Helligkeit der Bildpunkte entsprechen, betrachtet. Da man hierfür nur eine Farbdimension benötigt, gilt zum Beispiel $F = \mathbb{R}$ oder $F = [0, 1]$.

Für die Bestimmung des optischen Flusses genügt allerdings nicht die Betrachtung eines einzelnen Bildes, man benötigt eine Bildsequenz.

Definition 2.4 (Bildsequenz [BL11])**.** Seien $I_1, ..., I_n$, $n \in \mathbb{N}$, Bilder mit $I_k : \Omega \to F$, $k = 1, ...n$. Dann ist die Funktion

$$I : \Omega \times \{1, ..., n\} \to F$$

die *Bildsequenz*, die den Farbwert des k-ten Bildes an einem Bildpunkt x zurück gibt.

Ein Video ist ein Beispiel für eine Bildsequenz, auf welcher sich typischerweise einzelne Objekte mit dem Auge vom Hintergrund und von anderen Objekten unterscheiden lassen. Ein Computer hat diese Fähigkeit nicht, jedoch lässt sich mit Hilfsmitteln ein vergleichbarer Effekt erzielen. Objekte werden durch Kanten getrennt, was für den Computer beispielsweise Grenzen zwischen hellen und dunklen Bereichen sind. Durch die unterschiedlichen Grauwerte lassen sich Objekte voneinander und vom Hintergrund separieren.

2.2.2 Grundstruktur des optischen Flusses

Die Schätzung des optischen Flusses wurde erstmals 1981 von Horn und Schunck [HS81] eingeführt. Dafür benötigt man nach Weickert und Schnörr [WS01] eine Bildsequenz I mit zeitlichem Parameter θ. Ein einzelnes Bild reicht nicht aus, da man hierfür Bewegungen betrachtet und analysiert. Das optische Flussfeld $(u_1(x, y, \theta),\ u_2(x, y, \theta))$ beschreibt die Verschiebung von Pixeln einer Bildsequenz zwischen zwei Bildern. Zum Beispiel stehen $I(x, y, \theta)$ und $I(x + u_1(x, y, \theta), y + u_2(x, y, \theta), \theta + 1)$ für den gleichen Punkt eines Bildobjekts, je zu den Zeitpunkten θ und $\theta + 1$.

Das optische Flussfeld ist nicht zu verwechseln mit dem Bewegungsfeld eines Bildes, da heißt der Projektion von Bewegungen der dreidimensionalen Szene auf die Bildebene. Bewegungsfeld und optischer Fluss stimmen oftmals nicht überein. Daraus resultiert unter anderem das sogenannte Blendenproblem. Liegt nur ein Ausschnitt der ganzen Szene vor, kann es problematisch werden, die Objekte richtig zu verfolgen. Im Falle der Bewegung einer geraden Kante oder einer einfarbigen Kugel lässt sich diese über die Grauwerte eventuell nicht nachvollziehen [BL11]. Zur Lösung solcher Probleme müssen weitere Annahmen gemacht werden.

Es wird angenommen, dass Objekte in Bildsequenzen ihre Helligkeit mit der Zeit nicht verändern, die sogenannte Grauwertkonstanz oder auch Grauwert-Verschiebungsinvarianz [BL11]

$$I(x,y,\theta) - I\left(x + u_1\left(x,y,\theta\right), y + u_2\left(x,y,\theta\right), \theta+1\right) = 0. \tag{2.2}$$

Sie besagt, dass die Differenz zwischen den Grauwerten eines Bildpunktes zu zwei verschiedenen Zeitpunkten, auch wenn er sich dabei verschiebt, null ist. In der Realität treten optisch allerdings Grauwertänderungen bei Objekten auf, zum Beispiel wenn der Schatten eines anderen Objektes auf sie fällt. Deshalb wird bei vielen Methoden zur Bestimmung des optischen Flusses noch die Annahme getroffen, dass der Gradient des Grauwerts sich nicht verändert, die Grauwert-Skalierungsinvarianz [BL11]

$$\nabla I(x,y,\theta) - \nabla I\left(x + u_1\left(x,y,\theta\right), y + u_2\left(x,y,\theta\right), \theta+1\right) = 0.$$

Diese Gleichung ähnelt Gleichung 2.2, nur dass hier die Grauwerte der Punkte nicht isoliert betrachtet werden. Vielmehr wird geprüft, ob das Verhältnis zwischen ihnen und ihrer Umgebung zwischen zwei Bildern gleich bleibt.
Weickert und Schnörr verwenden in [WS01] lediglich die Annahme in Gleichung 2.2, beziehungsweise die zugehörige Taylor-Approximation erster Ordnung

$$I_x u_1 + I_y u_2 + f_\theta = 0. \tag{2.3}$$

Die Subskripte x, y und θ kennzeichnen die entsprechenden partiellen Ableitungen von I. Aufgrund der Schwierigkeit, mittels einer einzigen Gleichung, die beiden Unbekannten u_1 und u_2 und somit ein eindeutiges Flussfeld zu bestimmen, verwenden Weickert und Schnörr [WS01] eine weitere weit verbreitete Annahme. Es wird angenommen, dass das optische Flussfeld (zumindest stückweise) glatt sein sollte. Die Grundidee hierbei besteht darin, den optischen Fluss als Minimierer eines Energiefunktionals

$$E(u_1,u_2) = \int_\Omega \Big(\left(I_x u_1 + I_y u_2 + I_\theta\right)^2 + \alpha V\left(\nabla I, \nabla u_1, \nabla u_2\right) \Big)\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \tag{2.4}$$

zu sehen. In diesem Fall beschreibt $\nabla = \left(\partial_x, \partial_y\right)^\top$ die räumliche Ableitung. Den ersten Term im Energiefunktional 2.4 nennt man Datenterm. Dieser beinhaltet die Annahme, dass die Grauwertkonstanz eingehalten wird. Der zweite Term hingegen bestraft Abweichungen von (stückweiser) Glätte. Dieser Glätteterm $V\left(\nabla I, \nabla u_1, \nabla u_2\right)$ wird auch Regularisierer genannt und das zugehörige Gewicht $\alpha > 0$ Regularisierungsparameter. Da der Regularisierer laut Weickert und Schnörr [WS01] großen Einfluss auf das Ergebnis der Berechnung des optischen Flusses haben kann, werden als Nächstes verschiedene Typen konvexer Regularisierer vorgestellt.

2.2.3 Regularisierer

Regularisierer, im Weiteren auch manchmal als Glätte-Terme von Energiefunktionalen bezeichnet, sollen die (stückweise) Glätte des Funktionals verbessern. Außerdem können sie, wie in Kapitel 3 gezeigt, für Wohlgestelltheit eines Problems sorgen. Da dies sowohl in räumlicher als auch in raum-zeitlicher Richtung möglich ist, sollen im Folgenden verschiedene Varianten kurz vorgestellt werden. Dabei wird sich auf Weickert und Schnörr [WS01] bezogen.

Homogene Regularisierung

Die ursprüngliche Idee zur Bestimmung des optischen Flusses begann 1981 mit Horn und Schunck [HS81]. Dabei führten sie den Regularisierer

$$V_H\left(\nabla I, \nabla u_1, \nabla u_2\right) = \left|\nabla u_1\right|^2 + \left|\nabla u_2\right|^2 \tag{2.5}$$

ein. Nach Weickert und Schnörr [WS01] ist es ein Ergebnis der Variationsrechnung, dass ein Minimierer (u_1, u_2) des Energiefunktionals

$$E\left(u_1, u_2\right) = \int_\Omega G\left(x, y, u_1, u_2, \nabla u_1, \nabla u_2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\partial_x G_{u_{1_x}} + \partial_y G_{u_{1_y}} - G_{u_1} = 0,\\
&\partial_x G_{u_{2_x}} + \partial_y G_{u_{2_y}} - G_{u_2} = 0
\end{aligned}$$

erfüllen muss. Dieses Minimierungsprinzip, angewandt auf das Funktional von Horn und Schunck, führt zu den partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\Delta u_1 - \frac{1}{\alpha} I_x \left(I_x u_1 + I_y u_2 + f_\theta\right) = 0,\\
&\Delta u_2 - \frac{1}{\alpha} I_y \left(I_x u_1 + I_y u_2 + f_\theta\right) = 0,
\end{aligned}$$

wobei $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ den in Definition 2.2 eingeführten Laplace-Operator bezeichnet. Diese Gleichungen entstehen ebenfalls durch Minimierung des Funktionals 2.5 von Horn und Schunck mithilfe des Gradientenabstiegsverfahrens. In dieser Arbeit liegt der Schwerpunkt nicht auf Differentialgleichungen, in [HB09] wird jedoch weiter auf dieses Thema eingegangen.

Weickert und Schnörr [WS01] weisen darauf hin, dass der zugrunde liegende Prozess des Ansatzes von Horn und Schunck die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u_i = \Delta u_i = \operatorname{div}\left(g \nabla u_i\right)$$

mit $g = 1$ und $i = 1,2$ ist. Diese Gleichung glättet komplett homogen, da die Streuung g überall 1 ist. Dadurch verblendet sie allerdings auch manche wichtigen Unstetigkeiten im Fluss. Die folgenden Regularisierer sollen nach Weickert und Schnörr [WS01] mit diesem Problem besser umgehen können.

Räumliche Regularisierung

Zuerst sollen die rein räumlichen Regularisierer angesprochen werden. Hierbei unterscheiden Weickert und Schnörr [WS01] jeweils zwischen isotrop und anisotrop beziehungsweise flussgesteuert und bildgesteuert. Der Unterschied zwischen isotropen und anisotropen Modellen liegt hierbei in der Streuung. Im isotropen Fall ist diese skalarwertig, im anisotropen matrixwertig. Ist diese Streuung vom Bild, aber nicht vom optischen Fluss an sich abhängig, sprechen Weickert und Schnörr [WS01] von einem bildgesteuerten Regularisierer, bei einer Abhängigkeit vom Fluss von einem flussgesteuerten.
Die von Weickert und Schnörr [WS01] vorgestellten konvexen Regularisierer lassen sich in zwei allgemeineren Modellen zusammenfassen. Mit dem Verschiebungsgradienten $\nabla u = (\nabla u_1, \nabla u_2)$ ist das erste dieser Modelle

$$V_1\left(\nabla I, \nabla u\right) = \Psi\left(\mathrm{spur}\left(\nabla u^\top D\left(\nabla I\right)\nabla u\right)\right). \tag{2.6}$$

Die Funktion Ψ ist hierbei eine differenzierbare, monoton wachsende Funktion, die in s konvex ist. Für $\Psi\left(s^2\right) = s^2$ umfasst dieses Modell die von Weickert und Schnörr [WS01] vorgestellten bildgesteuerten Regularisierer. Ist der Streuungstensor D eine Einheitsmatrix, tritt der isotrope flussgesteuerte Fall ein. Das zweite Modell ist

$$V_2\left(\nabla I, \nabla u\right) = \mathrm{spur}\left(\Psi\left(\nabla u D\left(\nabla I\right)\nabla u^\top\right)\right), \tag{2.7}$$

dieses stellt den anisotropen flussgesteuerten Fall dar. Aufgrund der starken strukturellen Ähnlichkeiten zwischen den Modellen 2.6 und 2.7 lassen sich diese zum allgemeinen räumlichen Regularisierer

$$\begin{aligned} V\left(\nabla I, \nabla u\right) = (1-\beta)\,\Psi\left(\mathrm{spur}\left(\nabla u^\top D\left(\nabla I\right)\nabla u\right)\right) \\ +\beta\,\mathrm{spur}\left(\Psi\left(\nabla u D\left(\nabla I\right)\nabla u^\top\right)\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

zusammenfassen. Der Parameter $\beta \in [0,1]$ legt dabei den Grad der Anisotropie fest. Eingefügt in das allgemeine Energiefunktional des optischen Flusses 2.4 ergibt sich

$$E(u) = \int_\Omega \left(\left(I_x u_1 + I_y u_2 + I_\theta\right)^2 + \alpha V\left(\nabla I, \nabla u\right)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.9}$$

Raum-zeitliche Regularisierung

Der allgemeine Regularisierer 2.8 beschäftigt sich mit der räumlichen Glätte-Bedingung. Da die zeitliche Komponente ein wichtiger Aspekt des optischen Flusses und seiner Berechnung ist, soll diese auch betrachtet werden. Der Ansatz ist ebenfalls Weickert und Schnörr [WS01] entnommen. Es wird ein Modell vorgestellt, dass sowohl räumliche als auch (stückweise) zeitliche Glätte verlangt. Statt den optischen Fluss (u_1, u_2) als Minimierer des zweidimensionalen Integrals 2.9 für jedes Zeitfenster θ zu berechnen, minimiert man ein einzelnes dreidimensionales Integral. Die Lösung dieses Funktionals

$$E(u) = \int_{\Omega \times [0,T]} \Big((I_x u_1 + I_y u_2 + I_\theta)^2 + \alpha V \left(\nabla_3 I, \nabla_\theta u \right) \Big) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\theta, \tag{2.10}$$

mit $\nabla_3 = (\partial_x, \partial_y, \partial_\theta)^\top$ als raum-zeitliche Ableitung, ist der optische Fluss für alle Zeitpunkte $\theta \in [0, T]$. Das Intervall $[0, T]$ gibt hier die Länge der Bildsequenz an, $T - 1$ steht also für die Anzahl der Bilder.

3 Analyse

Dieses Kapitel ist in drei Abschnitte gegliedert. Im ersten soll in die Wohlgestelltheit von Problemen eingeführt werden. Dafür wird diese zuerst nach Hadamard [Had02] definiert. Danach wird nach Weickert und Schnörr [WS01] gezeigt, dass die in Unterabschnitt 2.2.3 vorgestellten Regularisierer unter speziellen Annahmen für die Funktion Ψ die Kriterien der Wohlgestelltheit erfüllen. Im zweiten Abschnitt wird eine Methode zur Schätzung des optischen Flusses von Brox et al. [BBPW04] vorgestellt. Im letzten Abschnitt wird für den Regularisierer dieser Methode ebenfalls Wohlgestelltheit gezeigt.

3.1 Wohlgestelltheit

Die Wohlgestelltheit eines Problems wurde 1902 von Jacques Hadamard [Had02] folgendermaßen definiert.

Definition 3.1 (Wohlgestelltheit)**.** Hat ein mathematisches Modell eines physikalischen Phänomens die Eigenschaften, dass es

1. eine Lösung besitzt,
2. welche eindeutig ist,
3. und sich kontinuierlich mit den Eingangsdaten ändert,

so ist es wohlgestellt.

In diesem Unterkapitel wird nach Weickert und Schnörr [WS01] gezeigt, dass das allgemeine räumliche Energiefunktional 2.9 und das allgemeine raum-zeitliche Energiefunktional 2.10 für spezielle Regularisierer Ψ nach Definition 3.1 wohlgestellt sind.

3.1.1 Theorem zur Wohlgestelltheit und dessen Voraussetzungen

Im Folgenden wird nicht zwischen den Ansätzen in den Gleichungen 2.9 und 2.10 unterschieden.

Die erste Annahme, die in [WS01] getroffen wird, ist, dass der Regularisierer $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- Ψ ist differenzierbar und monoton wachsend,
- Ψ ist in s strikt konvex,
- $\exists\, c_1, c_2 > 0$ sodass $\forall s$ gilt $c_1 s^2 \leq \Psi(s^2) \leq c_2 s^2$.

Des Weiteren werden nur Regularisierer 2.8 betrachtet, für die die Matrizen $D(\nabla I)$ symmetrisch und positiv definit sind. Für den isotropen Fall ist dies klar gegeben, da dort D die Einheitsmatrix ist.

Als den Raum des zulässigen optischen Flussfeldes verwenden Weickert und Schnörr [WS01]

$$\mathcal{H} = \mathrm{H}^1(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) = \{u = (u_1, u_2)^\top | u_i, \partial_{x_j} u_i \in L^2(\Omega),\ \forall i, j\},$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \left(u^\top v + \mathrm{spur} \nabla u \nabla v^\top \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

und der induzierten Norm

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{(u, u)_{\mathcal{H}}}.$$

Hierbei soll $\mathrm{H}^1(\Omega)$ den Sobolevraum [HB09] über Ω bezeichnen. Weickert und Schnörr [WS01] begründen ihre Wahl von $\mathcal{H}$ als Funktionsraum damit, dass Kamerasensoren stets verschwommene Bilddaten erstellen und es üblich ist, die Bildsequenz noch weiter zu glätten. Mit solchen Eingangsdaten kann man keine unstetigen Bewegungsfelder, im mathematischen Sinn, erwarten. Allerdings lassen sich solche Unstetigkeiten mit Funktionen aus $\mathcal{H}$ approximieren. Im Folgenden steht $\langle b, u \rangle$ für die Aktion eines linearen stetigen Funktionals $b \in \mathcal{H}^*$, also ein Element des Dualraums $\mathcal{H}*$ von $\mathcal{H}$, auf einem Vektorraum $u \in \mathcal{H}$.

Es werden Bildsequenzen $I \in \mathcal{H}$ betrachtet, deren räumliche Ableitungen I_x und I_y linear unabhängig im Lebesgue-Raum $L^2(\Omega)$ sind und eine endliche $L^\infty(\Omega)$-Norm haben.

Anhand dieser Voraussetzungen stellen Weickert und Schnörr [WS01] das folgende Theorem auf:

Theorem 3.2 (Wohlgestelltheit)**.** *Unter den vorangegangenen Annahmen hat die Methode des optischen Flusses in den Gleichungen 2.9 und 2.10 genau eine Lösung in $\mathcal{H}$. Diese Lösung hängt stetig von der Bildsequenz I ab.*

Für den Beweis dieses Theorems ist es notwendig, matrixwertige Konvexitätsschätzer zu verwenden, wobei man auch den Fall, dass der Datenterm ausartet, betrachtet.

3.1.2 Konvexität von Energiefunktionalen

Es soll gezeigt werden, dass das Energiefunktional E über $\mathcal{H}$ strikt konvex ist. Hierfür lassen Weickert und Schnörr [WS01] konstante Terme in E außen vor und betrachten das Funktional

$$F(u) = \int_\Omega \left(\left(\nabla I^\top u \right)^2 + \alpha V \left(\nabla I, \nabla u \right) \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = E(u) + \langle b, (u) \rangle + c \quad (3.1)$$

mit

$$\langle b, u \rangle = -2 \int_\Omega I_\theta \left(\nabla I^\top w \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n, \qquad c = -\int_\Omega I_\theta^2 \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Strikte Konvexität ist eine essenzielle Eigenschaft für die Existenz eines eindeutigen, global minimierenden, optischen Flussfeldes u von E. Dieses wird von Weickert und Schnörr [WS01] festgelegt als die Nullstelle der Gleichung $F'(u) = b$, für jedes lineare Funktional $b \in \mathcal{H}^*$.

Die folgende Prüfung von Weickert und Schnörr verläuft in zwei Schritten. Zuerst werden die Glätteterme V_1 und V_2 separat betrachtet. Dies ist möglich, da die Summe konvexer Funktionen wieder konvex ist. Danach betrachten Weickert und Schnörr [WS01] alle Terme zusammen, das Funktional 3.1.

Sei $\mathrm{vec}(\nabla u) = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}$ und $\| \cdot \|_D$ die durch das Skalarprodukt

$$\langle \mathrm{vec}(\nabla u), \mathrm{vec}(\nabla v) \rangle_D \coloneqq \mathrm{vec}(\nabla u)^\top \begin{pmatrix} D(\nabla I) & 0 \\ 0 & D(\nabla I) \end{pmatrix} \mathrm{vec}(\nabla v)$$

induzierte Norm. Dann lässt sich V_1 auch schreiben als

$$\Psi \left(\mathrm{spur} \nabla u^\top D \left(\nabla I \right) \nabla u \right) = \Psi \left(\| \mathrm{vec} \left(\nabla u \right) \|_D^2 \right).$$

Die rechte Seite der Gleichung ist die Verkettung von Ψ, und der Norm $\| \cdot \|_D^2$. Da die Norm konvex und Ψ nach den in Unterabschnitt 3.1.1 getroffenen Voraussetzungen sowohl monoton wachsend als auch strikt konvex ist, gilt, dass die Komposition dieser beider Funktionen wieder konvex sein muss. Folglich ist der Regularisierer V_1 konvex.

Der zweite Glätteterm V_2 war 2001 im Kontext des optischen Flusses ein neuer Ansatz. Im Gegensatz zu V_1 ist die Funktion Ψ matrixwertig. Die strikte Konvexität von V_2 behandeln Weickert und Schnörr [WS01] in folgendem Theorem.

Theorem 3.3 (Matrixwertige Konvexität)**.** *Sei $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt konvex, A und B zwei positiv semidefinite symmetrische Matrizen mit $A \neq B$ und $\tau \in (0,1)$. Dann gilt*

$$\operatorname{spur}\left(\Psi\left((1-\tau)\,A + \tau B\right)\right) < (1-\tau)\operatorname{spur}\left(\Psi\left(A\right)\right) + \tau \operatorname{spur}\left(\Psi\left(B\right)\right). \tag{3.2}$$

Beweis nach Weickert und Schnörr [WS01]. Sei $C = (1-\tau)A + \tau B$.
Da A, B, C symmetrisch sind, gibt es Orthonormalsysteme von Eigenvektoren $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, $\{w_i\}$ und reellwertige Eigenwerte $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$, $\{\gamma_i\}$, sodass

$$A = \sum_i \alpha_i u_i u_i^\top, \qquad B = \sum_i \beta_i v_i v_i^\top, \qquad C = \sum_i \gamma_i w_i w_i^\top.$$

Erweitert man die Vektoren u_i, v_i bezüglich des Systems $\{w_i\}$, erhält man

$$u_i = \sum_j \left(u_i^\top w_j\right) w_j, \qquad v_i = \sum_j \left(v_i^\top w_j\right) w_j.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\sum_j \gamma_j w_j w_j^\top &= C = (1-\tau)A + \tau B \\
&= (1-\tau)\sum_i \alpha_i u_i u_i^\top + \tau \sum_i \beta_i v_i v_i^\top \\
&= (1-\tau)\sum_i \alpha_i \sum_j \left(u_i^\top w_j\right)^2 w_j w_j^\top + \tau \sum_i \beta_i \sum_j \left(v_i^\top w_j\right)^2 w_j w_j^\top \\
&= \sum_j \left((1-\tau)\sum_i \left(u_i^\top w_j\right)^2 \alpha_i + \tau \sum_i \left(v_i^\top w_j\right)^2 \beta_i \right) w_j w_j^\top .
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\gamma_j = (1-\tau)\sum_i \left(u_i^\top w_j\right)^2 \alpha_i + \tau \sum_i \left(v_i^\top w_j\right)^2 \beta_i, \qquad \forall j,$$

die γ_j sind Konvexkombinationen von $\{\alpha_i\}$ und $\{\beta_i\}$.

Da $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt konvex und $\sum_j \left(u_i^\top w_j\right)^2 = \sum_j \left(v_i^\top w_j\right)^2 = 1$ für alle i ist, folgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{spur}\left(\Psi(C)\right) &= \sum_j \Psi\left(\gamma_j\right) \\
&= \sum_j \Psi\left((1-\tau)\sum_i \left(u_i^\top w_j\right)^2 \alpha_i + \tau \sum_i \left(v_i^\top w_j\right)^2 \beta_i\right) \\
&< \sum_j \left((1-\tau)\sum_i \left(u_i^\top w_j\right)^2 \Psi(\alpha_i) + \tau \sum_i \left(v_i^\top w_j\right)^2 \Psi(\beta_i)\right) \\
&= (1-\tau)\sum_i \sum_j \left(u_i^\top w_j\right)^2 \Psi(\alpha_i) + \tau \sum_i \sum_j \left(v_i^\top w_j\right)^2 \Psi(\beta_i) \\
&= (1-\tau)\operatorname{spur}\left(\Psi(A)\right) + \tau \operatorname{spur}\left(\Psi(B)\right).
\end{aligned}$$

Folglich ist die Ungleichung 3.2 gezeigt. □

3.1.3 Ausartung des Datenterms

Bisher wurde gezeigt, dass der Glätteterm $V(\nabla I, \nabla u)$ in 3.1 strikt konvex ist. Um zu zeigen, dass $F(u)$ im Gesamten strikt konvex ist, verwenden Weickert und Schnörr [WS01] die äquivalente Bedingung, dass $F'(u)$ strikt monoton ist:

$$\exists c_m > 0 : \langle F'(u) - F'(v), u - v\rangle \geq c_m \|u - v\|_{\mathcal{H}}^2,\ \forall u, v \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Der Glätteterm erfüllt diese Bedingung aufgrund seiner in Unterabschnitt 3.1.2 gezeigten Konvexität. Wertet man Gleichung 3.3 bezüglich des Glätteterms aus, erhält man

$$\begin{aligned}
\langle F'(u) - F'(v), u - v\rangle \geq& \int_\Omega \Big(\nabla I^\top u \nabla I^\top (u-v) - \nabla I^\top v \nabla I^\top (u-v) \\
&+\alpha' \operatorname{spur}\left(\nabla(u-v)\nabla(u-v)^\top\right)\Big)\,\mathrm{d}x \\
=& \int_\Omega \left(\left(\nabla I^\top w\right)^2 + \alpha' \left|\nabla w\right|^2\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

$\forall w = u - v \in \mathcal{H}$ mit den Konstanten α' und $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$. Es bleibt zu zeigen, dass

$$\int_\Omega \left(\left(\nabla I^\top w\right)^2 + \alpha' |\nabla w|^2\right)\mathrm{d}x \geq c_m \|w\|_{\mathcal{H}}^2, \qquad \forall w \in \mathcal{H}. \tag{3.4}$$

Da ∇I in manchen Bereichen des Bildes verschwindet, lässt sich der erste Term der linken Seite von Ungleichung 3.4 nicht mit den kleinsten Eigenwert von $\nabla I \nabla I^\top$ von Null abgrenzen. Im nun skizzierten Beweis orientieren sich Weickert und Schnörr

[WS01] an einem früheren Beweis von Schnörr [Sch91]. Es werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$
\begin{aligned}
\forall w_1, w_2 \in L^2(\Omega): \qquad & \langle w_1, w_2 \rangle_0 = \int_\Omega w_1 w_2 \mathrm{d}x, \\
& |w_1|_0 = \langle w_1, w_2 \rangle_0^{1/2} \\
& |w|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |w(x)| .
\end{aligned}
$$

Beweis von Ungleichung 3.4 (indirekt). Angenommen, Ungleichung 3.4 sei falsch. Dann gibt es eine Folge $w_n \subset \mathcal{H}$ mit $\|w_n\|_{\mathcal{H}} = 1$, sodass

$$
\int_\Omega \left(\left(\nabla I^\top w_n \right)^2 + \alpha' n \left| \nabla w_n \right|^2 \right) \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{3.5}
$$

Wendet man darauf die Poincaré-Ungleichung

$$
\int_\Omega (v - \overline{v})^2 \, \mathrm{d}x \leq C(\Omega) \int_\Omega |\nabla v|^2 \, \mathrm{d}x, \qquad \forall v \in H^1(\Omega),
$$

wobei $\overline{v} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v \mathrm{d}x$, an, folgt, dass

$$
|w_n - \overline{w}_n|_0^2 \to 0, \qquad \text{mit} \qquad \overline{w}_n = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega w_n \mathrm{d}x.
$$

Durch diese Konvergenz und die Ungleichung

$$
\left| \nabla I^\top w \right|_0^2 \leq 2 \left| I_{x_1} \right|_\infty^2 |w_1|_0^2 + 2 \left| I_{x_2} \right|_\infty^2 ||w_2||_0^2
$$

erhält man

$$
\left| \nabla I^\top \left(w_n - \overline{w}_n \right) \right|_0^2 \to 0. \tag{3.6}
$$

Also folgt mit 3.5 und 3.6, dass

$$
\begin{aligned}
\left| \nabla I^\top \overline{w}_n \right|_0 &= \left| \nabla I^\top w_n + \nabla I^\top \left(\overline{w}_n - w_n \right) \right|_0 \\
&\leq \left| \nabla I^\top w_n \right|_0 + \left| \nabla I^\top \left(\overline{w}_n - w_n \right) \right|_0 \\
&\leq \left| \nabla I^\top w_n \right|_0 + \alpha' \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \, \mathrm{d}x + \left| \nabla I^\top \left(\overline{w}_n - w_n \right) \right|_0 \\
&\to 0.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Unter Verwendung der Substitution $p = I_{x_1}\overline{w}_{1n}$, $q = I_{x_2}\overline{w}_{2n}$ kann man die folgende Abschätzung treffen

$$\begin{aligned}
|p+q|_0^2 &= |p|_0^2 + |q|_0^2 + 2\langle p, q\rangle_0 \\
&\geq |p|_0^2 + |q|_0^2 - 2|p|_0|q|_0 \frac{|\langle p, q\rangle_0|}{|p|_0|q|_0} \\
&\geq |p|_0^2 + |q|_0^2 - \left(|p|_0^2 + |q|_0^2\right) \frac{|\langle p, q\rangle_0|}{|p|_0|q|_0} \\
&= \left(|p|_0^2 + |q|_0^2\right)\left(1 - \frac{|\langle p, q\rangle_0|}{|p|_0|q|_0}\right).
\end{aligned}$$

Durch Resubstitution erhält man

$$\left|\nabla I^\top \overline{w}_n\right|_0^2 \geq \left(\overline{w}_{1n}^2 \left|I_{x_1}\right|_0^2 + \overline{w}_{2n}^2 \left|I_{x_2}\right|_0^2\right) \times \left(1 - \frac{|\langle I_{x_1}, I_{x_2}\rangle_0|}{\left|I_{x_1}\right|_0 \left|I_{x_2}\right|_0}\right).$$

Mit der linearen Unabhängigkeit von I_{x_1} und I_{x_2} folgt, dass

$$1 - \frac{|\langle I_{x_1}, I_{x_2}\rangle_0|}{\left|I_{x_1}\right|_0 \left|I_{x_2}\right|_0} > 0.$$

Durch diese Ungleichung und 3.7 lässt sich schließen, dass $\overline{w}_n \to 0$ und unter Verwendung von 3.5 erhält man

$$\|w_n\|_{\mathcal{H}} \leq \|w_n - \overline{w}_n\|_{\mathcal{H}} + \|\overline{w}_n\|_{\mathcal{H}} \to 0.$$

Dies widerspricht der von Schnörr [Sch91] getroffenen Annahme, dass $\|w_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Folglich muss Ungleichung 3.4 wahr sein. □

3.1.4 Existenz, Eindeutigkeit und kontinuierliche Abhängigkeit von den Eingangsdaten

Weickert und Schnörr [WS01] folgern aus der Eigenschaft 3.3 zusammen mit der Lipschitz-Stetigkeit des Operators F' die Existenz eines eindeutigen und global minimierenden optischen Vektorfeldes u, das stetig von den Daten abhängt.

Um die obige Eigenschaft zu verstehen, gehe man davon aus, man habe zwei Bildsequenzen, zugehörige Funktionale b_1, b_2 und Minimierer u_1, u_2 gegeben

$$F'(u_1) = b_1, \qquad F'(u_2) = b_2.$$

Mit 3.3 folgt

$$\begin{aligned}
c_m \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \langle f'(u_1) - F'(u_2), u_1 - u_2\rangle \\
&\leq \|F'(u_1) - F'(u_2)\|_{\mathcal{H}*} \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Folglich gilt auch

$$\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{c_m} \|b_1 - b_2\|_{\mathcal{H}*}, \ \forall b_1, b_2.$$

Mit dieser Ungleichung zeigen Weickert und Schnörr [WS01], dass für eine kleine Änderung der Bildsequenz das zugehörige optische Flussfeld nicht willkürlich springen, sich aber schrittweise ändern kann.

3.2 Die Methode von Brox et al.

In den folgenden Abschnitten soll eine spezielle Methode zur Bestimmung des optischen Flusses auf Wohlgestelltheit untersucht werden. Hierfür wird in dieser Arbeit die Methode von Thomas Brox, Andrès Bruhn, Nils Papenberg und Joachim Weickert verwendet, welche sie 2004 in ihrem Paper *High Accuracy Optical Flow Estimation Based on a Theory for Warping* [BBPW04] vorstellten. Die Notationen in diesem Unterkapitel sind vollständig aus jener Arbeit entnommen.

3.2.1 Annahmen und Voraussetzungen

Annahme eines konstanten Grauwertes In diesem Modell soll eine Annahme getroffen werden, die zu den häufigsten bei der Messung des optischen Flusses zählt; die in Unterabschnitt 2.2.2 eingeführte Grauwertkonstanz. Folglich gilt

$$I(x, y, t) = I(x + u, y + v, t + 1).$$

Hierbei ist $I : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine rechteckige Bildsequenz und $w = (u, v, 1)^\top$ die gesuchte Verschiebung zwischen einem Bild zum Zeitpunkt t und einem anderen zum Zeitpunkt $t + 1$.

Diese Annahme ließe sich auch linearisieren. Da das jedoch nur gültig ist, wenn die Änderungen im Bild linear verlaufen, was in der Regel nicht der Fall ist, sehen die Autoren davon ab.

Annahme eines konstanten Gradienten Ein Nachteil der ersten Annahme ist die Instabilität bei Helligkeitsänderungen, welche bei Realaufnahmen, zum Beispiel durch Schatten, oft auftreten. Um geringe Änderungen des Grauwerts zulassen zu können, wählt man deshalb als Kriterium den Gradienten des Grauwertes (siehe Unterabschnitt 2.2.2), da er sich mit diesem ändert. Es ergibt sich

$$\nabla I(x, y, t) = \nabla I(x + u, y + v, t + 1).$$

Der Operator $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^\top$ steht hier für den räumlichen Gradienten. Auch hier wird nicht linearisiert.

Glätte-Restriktion Durch die obigen Annahmen werden nur die Verschiebungen einzelner Pixel betrachtet, ohne ihre Zusammenhänge untereinander. Dadurch kommt es zu Problemen, sobald das Blendenproblem auftritt oder der Gradient verschwindet. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn eine Fläche konstanter Helligkeit auftritt. Außerdem ist immer mit Ausreißern zu rechnen. Folglich erachten die Autoren es als sinnvoll, weiter die Glätte des Flussfeldes anzunehmen. Diese Restriktion lässt sich sowohl rein räumlich als auch raum-zeitlich anwenden. Da ein optimales Verschiebungsfeld an Objekträndern jedoch Unstetigkeiten aufweist, wird diese Annahme etwas verändert und lediglich ein stückweise glattes Flussfeld verlangt.

Multiskalenansatz Im Falle von Verschiebungen, die größer als ein Pixel pro Zeiteinheit sind, muss das Energiefunktional multimodal gewählt werden. Ansonsten könnte es passieren, dass der Algorithmus sich in einem lokalen Minimum verläuft. Um das globale Minimum zu finden, werden in der hier vorgestellten Methode Multiskalenansätze angewandt: Man beginnt damit, eine grobe, geglättete Version des Problems zu lösen. Dann verfeinert man das Gitter etwas und sucht erneut, mit der alten Lösung als Startwert, eine neue. So wird Schritt für Schritt das ursprüngliche Problem gelöst.

3.2.2 Das Energiefunktional

Seien $\vec{x} = (x, y, t)^\top$ und $\vec{w} = (u, v, 1)^\top$. Dann setzt sich die Energie

$$E_{Data}(u, v) = \int_\Omega \left(|I(x+w) - I(x)|^2 + \gamma \, |\nabla I(x+w) - \nabla I(x)|^2 \right) \, \mathrm{d}x$$

aus den Annahmen des konstanten Grauwerts und des konstanten Gradienten zusammen, wobei γ eine Gewichtung zwischen den beiden Voraussetzungen ist. Durch die Quadratur erhalten Ausreißer sehr großen Einfluss. Deshalb wendet man die wachsende, konstante Funktion $\Psi(s^2) = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$ an, die zu einer robusten Energie in Form einer (modifizierten) L^1-Norm führt

$$E_{Data}(u, v) = \int_\Omega \Psi \left(|I(x+w) - I(x)|^2 + \gamma \, |\nabla I(x+w) - \nabla I(x)|^2 \right) \mathrm{d}x.$$

Wegen $\varepsilon > 0$ ist Ψ in s ebenfalls konvex, was Vorteile für den Minimierungsprozess bietet. Des Weiteren werden bei dieser Wahl von Ψ keine weiteren Parameter eingeführt (für ε sei fest 0,001 gewählt).

Der folgende Term beschreibt die Annahme des stückweise glatten Flussfeldes. Dies geschieht, indem man die gesamte Variation des Feldes bestraft. Hierbei verwenden Brox et al. [BBPW04] den isotropen flussgesteuerten Regularisierer 2.6 von Weickert und Schnörr[WS01]

$$E_{Smooth}(u,v) = \int_\Omega \Psi\left(|\nabla_3 u|^2 + |\nabla_3 v|^2\right) \mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

Der raum-zeitliche Gradient wird bei nur zwei Bildern durch den rein räumlichen Gradienten ersetzt.

Die zu minimierende Zielfunktion ist die gewichtete Summe der beiden vorgestellten Terme, das allgemeine Energiefunktional 2.10

$$E(u,v) = E_{Data} + \alpha E_{Smooth} \qquad \text{mit} \quad \alpha > 0. \tag{3.9}$$

3.2.3 Minimierung

Da die Funktion 3.9 nichtlinear ist, ist die Minimierung des Energiefunktionals nicht trivial.
Im Weiteren werden, zur besseren Lesbarkeit, für die Ableitungen die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned}
I_x &= \partial_x I(x+w),\\
I_y &= \partial_y I(x+w),\\
I_z &= I(x+w) - I(x),\\
I_{xx} &= \partial_{xx} I(x+w),\\
I_{xy} &= \partial_{xy} I(x+w),\\
I_{yy} &= \partial_{yy} I(x+w),\\
I_{xz} &= \partial_x I(x+w) - \partial_x I(x),\\
I_{yz} &= \partial_y I(x+w) - \partial_y I(x).
\end{aligned}$$

Die zeitliche Variable t wurde hierbei durch z ersetzt, um zu verdeutlichen, dass es sich bei den Ausdrücken nicht um zeitliche Ableitungen handelt. Vielmehr sind es Differenzen, die minimiert werden sollen.

Unter Betrachtung der Randbedingungen muss ein Minimierer des Energiefunktionals die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Es folgt

$$\begin{aligned}
&\Psi'\left(I_z^2 + \gamma\left(I_{xz}^2 + I_{yz}^2\right)\right)(I_x I_z + \gamma(I_{xx} I_{xz} + I_{xy} I_{yz}))\\
&\qquad\qquad - \alpha\left(\Psi'\left(|\nabla_3 u|^2 + |\nabla_3 v|^2\right)\nabla_3 u\right) = 0,\\
&\Psi'\left(I_z^2 + \gamma\left(I_{xz}^2 + I_{yz}^2\right)\right)(I_y I_z + \gamma(I_{yy} I_{yz} + I_{xy} I_{xz}))\\
&\qquad\qquad - \alpha\left(\Psi'\left(|\nabla_3 u|^2 + |\nabla_3 v|^2\right)\nabla_3 v\right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Die Gleichung 3.10 ist in w nichtlinear. Um sie mit üblichen numerischen Verfahren minimieren zu können, wird nun Schritt für Schritt ein lineares Gleichungssystem geschaffen, um einen Multiskalenansatz implementieren zu können. Hierfür werden Fixpunktiterationen in w mit einer Heruntertaktungsstrategie verbunden. Anstelle des standardmäßigen Abstiegsschrittes von $\eta = 0.5$ in jedem Schritt, wird hier ein beliebiges $\eta \in (0,1)$ empfohlen. Dies soll zu glatteren Übergängen zwischen den einzelnen Skalen führen, da die Gitterweite in x- und y-Richtung um η verkleinert wird und die Bildgröße somit um den Faktor η^2 schrumpft. Des Weiteren werden alle Bilder verwendet, begonnen bei dem kleinstmöglichen Bild im größtmöglichen Gitter.

Passt man nun die Gleichungen auf diese Iterationen an, erhält man für w^k mit $w^0 = (0,0,1)^\top$ w^{k+1} als Lösung von

$$\begin{aligned}
&\Psi'\left(\left(I_z^{k+1}\right)^2 + \gamma\left(\left(I_{xz}^{k+1}\right)^2 + \left(I_{yz}^{k+1}\right)^2\right)\right)\left(I_x^k I_z^{k+1} + \gamma(I_{xx}^k I_{xz}^{k+1} + I_{xy}^k I_{yz}^{k+1})\right)\\
&\quad - \alpha\left(\Psi'\left(\left|\nabla_3 u^{k+1}\right|^2 + \left|\nabla_3 v^{k+1}\right|^2\right)\nabla_3 u^{k+1}\right) = 0,\\
&\Psi'\left(\left(I_z^{k+1}\right)^2 + \gamma\left(\left(I_{xz}^{k+1}\right)^2 + \left(I_{yz}^{k+1}\right)^2\right)\right)\left(I_y^k I_z^{k+1} + \gamma(I_{yy}^k I_{yz}^{k+1} + I_{xy}^k I_{xz}^{k+1})\right)\\
&\quad - \alpha\left(\Psi'\left(\left|\nabla_3 u^{k+1}\right|^2 + \left|\nabla_3 v^{k+1}\right|^2\right)\nabla_3 v^{k+1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Sobald ein Fixpunkt erreicht ist, wechselt man auf das nächstfeinere Gitter und verwendet die vorige Lösung als neuen Startwert für die nächste Fixpunktiteration. Das nun erhaltene System ist aufgrund der nichtlinearen Funktion Ψ' und den I_*^{k+1} immer noch nichtlinear. Um die Nichtlinearität in I_*^{k+1} zu entfernen, werden Taylor-Approximationen erster Ordnung verwendet:

$$\begin{aligned}
I_z^{k+1} &\approx I_z^k + I_x^k \mathrm{d}u^k + I_y^k \mathrm{d}v^k,\\
I_{xz}^{k+1} &\approx I_{xz}^k + I_{xx}^k \mathrm{d}u^k + I_{xy}^k \mathrm{d}v^k,\\
I_{yz}^{k+1} &\approx I_{yz}^k + I_{xy}^k \mathrm{d}u^k + I_{yy}^k \mathrm{d}v^k,
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{d}u^k = u^{k+1} - u^k$ und $\mathrm{d}v^k = v^{k+1} - v^k$. Also kann man u^{k+1} und v^{k+1} in die Lösungen u^k und v^k des vorigen Iterationsschrittes und die unbekannten Veränderungen $\mathrm{d}u^k$ und $\mathrm{d}v^k$ aufspalten. Für ein festes k hat man immer noch ein nichtlineares Gleichungssystem, allerdings in den Unbekannten $\mathrm{d}u^k$ und $\mathrm{d}v^k$.

Die übrig bleibende Nichtlinearität liegt in Ψ'. Da Ψ eine konvexe Funktion ist, ist das resultierende Problem ebenfalls konvex. Folglich gibt es genau eine minimale Lösung. Um die verbleibende Nichtlinearität in Ψ' zu entfernen, wird eine zweite, innere Fixpunktiterationsschleife angewandt. Seien $\mathrm{d}u^{k,0} = \mathrm{d}v^{k,0} = 0$ die Startwerte und $\mathrm{d}u^{k,l}$ und $\mathrm{d}v^{k,l}$ die Iterationsvariablen im l-ten Schritt. Weiter seien

$$
\begin{aligned}
(\Psi')^k_{Data} &:= \Psi'\left(\left(I^k_z + I^k_x \mathrm{d}u^k + I^k_y \mathrm{d}v^k\right)^2 + \gamma\left(\left(I^k_{xz} + I^k_{xx}\mathrm{d}u^k + I^k_{xy}\mathrm{d}v^k\right)^2 + \right.\right.\\
&\qquad\qquad \left.\left.\left(I^k_{yz} + I^k_{xy}\mathrm{d}u^k + I^k_{yy}\mathrm{d}v^k\right)^2\right)\right),\\
(\Psi')^k_{Smooth} &:= \Psi'\left(\left|\nabla_3\left(u^k + \mathrm{d}u^k\right)\right|^2 + \left|\nabla_3\left(v^k + \mathrm{d}v^k\right)\right|^2\right).
\end{aligned}
$$

Dann ist das erhaltene lineare Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
0 = (\Psi')^{k,l}_{Data} \cdot &\left(I^k_x\left(I^k_z + I^k_x \mathrm{d}u^{k,l+1} + I^k_y \mathrm{d}v^{k,l+1}\right)\right.\\
&+\gamma I^k_{xx}\left(I^k_{xz} + I^k_{xx}\mathrm{d}u^{k,l+1} + I^k_{xy}\mathrm{d}v^{k,l+1}\right)\\
&\left.+\gamma I^k_{xy}\left(I^k_{yz} + I^k_{xy}\mathrm{d}u^{k,l+1} + I^k_{yy}\mathrm{d}v^{k,l+1}\right)\right)\\
&-\alpha\,\mathrm{div}\left((\Psi')^{k,l}_{Smooth}\,\nabla_3\left(u^k + \mathrm{d}u^{k,l+1}\right)\right)\\
0 = (\Psi')^{k,l}_{Data} \cdot &\left(I^k_y\left(I^k_z + I^k_x \mathrm{d}u^{k,l+1} + I^k_y \mathrm{d}v^{k,l+1}\right)\right.\\
&+\gamma I^k_{yy}\left(I^k_{yz} + I^k_{xy}\mathrm{d}u^{k,l+1} + I^k_{yy}\mathrm{d}v^{k,l+1}\right)\\
&\left.+\gamma I^k_{xy}\left(I^k_{xz} + I^k_{xx}\mathrm{d}u^{k,l+1} + I^k_{xy}\mathrm{d}v^{k,l+1}\right)\right)\\
&-\alpha\,\mathrm{div}\left((\Psi')^{k,l}_{Smooth}\,\nabla_3\left(v^k + \mathrm{d}v^{k,l+1}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist die Verschiebung der Bildpunkte über mehrere Bilder, also die Zeit. Größer gesehen entspricht dies also der Bewegung von Objekten in einer Bildsequenz; dem optischen Fluss.

3.3 Wohlgestelltheit der Methode von Brox et al.

Nachdem die zu untersuchende Methode vorgestellt wurde, soll ihre Wohlgestelltheit gezeigt werden. Dafür muss geprüft werden, ob der von Brox et al. [BBPW04] gewählte Regularisierer 3.8 eine eindeutige Lösung besitzt, die stetig von den Eingangsdaten abhängt. Es lässt sich leicht erkennen, dass dieser der isotrope flussgesteuerte Fall des allgemeinen Regularisieres 2.8 von Weickert und Schnörr [WS01] ist. Dieser erfüllt nach Abschnitt 3.1 die Bedingungen der Wohlgestelltheit, sofern die gewählte Funktion $\Psi(s^2) = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$ dies tut. Demnach sollen in den folgenden Abschnitten die Existenz einer eindeutigen Lösung und die kontinuierliche Abhängigkeit von den Eingangsdaten für diese Funktion Ψ gezeigt werden.

3.3.1 Existenz einer eindeutigen Lösung

Lemma 3.4. *Die Funktion $\Psi(s^2) = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2}$ mit konstantem $\varepsilon > 0$ besitzt eine eindeutige Lösung.*

Beweis. Ist eine Funktion strikt konvex, so besitzt sie eine eindeutige Lösung. Es soll also gezeigt werden, dass Ψ in s strikt konvex ist.
Es gilt $\Psi(s^2) = \sqrt{s^2 + \varepsilon^2} = \left\| (s,\, \varepsilon)^\top \right\|_2$.
Sei $\tau \in (0,1)$ beliebig aber fest und $x \neq y$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Psi\left(((1-\tau)\,x + \tau y)^2\right) &= \sqrt{\left(((1-\tau)\,x + \tau y)^2\right) + \varepsilon^2} \\
&= \left\| ((1-\tau)\,x + \tau y,\, \varepsilon)^\top \right\|_2 \\
&= \left\| ((1-\tau)\,x + \tau y,\, (1-\tau)\,\varepsilon + \tau\varepsilon)^\top \right\|_2 \\
&= \left\| ((1-\tau)\,x,\, (1-\tau)\,\varepsilon)^\top + (\tau y,\, \tau\varepsilon)^\top \right\|_2 \\
&\overset{\triangle - UGL}{\leq} \left\| ((1-\tau)\,x,\, (1-\tau)\,\varepsilon)^\top \right\|_2 + \left\| (\tau y,\, \tau\varepsilon)^\top \right\|_2 \\
&= \left\| (1-\tau)\,(x,\, \varepsilon)^\top \right\|_2 + \left\| \tau\,(y,\, \varepsilon)^\top \right\|_2 \\
&= (1-\tau) \left\| (x,\, \varepsilon)^\top \right\|_2 + \tau \left\| (y,\, \varepsilon)^\top \right\|_2 \\
&= (1-\tau)\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} + \tau\sqrt{y^2 + \varepsilon^2} \\
&= (1-\tau)\,\Psi(x) + \tau\Psi(y)\,.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Folglich ist $\Psi(s)$ eine konvexe Funktion. Es bleibt zu zeigen, dass Ψ sogar strikt konvex ist. Dafür betrachte man nur die etwas umgestellte Dreiecksungleichung

$$\left\| (1-\tau)\,(x,\varepsilon)^\top + \tau\,(y,\varepsilon)^\top \right\|_2 \leq \left\| (1-\tau)\,(x,\varepsilon)^\top \right\|_2 + \left\| \tau\,(y,\varepsilon)^\top \right\|_2 . \tag{3.12}$$

Für diese gilt (unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung) die Gleichheit genau dann, wenn $(1-\tau)\,(x,\varepsilon)^\top$ und $\tau\,(y,\varepsilon)^\top$ linear abhängig sind.

Angenommen, $(1-\tau)\,(x,\varepsilon)^\top$ und $\tau\,(y,\varepsilon)^\top$ seien linear abhängig. Dann $\exists \alpha, \beta \neq 0$, sodass

$$\alpha\,(1-\tau)\,(x,\varepsilon)^\top + \beta\tau\,(y,\varepsilon)^\top = 0.$$

Für $\alpha' = (1-\tau)\alpha$ und $\beta' = \tau\beta$ ergibt sich

$$\alpha'\,(x,\varepsilon)^\top + \beta'\,(y,\varepsilon)^\top = 0.$$

Um die Teilgleichung $\alpha'\varepsilon + \beta'\varepsilon = 0$ zu erfüllen, müssen α' und β' so gewählt werden, dass $\alpha' = -\beta'$. Daraus folgt die andere Teilgleichung als

$$\alpha' x - \alpha' y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (\alpha')x - y = 0.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $\alpha' = \alpha\tau = 0$ oder $x = y$. Der erste dieser beiden Fälle ist nicht möglich, da sowohl α als auch τ ungleich Null gewählt wurden. Der zweite Fall bildet einen Widerspruch zu der Anfangsvoraussetzung $x \neq y$. Folglich sind $(1-\tau)(x,\varepsilon)^\top$ und $\tau(y,\varepsilon)^\top$ nicht linear abhängig.
Damit gilt in Ungleichung 3.12 nie die Gleichheit, also auch nicht in Ungleichung 3.11. Daraus folgt die strikte Konvergenz von Ψ in s. Folglich hat die Funktion einen eindeutigen Minimierer. $\square$

Durch die Existenz eines eindeutigen Minimierers bleibt für die Wohlgestelltheit der Methode [BBPW04] noch kontinuierliche Abhängigkeit von den Eingangsdaten zu prüfen.

3.3.2 Kontinuierliche Abhängigkeit von den Eingangsdaten

Die Euklidische Norm, also auch der von Brox et al. [BBPW04] gewählte Regularisierer Ψ, ist eine stetige Funktion. Die einzigen stetigen Funktionen, die sich nicht kontinuierlich mit den Eingabedaten ändern, sind konstante Funktionen. Da eine solche hier nicht vorliegt, kann man folgern, dass der vorliegende Regularisierer stetig von den Eingangsdaten abhängt.

Hiermit, und mit der Existenz eines eindeutigen Minimierers für $\Psi(s^2) = \sqrt{s^2+\varepsilon^2}$, folgt die Wohlgestelltheit der Methode von Brox et al. [BBPW04].

4 Ergebnisse

In dieser Arbeit wurde eine Einführung in die Thematik der Schätzung des optischen Flusses und die Wohlgestelltheit mathematischer Probleme gegeben. Dafür wurde in Abschnitt 3.2 die Methode von Brox et al. aus dem Jahr 2004 [BBPW04] gewählt, da sie zur Zeit ihrer Veröffentlichung einen großen Fortschritt in diesem Teilgebiet der mathematischen Bildverarbeitung bewirkt hat. Des Weiteren wurde, angelehnt an eine Arbeit von Weickert und Schnörr [WS01], in Abschnitt 3.1 die Wohlgestelltheit zweier allgemeiner Formeln (Gleichungen 2.6 und 2.7) für Regularisierer solcher Methoden gezeigt.

Ziel dieser Arbeit war es, zu zeigen, dass auch die vorgestellte Methode von Brox et al. die Kriterien eines wohlgestellten Problems erfüllt. Dafür wurden in Abschnitt 3.3 zuerst die Existenz eines eindeutigen Minimierers des Regularisierers und danach die stetige Abhängigkeit von den Eingangsdaten bewiesen. Aus diesen Eigenschaften folgt die Wohlgestelltheit dieser Methode.

Wohlgestelltheit eines Problems, also die Existenz eines eindeutigen Minimierers, der kontinuierlich von den Eingangsdaten abhängt, ist eine wichtige Eigenschaft von Methoden, die algorithmisch umgesetzt werden sollen. Die eindeutige Existenz eines Minimierers lässt den Algorithmus ein Ergebnis des Problems finden. Durch die stetige Abhängigkeit von den Eingangsdaten lässt sich die Lösung anhand des Algorithmus wieder auf das Ausgangsproblem zurückführen. Folglich bedeutet der Beweis der Wohlgestelltheit der Methode von Brox et al. [BBPW04] in Abschnitt 3.3, dass sie sich sinnvoll implementieren lassen kann.

Literaturverzeichnis

[BBPW04] Brox, Thomas ; Bruhn, Andrés ; Papenberg, Nils ; Weickert, Joachim: High Accuracy Optical Flow Estimation Based on a Theory for Warping. In: Pajdla, T. (Hrsg.) ; Matas, J. (Hrsg.): *In Proc. 8th European Conference on Computer Vision* Bd. 4, Springer, 2004, S. 25–36

[BL11] Bredies, Kristian ; Lorenz, Dirk: *Mathematische Bildverarbeitung.* Vieweg + Teubner Verlag, 2011

[Had02] Hadamard, Jacques: Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. In: *Princeton University Bulletin*, 1902, S. 49–52

[HB09] Hanke-Bourgeois, Martin: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens.* Bd. 3. Vieweg + Teubner Verlag, 2009

[HS81] Horn, Berthold ; Schunck, Brian: Determining optical flow. In: *Artificial intelligence* Bd. 17, Elsevier B.V., 1981, S. 185–203

[IMS+17] Ilg, Eddy ; Mayer, Nikolaus ; Saikia, Tonmoy ; Keuper, Margret ; Dosovitskiy, Alexey ; Brox, Thomas: FlowNet 2.0: Evolution of Optical Flow Estimation with Deep Networks. In: *IEEE Conferenve on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2017

[Sch91] Schnörr, Christoph: Determining optical flow for irregular domains by minimizing quadratic functionals of a certain class. In: *International Journal of Computer Vision* Bd. 6, Kluwer Academic Publishers, 1991, S. 25–38

[WS01] Weickert, Joachim ; Schnörr, Christoph: A Theoretical Framework for Convex Regularizers in PDE-Based Computation of Image Motion. In: *International Journal of Computer Vision*, Kluwer Academic Publishers, 2001, S. 245–264