



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
IMAGE COMPUTING

Registrierung gleitender Objekte mit richtungsabhängiger Regularisierung

*Registration of slipping Objects with
direction-dependent Regularization*

Bachelorarbeit

im Rahmen des Studiengangs
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften
der Universität zu Lübeck

vorgelegt von

Rosa Kowalewski

ausgegeben und betreut von

Prof. Dr. Jan Modersitzki

Institute of Mathematics and Image Computing

mit Unterstützung von

Alexander Derksen, M.Sc.

Fraunhofer MEVIS

Lübeck, den 8. Oktober 2015

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mir die Zeit nehmen, den Personen, die durch ihre tatkräftige Unterstützung zur Erstellung dieser Arbeit beigetragen haben, zu danken.

Zuerst bedanke ich mich herzlich bei Professor Jan Modersitzki für die Ermöglichung der Arbeit. Die konstruktive Kritik und erhellende fachliche Diskussion haben mich sehr weitergebracht. Außerdem bedanke ich mich bei Professor Heinz Handels für die Bereitschaft, als Zweitprüfer zur Verfügung zu stehen.

Mein großer Dank geht an Alexander Derksen. Danke für die ausführlichen fachlichen Erklärungen und nützlichen Tips, die du mit viel Zeit und Geduld investiert hast. Durch deine große Hilfsbereitschaft und Spontanität musste ich nie lange mit Fragen warten. Des Öfteren half mir dein Blick fürs Ganze, mich nicht in Einzelheiten zu verlieren.

Herzlichen Dank an meine liebe Mama, nicht nur für die Korrektur der sprachlichen Formulierungen in dieser Arbeit, sondern besonders für die Unterstützung und weisen Ratschläge während der Erstellung der Arbeit und während des gesamten Studiums. Vielen Dank meinen Eltern für die Ermöglichung meines Studiums und die finanzielle Unterstützung.

Ebenso bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern des MIC für die angenehme Arbeitsatmosphäre im Institut und bei meinen Poolnachbarinnen, die für erheitende Pausen zu haben waren und mich mit kleinen Tips weiterbrachten.

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Lübeck, den 8. Oktober 2015

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der unstetigkeitserhaltenden Regularisierung gleitender Objekte basierend auf dem in [21] von A. Schmidt-Richberg et al. vorgestellten Regularisierer. Standardregistrierungsverfahren arbeiten mit einem homogenen und isotropen Regularisierer, der stetige Deformationen zulässt. In bestimmten Anwendungsbereichen sind jedoch Unstetigkeiten im Deformationsfeld erwünscht, wie z.B. bei der Registrierung von Lungenbildern. Im Rahmen dieser Arbeit wird der Regularisierer nach Schmidt-Richberg et al. für die Registrierung von CT-Lungenschnittbildern genutzt. Die Idee hinter diesem Ansatz ist, die Regularisierung am Rand des Objekts in bestimmte Richtungen zu entkoppeln. In Tangentialrichtung relativ zum Rand wird die Regularisierung innerhalb und außerhalb der Segmentierung des Organs unabhängig voneinander betrachtet. Die globale Regularisierung in Normalenrichtung stellt sicher, dass keine Lücken oder Überlappungen im Deformationsfeld entstehen. Im Unterschied zu [21] wird das Registrierungsproblem mithilfe des Discretize-then-Optimize-Ansatz gelöst. Es werden Ergebnisse der Registrierung von zwei Datensätzen geliefert, die der Evaluation des Regularisierungsansatzes dienen sollen.

Abstract

This thesis deals with the direction-dependent regularization of slipping objects based on the approach introduced in [21] by A. Schmidt-Richberg. Standard registration methods are using a homogeneous isotropic regularizer which allows continuous motion fields. Some application settings need to allow discontinuities within specific regions of the deformationfield, e.g. the boundaries of a sliding lung during the respiratory cycle. Here the regularizer from [21] is used for the registration of twodimensional CT-images of a lung. The regularization near object boundaries is decoupled in certain directions. In tangential direction the deformation is smoothed separately for the regions inside and outside the object. By global smoothing in normal direction gaps and foldings are prevented. In contrast to [21] the registration problem is solved with a discretize-then-optimize-approach. To evaluate the regularizer the registration framework is implemented in MATLAB and tested on two different datasets.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	1
2 Bildregistrierung	3
2.1 Distanzmaße	3
2.2 Regularisierung	4
3 Richtungsabhängige Regularisierung	7
3.1 Klinische Motivation der unstetigkeitserhaltenden Regularisierung	7
3.2 Stand der Forschung	7
3.3 Richtungsabhängige Regularisierung nach Schmidt-Richberg	8
4 Diskretisierung und Interpolation	14
4.1 Gitter	14
4.2 Interpolation	15
4.3 Diskretisierung des SSD-Maßes	16
4.4 Diskretisierung des diffusiven Regularisierers	17
4.5 Diskretisierung des richtungsabhängigen Regularisierers	20
5 Optimierung	25
5.1 Gauß-Newton-Verfahren	25
5.2 Schrittweitenbestimmung	26
5.3 Abbruchkriterien	27
6 Numerische Experimente	28
6.1 Anwendung auf synthetische Daten	28
6.2 Anwendung auf CT-Daten der Lunge	32
7 Fazit	36
Glossar	37
Literaturverzeichnis	38

1 Einleitung

Thema der vorliegenden Arbeit ist ein Ansatz zur Beschreibung gleitender Organbewegungen, mit dem Ausblick, sie für die Registrierung von Lungenbildern nutzen zu können.

Die Nutzung bildgebender Verfahren erlaubt heutzutage detaillierte Einblicke in die menschliche Anatomie. Dies ist nützlich für Mediziner bei der Diagnose sowie Beurteilung des Fortschritts einer Krankheit (beispielsweise Krebs) wie auch deren Behandlung.

Bei der Krebsbehandlung durch strahlentherapeutische Verfahren oder chirurgische Eingriffe kommen diese Verfahren in drei Schritten zum Einsatz [17]: Bei der Behandlungsplanung kann der Mediziner sich anhand der Patientenbilder einen genauen Überblick der Lage und Größe des Tumors verschaffen. Dies ist insbesondere wichtig bei Tumoren, die in direkter Nachbarschaft von strahlungsempfindlichen und wichtigen Organen liegen. Während der Behandlung können intraoperativ aufgenommene Bilder mit den Operationsplanungen verglichen werden, um gezielte Bestrahlung zu ermöglichen. Schließlich kann in Folgestudien anhand von prä- und postoperativen Bildern der Erfolg der Behandlung verifiziert werden.

Wenn es um den Vergleich zweier Bilder geht, kommt die Bildregistrierung zum Einsatz. Mit Bildregistrierung wird eine Transformation gesucht, die ein Bild auf ein anderes abbildet. Dadurch werden die Unterschiede der beiden Bilder hervorgehoben und leichter beurteilbar.

Insbesondere bei Registrierungsergebnissen, die während der Behandlung angewandt werden sollen, ist eine hohe Genauigkeit notwendig. Eine fehlerhafte Registrierung kann zu ungewollter Bestrahlung von gesundem Gewebe oder falsch platzierten Schnitten in einem chirurgischen Eingriff führen. Dies kann zwei fatale Folgen für die Genesung des Patienten haben: Zum einen führt die Beschädigung des gesunden Gewebes, das eventuell Teil eines lebensnotwendigen Organs ist, zu einer verminderten Lebensfähigkeit des Patienten. Zum anderen können zurückbleibende maligne Zellen zur erneuten Bildung eines Tumors und daher zu der Notwendigkeit eines erneuten Eingriffs führen.

Besonders bei sich bewegenden Organen wie der Lunge hat sich die Registrierung aber bis heute als keine leichte Aufgabe erwiesen [26], [19]. Während des Atemzyklus führt die Kontraktion des Zwerchfells zu einer vorwiegend inferioren Ausdehnung der Lunge. Hierbei gleitet diese am umliegenden Brustfell entlang. Außerdem führt dies zu einer Deformation der benachbarten Organe [24].

Die Art der atmungsinduzierten Deformation hängt von Faktoren wie Art der Atmung (Bauchatmung/ Brustatmung) und Tiefe der Atmung ab. Es gibt kein Muster, das die

Deformation allgemeingültig beschreibt [8]. Das bedeutet, die Trajektorie eines in der Umgebung der Lunge liegenden Tumors ist schwer vorauszusagen .

Diese Arbeit widmet sich einem Registrierungsansatz, der die beschriebene Bewegung der Lunge berücksichtigt. Während die meisten Ansätze sich auf stetige Deformationen beschränken, wird hier das Gleiten in Form von eines unstetigen Deformationsfeldes erlaubt.

Der hier genutzte Registrierungsansatz basiert auf der Minimierung eines Energiefunktional, das aus einem Distanzmaß und einem Regularisierer besteht. Das Distanzmaß dient der Quantifizierung der Ähnlichkeit der Bilder. Der für diese Arbeit zentrale Term des Funktional ist der Regularisierer, der unplausible Deformationen bestraft. Nähere Betrachtung dieser Terme finden in Kapitel 2 statt.

Gängige Regularisierer bestrafen unstetige Deformationen. Dies ist sinnvoll bei Bildern eines zusammenhängenden Objekts. Hier ist die Entstehung von Rissen, an denen zuvor benachbarte Punkte räumlich getrennt werden, unplausibel. Genau das ist aber an gleitenden Kanten wie Lungenoberfläche und Brustfell erwünscht. Aus diesem Grund wird in Kapitel 3 zunächst ein Überblick über verschiedene Ansätze der unstetigkeitserhaltenden Regularisierung gegeben. Anschließend wird einer dieser Ansätze, der aus der Arbeit [21] von Schmidt-Richberg et al. stammende richtungsabhängige Regularisierer, eingeführt. Ziel des Regularisierungsansatzes ist, die Regularisierung dort, wo gleitende Bewegungen stattfinden, in bestimmten Richtungen zu entkoppeln. Dabei wird sichergestellt, dass trotz der Entkopplung der Regularisierungen innerhalb und außerhalb des dem gleitenden Organ zugeordneten Bereiches keine Lücken oder Überlappungen entstehen.

Zur Minimierung des Energiefunktional gibt es verschiedene Ansätze. Da Bildaufnahmeverfahren ein Objekt an endlich vielen Punkten abtasten, liegen die zu registrierenden Bilder stets diskret vor. Von Schmidt-Richberg et al. wurde die Lösung des Minimierungsproblems über den Optimize-then-Discretize Ansatz durchgeführt [20]. Dabei wird ein notwendiges Kriterium erster Ordnung in Form einer partiellen Differentialgleichung hergeleitet und in diskreter Form gelöst. In der vorliegenden Arbeit wird der Discretize-then-Optimize Ansatz verwendet. Hierfür werden alle benötigten Terme in eine diskrete Form gebracht, um sie anschließend durch ein Abstiegsverfahren zu optimieren. Die Diskretisierung der Terme geschieht in Kapitel 4. Als Abstiegsverfahren wurde das Gauß-Newton-Verfahren gewählt, welches in Kapitel 5 erklärt wird.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden alle notwendigen Bestandteile für eine Registrierung in MATLAB implementiert und an zwei verschiedenen Beispielen durchgeführt. Es wurde zum Einen an synthetischen Daten, die ein gleitendes Objekt darstellen, und zum Anderen an computertomographisch aufgenommenen zweidimensionalen Schnittbildern einer Lunge getestet. Die Ergebnisse der Registrierungen sowie eine Interpretation finden sich in Kapitel 6.

Eine Zusammenfassung und einen Ausblick bietet Kapitel 7.

2 Bildregistrierung

Das mit der Bildregistrierung verfolgte Ziel ist es, korrespondierende Strukturen in zwei gegebenen Bildern zu finden. Ein weit verbreiteter Ansatz hierfür ist, die beiden Bilder mit Hilfe einer für den bestimmten Kontext *plausiblen* geometrischen Deformationen in einem gewissen Sinn *ähnlich* zu machen, sodass es zur Überlagerung korrespondierender Strukturen kommt. Die mathematische Beschreibung dieser beiden Begriffe ist Thema dieses Kapitels.

Ein Bild wird hier als eine Abbildung $B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ verstanden, die einem Ort $x \in \mathbb{R}^d$ einen reellwertigen Farb- bzw. Grauwert zuordnet. Es werden Bilder auf dem sogenannten Bildbereich Ω betrachtet, welcher als Gebiet auf \mathbb{R}^d angenommen wird. Die Abbildung B hat einen kompakten Träger $\overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid B(x) \neq 0\}} \subset \overline{\Omega}$ auf dem Bildbereich. Der Parameter $d \in \mathbb{N}$ gibt die räumliche Dimension des Bildes an.

Mit der Verrückung $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto u(x) = (u_1(x), \dots, u_d(x))^\top$ wird die geometrische Deformation als eine Abbildung $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)^\top: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definiert, die einem Punkt $x = (x_1, \dots, x_d)^\top$ den neuen Ort $(x_1 + u_1(x), \dots, x_d + u_d(x))^\top$ zuordnet. Ein deformiertes Bild lässt sich als die Hintereinanderausführung $B \circ \varphi$ schreiben.

Für die im Folgenden vorgestellten Konzepte wird $d = 2$ gesetzt. Sie lassen sich aber auf beliebige Dimensionen übertragen.

Die zu registrierenden Bilder heißen Referenzbild \mathcal{R} und Templatebild \mathcal{T} , wobei die Deformation auf das Template angewendet wird.

Um das genannte Problem zu lösen werden die vagen Begriffe der Ähnlichkeit und Plausibilität durch geeignete Terme beschrieben. Das sogenannte Distanzmaß \mathcal{D} misst die Ähnlichkeit zweier Bilder. Der Regularisierer \mathcal{S} gibt die Plausibilität der Deformation an. Mit diesen Bausteinen lässt sich das Registrierungsproblem

$$\min_{\varphi} \{ \mathcal{D}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi) + \mathcal{S}(u) \} \quad (2.1)$$

aufstellen. In den nächsten Abschnitten werden verschiedene Ansätze für das Distanzmaß und der Regularisierer sowie deren Motivation beschrieben.

2.1 Distanzmaße

Es gibt zahlreiche Ansätze für Distanzmaße in der Bildregistrierung. In den folgenden Abschnitten werden die beiden Klassen von Distanzmaßen, zwischen denen in der Regel unterschieden wird [13], erläutert.

2.1.1 Monomodale Maße

Die monomodalen Distanzmaße sind verwendbar für Bilder, die mittels des gleichen Verfahrens aufgenommen wurden. Hier kann man von ähnlichem Kontrast und Helligkeitsniveau ausgehen. Ein Beispiel für ein monomodales Distanzmaß ist das *Sum of absolute Differences* - Maß [23]

$$\mathcal{D}^{\text{SAD}}(\mathcal{R}, \mathcal{T}) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathcal{T}(x) - \mathcal{R}(x)| dx.$$

Ein anderes gängiges Maß ist das *Sum of squared Differences* - Maß [23]

$$\mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathcal{R}, \mathcal{T}) := \int_{\Omega} (\mathcal{T}(x) - \mathcal{R}(x))^2 dx.$$

In dieser Arbeit wird als Distanzmaß das \mathcal{D}^{SSD} gewählt.

2.1.2 Multimodale Maße

Distanzmaße, die auf Bilder aus verschiedenen Aufnahmeverfahren angewendet werden sollen, sind im Allgemeinen komplexer. Gängige Beispiele sind die *Kreuzkorrelation* und *Mutual Information*. Da die für diese Arbeit durchgeführten Berechnungen auf Bildern aus gleichen Aufnahmeverfahren beruhen, werden hier multimodale Maße nicht weiter thematisiert. Weiterführende Erklärungen können beispielsweise in [3] nachgelesen werden.

2.2 Regularisierung

Dieser Abschnitt widmet sich dem Maß der Plausibilität der Deformation. In vielen Anwendungsfeldern können in der Realität auftretende Deformationen eines Objektes als glatt interpretiert werden. Anschaulich bedeutet dies, dass nah beieinander liegende Punkte auch nach der Verrückung nah beieinander liegen werden.

Es gibt verschiedene Ansätze für das Maß der Glattheit einer Funktion, die in Abschnitt 2.2.2 vorgestellt werden. Eine weitere Motivation, den Regularisierer zu definieren, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

2.2.1 Bildregistrierung als schlecht gestelltes Problem

Das Hauptmotiv der Bildregistrierung ist, das Problem

$$\min_{\varphi} \mathcal{D}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi) \tag{2.2}$$

zu lösen. Notwendig für das Lösen eines mathematisch modellierten Problems ist, dass es nach Hadamard korrekt gestellt ist, also die Bedingungen

- es existiert für alle Eingangsdaten eine Lösung

- die Lösung ist für alle Eingangsdaten eindeutig
- die Lösung hängt stetig von den Eingangsdaten ab

erfüllt [12].

Für das Registrierungsproblem (2.2) ist insbesondere die zweite der aufgeführten Eigenschaften verletzt, was das Beispiel in Abbildung 2.1 verdeutlicht.

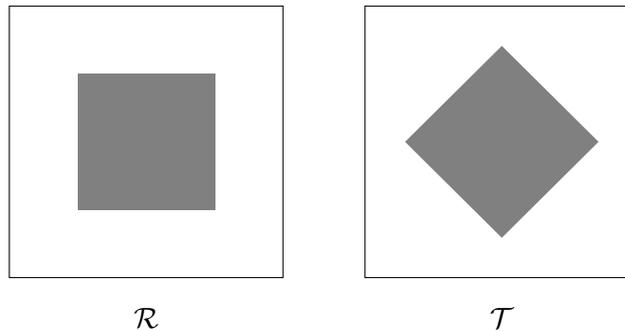


Abbildung 2.1: Referenzbild \mathcal{R} und Template \mathcal{T} , das durch eine Rotation der Referenz um 45° entstanden ist, auf $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Es existieren unendlich viele Rotationen φ , so dass $T \circ \varphi = R$ gilt.

Die Deformation $\varphi_\alpha(x) = R_\alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$, wobei $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ die Rotationsmatrix ist, ist für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ Lösung von (2.2). Aufgrund der Symmetrie von \mathcal{R} gilt jedoch für alle $\alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, dass $\mathcal{T} \circ \varphi_\alpha = \mathcal{R}$. Das Minimum ist also nicht eindeutig bestimmt.

Die Übereinstimmung von \mathcal{R} und $\mathcal{T} \circ \varphi$ wird durch verschiedene Deformationen φ erreicht, da Orte mit gleichem Farbwert ohne Beeinflussung des Funktionswertes vertauscht werden können.

Daher wird der Regularisierer definiert, der durch Bewertung der Plausibilität der Deformation bzw. Verrückung im jeweiligen Kontext das Minimierungsproblem zu einem gut gestellten Problem machen soll.

2.2.2 Gängige Regularisierer

Ausgangsannahme ist eine stetig differenzierbaren Verrückung u . Im Folgenden werden wir uns mit dem diffusiven Regularisierer

$$\mathcal{S}^{\text{diff}}(u) := \int_{\Omega} \|\nabla u_1\|_2^2 + \|\nabla u_2\|_2^2 dx \quad (2.3)$$

beschäftigen, der hohe Ableitungen in der Verrückung bestraft [13]. Andere gängige Ansätze sind die Modellierung eines elastischen Potentials durch den *elastischen Regu-*

larisierer [12]

$$\mathcal{S}^{\text{elastic}}(u) := \int_{\Omega} \frac{\mu}{4} \sum_{j,k=1}^2 (\partial_{x_j} u_k + \partial_{x_k} u_j)^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} u)^2 dx,$$

mit sogenannten materialspezifischen Lamé-Konstanten μ und λ und Divergenz $\operatorname{div} u := \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$, und die Bestrafung hoher zweiter Ableitungen durch den *curvature Regularisierer* [12]

$$\mathcal{S}^{\text{curv}}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta u_1)^2 + (\Delta u_2)^2 dx,$$

wobei Δ der Laplace-Operator mit $\Delta u_i = \operatorname{div}(\nabla u_i) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2}$, $i = 1, 2$ ist. Hier wird die Forderung an u zur zweimal stetigen Differenzierbarkeit verstärkt.

Die Wahl der beiden Maße führt zu der Zielfunktion

$$\mathcal{J}(R, T, \varphi) = \mathcal{D}^{\text{SSD}}(R, T \circ \varphi) + \alpha \mathcal{S}^{\text{diff}}(u),$$

wobei der Einfluss des Regularisierers durch den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gesteuert wird.

Der Regularisierer $\mathcal{S}^{\text{diff}}$ wirkt global auf die Verrückung u , also auf jedes $x \in \Omega$ in gleicher Weise. Die Eigenschaft, dass jeder Ort $x \in \Omega$ den gleichen Einfluss auf den Funktionswert hat wird als *Homogenität* bezeichnet. Dies ist den diffusiven Regularisierer der Fall, da das Integral über dem gesamten Bildbereich bestimmt wird. Außerdem ist er *isotrop* [1], das heißt, es wird in alle Richtungen auf die gleiche Weise geglättet.

Diese Eigenschaften sind nicht immer gewünscht. Das anschließende Kapitel zeigt Anwendungsbeispiele auf, für die diese Art der Regularisierung nicht ausreicht und beschäftigt sich mit einem speziellen Ansatz zur inhomogenen anisotropen Regularisierung.

3 Richtungsabhängige Regularisierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit einer anisotropen inhomogenen Regularisierung, die gleitende Kanten in einem Bild beschreibt. Zunächst wird in Abschnitt 3.1 die klinische Motivation zur Definition eines solchen Regularisierers aufgezeigt. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 ein (unvollständiger) Überblick über den aktuellen Stand der Forschung gegeben. In Abschnitt 3.3 wird einer der Ansätze, der richtungsabhängige Regularisierer nach Schmidt-Richberg, definiert und erklärt.

3.1 Klinische Motivation der unstetigkeitserhaltenden Regularisierung

Ein großer und wichtiger Anwendungsbereich der Bildregistrierung ist die Medizin. Durch den Einsatz bildgebender Verfahren können z.B. Krankheitsverläufe oder Behandlungserfolge quantifiziert werden. Weiterhin können in der navigierten Chirurgie und Strahlentherapie während der Operation prä-operative Pläne angewandt werden [15].

Gängige Regularisierer, wie die im vorigen Kapitel vorgestellten, realisieren eine glattes Verhalten der Deformation. Insbesondere am Rand der Lunge entspricht dies während des Atemzyklus jedoch nicht der Realität:

Während der Brustkorb nahezu unverändert bleibt führt eine Kontraktion des Zwerchfells zu einer Ausdehnung der Lunge. Hierbei werden sowohl Lunge als auch benachbarte Organe wie die Leber nach unten verschoben [10]. Es findet eine gleitende Bewegung zwischen Lunge und Brustfell statt.

Dies kann durch einen homogenen isotropen Regularisierer nicht modelliert werden. Es müssen Regularisierer hergeleitet werden, die an gleitenden Oberflächen Unstetigkeiten zulassen. Im Folgenden wird eine Übersicht über verschiedene Ansätze gegeben.

3.2 Stand der Forschung

Zahlreiche Ansätze zur Beschreibung von diskontinuierlichen Deformationen nutzen eine Segmentierung der Organe. In [25] wurden die Regularisierungsterme für die Segmentierung unabhängig berechnet und durch einen Strafterm wurden Lücken im Deformationsfeld, die am Rand der Segmentierung auftreten, verhindert. Ansätze mit stückweise glattes Deformationsfeld liefern [7] und [2]. Durch die Verwendung nichtquadratischer Normen im Regularisierer können Unstetigkeiten im Deformationsfeld zugelassen werden, wie es in [16] mit der totalen Variation und in [6] mit einer modifizierten L^p -Norm getan wurde. Neuste Arbeiten berücksichtigen zusätzlich physikalische Eigenschaften der

Organe [5], um die Registrierung sowohl an den gleitenden Oberflächen als auch innerhalb der Organe zu verbessern.

Der in dieser Arbeit verwendete Ansatz der richtungsabhängigen Regularisierung stammt von A. Schmidt-Richberg et al. und wurde in [21], [22] beschrieben. Folgender Abschnitt erklärt Idee und mathematische Hintergründe dieses Ansatzes.

3.3 Richtungsabhängige Regularisierung nach Schmidt-Richberg

Die Idee der in [21], [22] vorgestellten richtungsabhängigen Regularisierung ist, die Glättung der Verrückung in bestimmten Richtungen zu entkoppeln. Die gleitende Bewegung eines Objektes drückt sich durch eine Verrückung parallel zum Rand, in Tangentialrichtung, aus. Im Deformationsfeld wird dies durch unstetige Verrückungen in Tangentialrichtung des Randes deutlich. In Normalenrichtung des Randes bleibt das Deformationsfeld glatt, da es sonst Lücken bzw. Überlappungen zwischen Objekt und Hintergrund geben würde.

Das Ziel ist es also, in Normalenrichtung homogen zu glätten, während in Tangentialrichtung die Glättung innerhalb und außerhalb des Organs entkoppelt wird.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst die Aufteilung der Verrückung in die benötigte Normalen- und Tangentialrichtung beschrieben. Das von Schmidt-Richberg et al. eingeführte Modell wird in Abschnitt 3.3.2 erläutert. Abschnitt 3.3.3 liefert eine analoge aber exaktere Formulierung des Ansatzes.

3.3.1 Berechnung der Normalen- und Tangentialanteile der Verrückung

Grundlegend für den beschriebenen Ansatz ist die Aufteilung der Verrückung u in den Normalenanteil u^\perp und den Tangentialanteil u^\parallel . Die Bestimmung dieser Verrückungen wird in diesem Abschnitt erklärt.

Es sei für das Bild eines gleitenden Organs eine glatt berandete Segmentierung $\Gamma \subset \Omega$ gegeben. Diese Segmentierung stellt das gleitende Organ dar und enthält alle Ort $x \in \Omega$, die dem Organ zugeordnet werden.

Ziel ist es, die Verrückung $u(x)$ für $x \in \Omega$, beziehungsweise für x aus einer Region um den Rand $\partial\Gamma := \bar{\Gamma} \cap \bar{\Omega} \setminus \Gamma$ der Segmentierung Γ aufzuteilen, sodass die Anteile $u^\perp(x)$ und $u^\parallel(x)$ relativ zum Rand der Segmentierung orthogonal bzw. tangential stehen.

Abbildung 3.1 zeigt die Zerlegung eines Vektors $u(x)$ in seinen Normalen- und Tangentialanteil sowie das Normalenfeld n auf Γ . Mit dem gegebenen Normalenvektor $n(x)$ im Punkt x hat der Anteil von $u(x)$ in Normalenrichtung die Länge $\langle u(x), n(x) \rangle$ und ist durch

$$u^\perp(x) = n(x) \langle n(x), u(x) \rangle$$

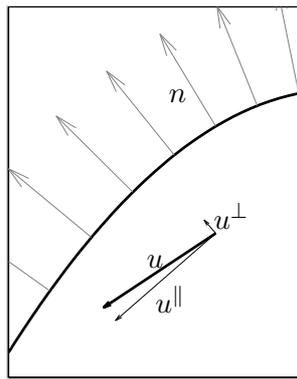


Abbildung 3.1: Zerlegung des Vektors u in den Normalenanteil u^\perp und den Tangentialanteil u^\parallel

gegeben [21]. Für die Tangentialrichtung gilt dann

$$u^\parallel(x) = u(x) - u^\perp(x).$$

Da die Normalenvektoren nur auf $\partial\Gamma$ definiert sind, jedoch auf ganz Ω bzw. in einer Umgebung des Randes $\partial\Gamma$ benötigt werden, müssen verallgemeinerte Normalenvektoren definiert werden. Hierbei wird die Tatsache genutzt, dass die Gradienten einer Funktion senkrecht auf deren Höhenlinien stehen [18]. Betrachtet man die sogenannte Signed-distance-Funktion

$$f(x, \Gamma) := \begin{cases} \text{dist}(x, \Omega \setminus \Gamma) & , x \in \Gamma \\ -\text{dist}(x, \Gamma) & , x \in \Omega \setminus \Gamma \end{cases}$$

mit $\text{dist}(x, M) = \min_{y \in M} \{\|x - y\|_2\}$ für eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ und $x \in \mathbb{R}^2$, so erhält man durch

$$n(x, \Gamma) = \frac{\nabla f(x, \Gamma)}{\|\nabla f(x, \Gamma)\|_2}$$

eine gute Approximation der Normaleneinheitsvektoren in einer Umgebung von $\partial\Gamma$, was Abbildung 3.2 verdeutlicht.

3.3.2 Modellierung

Da nun die benötigte Zerlegung von u bekannt ist, kann der richtungsabhängige Regularisierer nach [21] eingeführt werden.

Es seien die Bilder $\mathcal{R}, \mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Für das Referenzbild \mathcal{R} liege eine Segmentierung $\Gamma \subset \Omega$ des gleitenden Organs, zum Beispiel einer Lunge vor. Weiterhin sei die Verrückung $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch $u(x) = u^\perp(x) + u^\parallel(x)$ in Normalen- und Tangentialrichtung bezüglich des Randes der Segmentierung aufgeteilt und durch $\delta: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ eine Gewichtung des Randes gegeben.

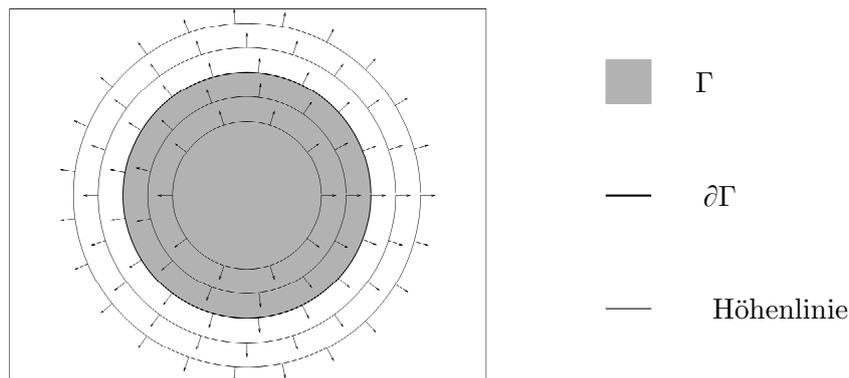


Abbildung 3.2: Kreisförmige Segmentierung Γ mit Höhenlinien und Gradienten der zugehörigen Signed-distance-Funktion. Die Gradienten auf $\partial\Gamma$ entsprechen den Normalenvektoren auf $\partial\Gamma$.

Der richtungsabhängige Regularisierer nach [21] ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{DDR}}(u) = & \int_{\Omega} (1 - \delta(x)) \|\nabla u(x)\|_2^2 + \delta(x) \|\nabla u(x)^\perp\|_2^2 dx \\ & + \int_{\Gamma} \delta(x) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Gamma} \delta(x) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die einzelnen Summanden lassen sich in folgender Weise geometrisch interpretieren:

- Zunächst wird mit $\int_{\Omega} (1 - \delta(x)) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx$ isotrop geglättet. Das Integral wird über dem gesamten Bildbereich berechnet, also innerhalb und außerhalb des Organs. Die Gewichtung $(1 - \delta)$ sorgt dafür, dass dies nur in den Punkten geschieht, in denen von einer stetigen Verrückung ausgegangen wird, also überall bis auf den Rand der Segmentierung des gleitenden Organs. Die nächsten drei Summanden beschreiben die Glättung in Nähe des Randes.
- Durch den Term $\int_{\Omega} \delta(x) \|\nabla u(x)^\perp\|_2^2 dx$ wird in Normalenrichtung geglättet. Wie oben beschrieben muss die Verrückung in Normalenrichtung überall stetig sein, daher wird wieder über den gesamten Bildbereich Ω integriert. Dies stellt sicher, dass keine Lücken oder Überlappungen im Deformationsfeld entstehen. Medizinisch interpretiert bedeutet das das Anliegen des Organs am umgebenden Gewebe. Im vorherigen Term ist wegen $u = u^\perp + u^\parallel$ die Glättung in Normalenrichtung außerhalb der nahen Umgebung des Randes enthalten. Diese wird mit dem zweiten Term durch die Gewichtung δ zum gesamten Bildbereich, also inklusive der Randregion, ergänzt.

- Die letzten beiden Terme sind für die Glättung in Tangentialrichtung zuständig. Die Integrale $\int_{\Gamma} \delta(x) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx$ und $\int_{\Omega \setminus \Gamma} \delta(x) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx$ unterscheiden sich in den Mengen, über die integriert wird. Die Integration über Γ mit Gewichtung δ beschreibt die Glättung in Tangentialrichtung innerhalb des Organs in Nähe des Randes und ist unabhängig von der Integration über $\Omega \setminus \Gamma$ mit Gewichtung δ , die gleiches für die Region außerhalb des Organs in Nähe des Randes tut. So soll die Glättung in diesen beiden Bereichen des Bildes entkoppelt und Unstetigkeiten erlaubt werden.

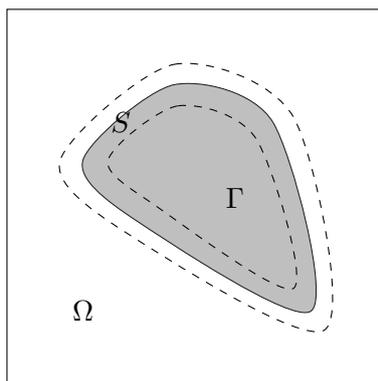


Abbildung 3.3: Beispiel für eine Segmentierung Γ mit Umgebung S in einem Bildbereich Ω

In [21], [22] wurde eine Gewichtungsfunktion δ empfohlen, die auf $\partial\Gamma$ den Wert 1 hat und mit dem Abstand von $\partial\Gamma$ sinkt.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Gewichtungsfunktion δ auf $\partial\Gamma$ sowie in einer Umgebung $S \subset \Omega$ von $\partial\Gamma$ konstant 1 und sonst 0 gesetzt. Die Menge S stellt für einen fest gewählten Abstand $d > 0$ mit

$$S = \{x \in \Omega : \exists y \in \partial\Gamma : \|x - y\|_2 \leq d\}$$

einen Schlauch um $\partial\Gamma$ dar. Die Gewichtung δ ist die Indikatorfunktion χ_S der Menge S und durch

$$\delta(x) := \chi_S(x) = \begin{cases} 1 & , x \in S \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

definiert.

Es sei darauf hingewiesen, dass für \mathcal{S}^{DDR} aus (3.1) für ein stetig differenzierbares u die

Gleichheit zum diffusiven Regularisierer $\mathcal{S}^{\text{diff}}$ gilt, da

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}^{\text{DDR}}(u) &= \int_{\Omega} (1 - \delta(x)) \|\nabla u(x)\|_2^2 + \delta(x) \|\nabla u(x)^\perp\|_2^2 dx \\
 &\quad + \int_{\Gamma} \delta(x) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx + \int_{\Omega \setminus \Gamma} \delta(x) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} (1 - \delta(x)) \|\nabla u(x)\|_2^2 + \delta(x) \|\nabla u(x)^\perp\|_2^2 dx + \int_{\Omega} \delta(x) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx \\
 &= \int_{\Omega} (1 - \delta(x)) \|\nabla u(x)\|_2^2 + \delta(x) (\|\nabla u(x)^\perp\|_2^2 + \|\nabla u(x)\|_2^2) dx \\
 &= \int_{\Omega} ((1 - \delta) + \delta) \|\nabla u(x)\|_2^2 dx \\
 &= \mathcal{S}^{\text{diff}}(u).
 \end{aligned}$$

Die Formel (3.1) ist eine inexakte Formulierung des Ansatzes, da in der kontinuierlichen Form kein Unterschied zum homogenen isotropen diffusiven Regularisierer besteht. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt eine an [21] angelehnte analoge Formulierung des Regularisierers geliefert.

3.3.3 Richtungsabhängige Regularisierung mit stückweise definierter Verrückung

Statt von einer nicht auf ganz Ω stetigen Verrückung u auszugehen wird im Folgenden von zwei stetig differenzierbaren Verrückungen ausgegangen und daraus die gesuchte Verrückung u zusammengesetzt. Dies hat den Vorteil, dass bei der Berechnung des Integrals im Regularisierer keine Definitionslücken von ∇u auf $\partial\Gamma$ aufgrund von Unstetigkeiten beachtet werden müssen. Statt nur den Rand $\partial\Gamma$ der Menge Γ zu betrachten, wird in diesem Ansatz mit einer echten Menge gearbeitet.

Es wird wie oben von Bildern $\mathcal{R}, \mathcal{T}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit Segmentierung Γ des Referenzbildes ausgegangen. Seien nun die Verrückungen $u_{\text{in}}, u_{\text{out}}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Mit der Forderung

$$u_{\text{in}}^\perp(x) = u_{\text{out}}^\perp(x) \quad \forall x \in S \tag{3.2}$$

besitzt $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$u(x) := \begin{cases} u_{\text{in}}(x) & , x \in \Gamma \\ u_{\text{out}}(x) & , x \in \Omega \setminus \Gamma \end{cases}$$

die gewünschten Eigenschaften: Die Forderung (3.2) sichert die Stetigkeit sowie stetige Differenzierbarkeit von u in Normalenrichtung. Durch die stückweise Definition sind die Tangentialvektoren innerhalb und außerhalb von Γ unabhängig voneinander und es sind insbesondere Unstetigkeiten auf $\partial\Gamma$ möglich.

Die beiden Teilverrückungen werden nun jeweils diffusiv auf dem Bildbereich Ω reguliert.

Schließlich lässt sich die Zielfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(R, T, u_{\text{in}}, u_{\text{out}}) = & \int_{\Omega} \chi_{\Gamma}(x) (T \circ \varphi_{\text{in}}(x) - R(x))^2 + (1 - \chi_{\Gamma}(x)) (T \circ \varphi_{\text{out}}(x) - R(x))^2 \\ & + \alpha (\|\nabla u_{\text{in}}(x)\|_2^2 + \|\nabla u_{\text{out}}(x)\|_2^2) dx \end{aligned}$$

mit zugehörigem Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{u_{\text{in}}, u_{\text{out}}} & \mathcal{J}(R, T, u_{\text{in}}, u_{\text{out}}) \\ \text{u.d.Nb.} & u_{\text{in}}^{\perp}(x) = u_{\text{out}}^{\perp}(x) \forall x \in S \end{aligned}$$

aufstellen.

Die Indikatorfunktion χ_{Γ} wird hierbei genutzt, um das Distanzmaß auf Γ bzw. $\Omega \setminus \Gamma$ nur für die jeweils zugehörige Verrückung u_{in} bzw. u_{out} auszuwerten.

Die Bilder, auf die diese Zielfunktion angewendet werden soll, liegen stets in diskreter Form vor, da die bildgebenden Verfahren das abzubildende Objekt nur an endlich vielen Punkten abtasten. Für die Anwendung auf diskrete Bilder wird die Zielfunktion diskretisiert. Die Herleitung diskreter Ausdrücke für das Distanzmaß \mathcal{D}^{SSD} und den Regularisierer $\mathcal{S}^{\text{diff}}$ und darauf aufbauend für den diffusionsbasierten Regularisierer \mathcal{S}^{DDR} geschieht im folgenden Kapitel.

4 Diskretisierung und Interpolation

Um die stetige Zielfunktion auf die in diskreter Form vorliegenden Bilder anwenden zu können, muss diskretisiert bzw. interpoliert werden. In der Arbeit [21] von Schmidt-Richberg wurde der *Optimize-then-Discretize*-Ansatz (vgl. [12]) gewählt. Dabei wird die zu dem Zielfunktional gehörige sogenannte Euler-Lagrange-Gleichung aufgestellt, die ein System von partiellen Differentialgleichungen liefert. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist ein Kandidat für das gesuchte Minimum des Funktionals. Dieser wird anschließend diskretisiert und auf die diskret vorliegenden Bilder angewendet.

Im Unterschied dazu wird in dieser Arbeit der *Discretize-then-Optimize*-Ansatz (vgl. [13]) verwendet. Die Zielfunktion wird diskretisiert und so auf die Bilder angewendet. Nach der Anwendung der im ersten Schritt des Optimierungsverfahrens erhaltenen Deformation auf das Template wird dieses interpoliert, um im nächsten Schritt wieder an den gleichen Punkten ausgewertet werden zu können.

Die Herleitung der diskreten Darstellung des Distanzmaßes und des Regularisierers sowie die hierfür benötigten Gitter und die Interpolation sind Thema dieses Kapitels. An dieser Stelle sei auf das Glossar im Anhang hingewiesen, das durch eine Auflistung und knappe Erklärung der häufig verwendeten Symbole besonders in den Abschnitten 4.4 und 4.5 den Überblick über die Formeln erleichtern soll.

4.1 Gitter

Die Bilder lassen sich nun nicht mehr als Funktionen \mathcal{R}, \mathcal{T} auf \mathbb{R}^2 beschreiben, sondern liegen als Matrizen $R, T \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$, die die Farbwerte enthalten, vor. Zur Beschreibung der Orte der Farbwerte wird ein Gitter genutzt, das den Bildbereich Ω in gleich große Zellen unterteilt. Die verschiedenen Arten von Gittern werden im Folgenden für einen rechteckigen Bildbereich Ω kurz vorgestellt.

Cell-Centered Gitter

Bei einem Cell-Centered Gitter X^{cc} wird der Ort x der Farbwerte durch die Zellmitten bestimmt. Das Gitter hat also genau so viele Zellen, wie das Bild Farbwerte hat.

Für $d = 2$ und $\Omega = [\omega_1^1, \omega_1^2] \times [\omega_2^1, \omega_2^2]$ und eine Datengröße $m = [m_1, m_2]$ ergibt sich ein Zellenabstand von

$$h_i = \frac{\omega_i^2 - \omega_i^1}{m_i}, \quad h = [h_1, h_2]$$

und die Koordinaten

$$\xi_{ij}^{\text{cc}} = \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) h_1, \left(j - \frac{1}{2} \right) h_2 \right], \quad i = 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2.$$

Nodale Gitter

Beim nodalen Gitter X^{nodal} liegen die Farbwerte im Gegensatz zum cell-centered Gitter nicht in den Zellmitten, sondern auf den Ecken

$$\xi_{ij}^{\text{nodal}} = [(i-1)h_1, (j-1)h_2] \quad , i = 1, \dots, m_1 + 1, j = 1, \dots, m_2 + 1$$

der Zellen. Pro Dimension gibt es also einen Farbwert mehr als Zellen.

Staggered Gitter

Die Punkte eines staggered Gitters X^{stg} liegen bezüglich einer Raumdimension cell-centered und bezüglich der anderen nodal. Mit h, m wie oben definiert sind die beiden im zweidimensionalen möglichen staggered Gitter durch

$$\begin{aligned} \xi_{i,j}^{\text{stg1}} &= \left[\left(i - \frac{1}{2}\right) h_1, (j-1) h_2 \right] && \text{bzw.} \\ \xi_{i,j}^{\text{stg2}} &= \left[(i-1) h_1, \left(j - \frac{1}{2}\right) h_2 \right] \end{aligned}$$

gegeben. Für das erste dieser beiden Gitter sowie für ein cell-centered und ein nodales Gitter ist in Abbildung 4.1 ein Beispiel für $m = [3, 3]$ dargestellt.

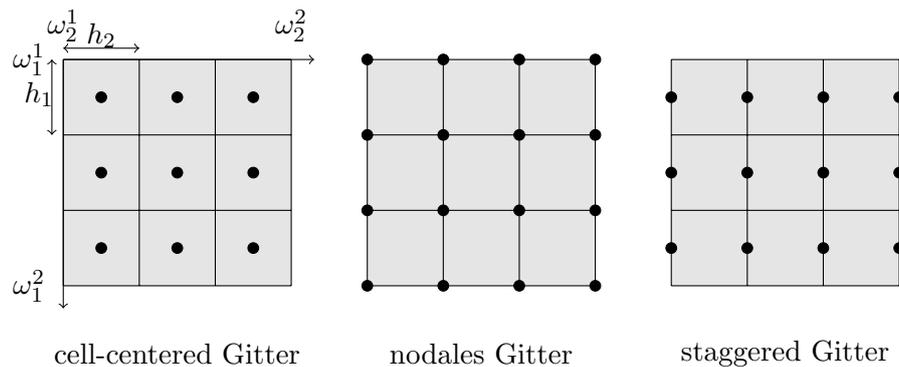


Abbildung 4.1: Gitterarten für $m = [3, 3]$

4.2 Interpolation

Durch Interpolation wird nun eine kontinuierliche Form des Bildes ermittelt. Als Interpolante $I : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ wird eine Funktion gesucht, die die Datenpunkte x_i auf die gegebenen zugehörigen Grauwerte f_i abbildet, für die also gilt $I(x_i) = f_i$. Außerdem soll sie fast überall stetig differenzierbar sein, da der Gradient des Bildes benötigt wird.

Zur Interpolation gibt es verschiedene Ansätze, die unterschiedliche Bedingungen an die Interpolante stellen: Die Interpolante der Next-Neighbour-Interpolation ist eine Treppenfunktion und nicht stetig. Bei der Spline-Interpolation ist die Interpolante als Linearkombination von Translationen einer Basisfunktion gegeben, mit deren Wahl Stetigkeit und

Differenzierbarkeit gefordert werden kann. Die Polynom-Interpolation für n Stützstellen liefert ein Polynom vom Grad $n + 1$, das unendlich oft differenzierbar ist, im Allgemeinen aber stark oszilliert. Weitere Ansätze können in [4] nachgelesen werden.

Aufgrund der Stetigkeit, fast überall Differenzierbarkeit und der einfachen und schnellen Berechnung wurde hier die lineare Spline-Interpolation gewählt. Sie kann als eine gewichtete Summe der Funktionswerte von benachbarten Gitterpunkten aufgefasst werden [13].

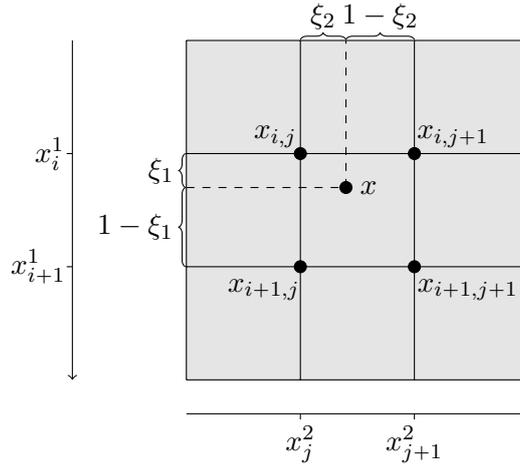


Abbildung 4.2: Schema der bilineare Interpolation auf einem nodalen Gitter

Im Zweidimensionalen hängt der interpolierte Funktionswert eines Punktes $x = (x^1, x^2)^\top \in [x_{i,j}^1, x_{i+1}^1] \times [x_j^2, x_{j+1}^2] \subset \Omega$ von den vier Werten $f_{i,j}, f_{i+1,j}, f_{i,j+1}$ und $f_{i+1,j+1}$ durch

$$I(x) = f_{i,j}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) + f_{i+1,j}\xi_1(1 - \xi_2) + f_{i,j+1}(1 - \xi_1)\xi_2 + f_{i+1,j+1}\xi_1\xi_2$$

ab. Die Gewichtungen ξ_k für $k = 1, 2$ sind hierbei gegeben durch $\xi_k = \frac{x^k - x_i^k}{x_{j+1}^k - x_j^k} \in [0, 1)$.

4.3 Diskretisierung des SSD-Maßes

Nun soll die Zielfunktion diskretisiert werden. Wir betrachten zunächst das Distanzmaß \mathcal{D}^{SSD} aus Gleichung (2.1.1). Für eine diskrete Form muss das Integral durch einen diskreten Ausdruck approximiert werden. Für ein cell-centered Gitter mit Schrittweite $h = (h_1, h_2)$ und Bilder $T, R \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ gilt mit der Mittelpunktsregel

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\text{SSD}}(R, T) &:= \int_{\Omega} (T(x) - R(x))^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} h_1 h_2 (T(x_{i,j}) - R(x_{i,j}))^2 + \mathcal{O}(h_1^2 + h_2^2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Für vektorisiert vorliegende Bilder T, R lässt sich dieser Ausdruck mit Vernachlässigung des Fehlerterms als das Matrizenprodukt

$$\mathcal{D}_h^{\text{SSD}}(R, T) = h_1 h_2 (T - R)^\top (T - R)$$

schreiben. Nach der Kettenregel erhält man

$$\nabla \mathcal{D}_h^{\text{SSD}}(R, T) = 2h_1 h_2 (T - R)^\top \nabla T$$

und

$$\nabla^2 \mathcal{D}_h^{\text{SSD}}(R, T) = 2h_1 h_2 (\nabla T^\top \nabla T + (T - R) \nabla^2 T).$$

für die diskreten Ableitungen.

4.4 Diskretisierung des diffusiven Regularisierers

Um den noch fehlenden Term in (2.1.1), den diffusiven Regularisierer, in eine diskrete Form zu bringen, muss eine diskrete Entsprechung der Differentiation durch den Operator ∇ hergeleitet werden. Hier werden zur Approximation der Ableitung die zentralen Differenzen genutzt.

Für ein Bild $B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ wird die partielle Ableitung nach der Variablen x_i durch den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{\partial B}{\partial x_i}(x) \approx \frac{B(x + \epsilon e_i) - B(x - \epsilon e_i)}{2\epsilon} \quad (4.2)$$

angenähert [14], wobei ϵ eine kleine positive reelle Zahl und e_i der i -te Einheitsvektor ist.

Liegen die Punkte $x + \epsilon e_i$ und $x - \epsilon e_i$ benachbart auf einem cell-centered Gitter, so wird durch (4.2) die Ableitung im Punkt x auf dem staggered Gitter bestimmt. Der Zellenabstand h entspricht hier 2ϵ . Der diskrete Differentialoperator

$$\hat{D}_m^h = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & \ddots & & \\ & & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m-1 \times m}$$

liefert für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ durch $\hat{D}_m^h v$ den Vektor mit allen zentralen Differenzen als Einträge.

Im Folgenden wird mit einer vektorisiert vorliegenden Verrückung u gearbeitet, auf die der Differentialoperator angewandt wird. Der Grund dafür wird in der Erweiterung von \hat{D}_m^h auf zwei Dimensionen deutlich.

Sei $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^{m_1 \times 2m_2}$ die diskrete Verrückung auf einem cell-centered Gitter, wobei die Spalten der Matrix die x_1 -Richtung und die Zeilen der Matrix die x_2 -Richtung repräsentieren. Wie in Kapitel 2 eingeführt ist \mathbf{u}_1 die Verrückung in x_1 -Richtung und \mathbf{u}_2 die Verrückung in x_2 -Richtung. Für beide Anteile wird in jede Richtung partiell differenziert.

Zunächst wird der Operator \hat{D}_m^h dahingehend erweitert, dass er auf eine Matrix angewendet auf jeder Spalte der Matrix operiert. Dafür wird das Kronecker-Produkt \otimes genutzt. Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ liefert das Kronecker-Produkt die Blockmatrix

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times mq}$$

Für weitere Matrizen $X \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times q}$ gilt die Äquivalenz

$$AXB = C \Leftrightarrow (B^\top \otimes A)\text{vec}(X) = \text{vec}(C), \quad (4.3)$$

wobei $\text{vec}(X)$ der Vektor ist, in dem die Spalten von X untereinander stehen [9]. Ist nun $C_1 := \hat{D}_{m_i}^h \mathbf{u}_i$ die Matrix, die Spaltenweise alle partiellen Ableitungen von \mathbf{u}_i in x_1 -Richtung enthält, so gilt nach (4.3) für die vektorisierte Form von C_1

$$\text{vec}(C_1) = D_{x_1} \mathbf{u}_i \quad \text{für} \quad D_{x_1} := I_{m_2} \otimes \hat{D}_m^h, \quad (4.4)$$

wobei $\mathbf{u}_i = \text{vec}(\mathbf{u}_i)$ die vektorisierte Form der Verrückung ist. Für die Ableitung in x_2 -Richtung wird \hat{D}_m^h auf die Transponierte von \mathbf{u}_i angewendet. Die Matrix $C_2 := (\hat{D}_m^h \mathbf{u}_i^\top)^\top$ enthält Zeilenweise die Ableitungen in x_2 -Richtung von \mathbf{u}_i . Hier gilt nach (4.3) für die vektorisierte Form

$$\text{vec}(C_2) = D_{x_2} \mathbf{u}_i \quad \text{für} \quad D_{x_2} := \hat{D}_m^h \otimes I_{m_1}.$$

Analog zu (4.4) wird für die Anwendung des Differentialoperators \mathbf{D}_{x_1} und \mathbf{D}_{x_2} auf $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ nochmals das Kronecker-Produkt

$$\mathbf{D}_{x_1} = I_2 \otimes D_{x_1} \in \mathbb{R}^{2(m_1-1)m_2 \times 2m_1m_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{D}_{x_2} = I_2 \otimes D_{x_2} \in \mathbb{R}^{2m_1(m_2-1) \times 2m_1m_2}$$

gebildet.

Die Blockmatrix $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{x_1} \\ \mathbf{D}_{x_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2((m_1-1)m_2 + m_1(m_2-1)) \times 2m_1m_2}$ liefert schließlich mit $\mathbf{D}\mathbf{u}$ einen $2((m_1-1)m_2 + m_1(m_2-1))$ dimensionalen Vektor, der alle partiellen Ableitungen von \mathbf{u} auf den staggered Gittern enthält.

Aufgrund des Gitterwechsels durch den Differentialoperator \hat{D}_m^h müssen nun Gitterwechsellmatrizen aufgestellt werden, die die Ableitungen zurück auf ein cell-centered Gitter bringen. Der Gitterwechsel erfolgt durch eine Mittelung benachbarter Werte. Das staggered Gitter hat in eine Raumrichtung einen Gitterpunkt weniger als das cell-centered Gitter, von dem ausgegangen wurde. Um wieder auf die gleiche Dimension zu kommen, müssen Randbedingungen definiert werden. Hier werden die Neumann-Randbedingungen genutzt, die auf dem Rand des Bildbereichs $\frac{\partial B}{\partial x_i}(x) = 0$ für $i \in \{1, 2\}$ fordern. Nach Gleichung (4.2) muss also gelten $B(x + \epsilon e_i) = B(x - \epsilon e_i)$. Mit dieser

4.5 Diskretisierung des richtungsabhängigen Regularisierers

In diesem Abschnitt werden die in Kapitel 3 beschriebenen Änderungen am diffusiven Regularisierer in eine diskrete Form gebracht. Die Diskretisierung orientiert sich an dem Regularisierer (3.1) nach Schmidt-Richberg. Für die Entkopplung der Regularisierung auf $\partial\Gamma$ werden Randbedingungen verwendet. Aufgrund der Randbedingungen gilt im Diskreten nicht mehr die Gleichheit zum diffusiven Regularisierer.

Wie in der kontinuierlichen Form ist der Regularisierer die Summe unterschiedlich gewichteter diffusiver Regularisierer. Die Gewichtung durch die Gewichtungsfunktion δ der Umgebung des Randes wird im folgenden Abschnitt beschrieben. Um den diffusiven Regularisierer auf verschiedenen Teilmengen des Bildbereiches zu berechnen wird danach eine entsprechende Maskierung hergeleitet. Anschließend wird kurz die Zerlegung des diskreten Deformationsfeldes in Normalen- und Tangentialrichtung erklärt. Mit Gewichtung und Maskierung der einzelnen Terme lässt sich schließlich der diskrete richtungsabhängige Regularisierer aufstellen.

4.5.1 Berücksichtigung der Gewichtungsfunktion

Wie bei Einführung des Modells in Abschnitt 3.3.2 beschrieben, stellt die Gewichtungsfunktion δ einen Schlauch um den Rand $\partial\Gamma$ der Segmentierung Γ dar. Zunächst wird beschrieben, wie diese Funktion in diskreter Form aussieht und anschließend der diskrete Regularisierungsterm angepasst.

Die Funktion wird ausgehend von einer gegebenen diskreten Segmentierung Γ mit Mitteln der morphologischen Bildverarbeitung erstellt. Die Segmentierung liegt als Binärbild vor, das sich durch die Indikatorfunktion $\chi_{\Gamma}^{\text{cc}}: \mathbb{R}^{m_1 \times m_2} \rightarrow \{0, 1\}$ auf dem cell-centered Gitter X^{cc} beschreiben lässt. Mittels Erosion wird ein Binärbild erstellt, das den Schlauch der Breite $2h_1$ in x_1 -Richtung und $2h_2$ in x_2 -Richtung, also anschaulich den zwei Pixel breiten Rand der Segmentierung darstellt.

Die Erosion ist eine Basisoperation der morphologischen Bildverarbeitung [11] und liefert ausgehend von einer Menge $X \subset \Omega$ und einer Strukturmaske B eine weitere Menge $X \ominus B \subset \Omega$. Die Mengen X und $X \ominus B$ können durch ihre Indikatorfunktion als Binärbilder aufgefasst werden. Die Strukturmaske hat einen definierten Bezugspunkt, anhand dessen sie translatiert werden kann. Das translatierte Strukturelement, bei dem der Bezugspunkt mit dem Punkt $x \in \Omega$ übereinstimmt, wird mit B_x bezeichnet. Die entstehende Menge $X \ominus B = \{x | B_x \subset X\}$ enthält alle Punkte $x \in \Omega$, für die die translatierte Strukturmaske B_x vollständig in das Bild X passt.

In Abbildung 4.3 ist die Bestimmung des Randes durch ein symmetrisches Strukturelement dargestellt. Der Bezugspunkt des Strukturelements ist schwarz markiert. Durch die Operation $\Gamma \ominus B$ werden alle Punkte, die einen unmittelbaren Nachbarn im Komplement der Segmentierung haben, gelöscht. Die Differenz von Γ und $\Gamma \ominus B$ entspricht dem inneren Rand von $\partial\Gamma$ der Breite eines Pixels. Berechnet man Analoges für $\Omega \setminus \Gamma$, so erhält man den einen Pixel breiten äußeren Rand.

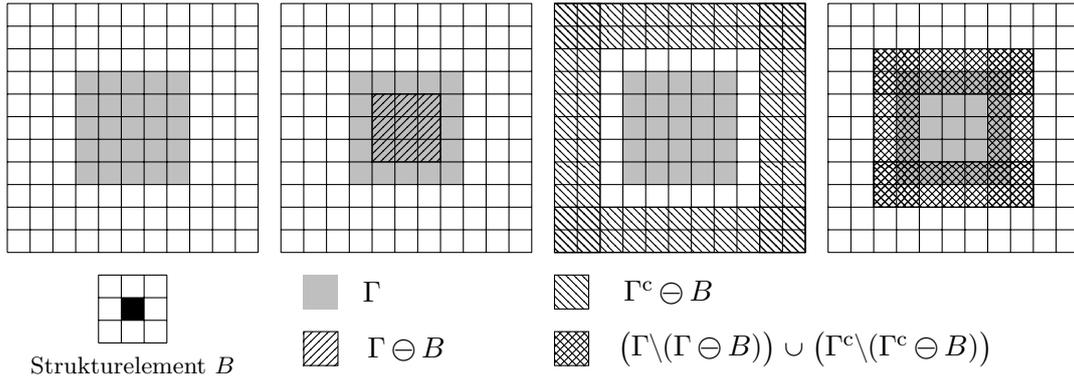


Abbildung 4.3: Erstellung der Menge S durch Erosion. Von links nach rechts: Segmentierung Γ , für die δ berechnet werden soll; erodierte Segmentierung Γ ; erodiertes Komplement von Γ ; aus den Differenzen von Γ bzw. $\Omega \setminus \Gamma$ mit den jeweiligen erodierten Mengen wird S zusammengefügt.

Die gesuchte Menge kann nun durch $S = (\Gamma \setminus (\Gamma \ominus B)) \cup (\Gamma^c \setminus (\Gamma^c \ominus B))$ beschrieben werden, deren Indikatorfunktion als gesuchte Gewichtungsfunktion im Folgenden mit $d(x) := \chi_S(x)$ bezeichnet wird.

Für die vorliegende diskrete Gewichtungsfunktion gilt es jetzt die Frage zu beantworten, wie diese im Regularisierungsterm berücksichtigt werden kann.

In kontinuierlicher Form wird im gewichteten diffusiven Regularisierer der Integrand durch

$$\mathcal{S}_\delta^{\text{diff}}(u) = \int_{\Omega} \delta(x) (\|\nabla u_1(x)\|_2^2 + \|\nabla u_2(x)\|_2^2) dx$$

gewichtet. Wird wie in (4.1) das Integral approximiert erhält man die gewichtete Summe

$$\mathcal{S}_\delta^{\text{diff}}(u) \approx \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} h_1 h_2 \delta(x_{i,j}) (\nabla u_1(x_{i,j})^\top \nabla u_1(x_{i,j}) + \nabla u_2(x_{i,j})^\top \nabla u_2(x_{i,j})).$$

Die Summation wird in (4.5) durch Multiplikation mit dem Einsvektor $\mathbf{1}_{m_1 m_2}^\top$ durchgeführt. Ersetzt man diesen durch die vektorisiert vorliegende Gewichtung $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m_1 m_2}$, so wird wie gewünscht beim Aufsummieren jeder Ort $x \in \Omega$ mit dem zugehörigen Wert $d(x)$ gewichtet. In (4.5) wird also die Matrix \mathbf{A} durch die Matrix

$$\mathbf{A}_\delta = \mathbf{D}^\top \text{diag}(\mathbf{d}^\top \mathbf{M}) \mathbf{D}$$

ersetzt.

4.5.2 Berücksichtigung der Segmentierung Γ

Die Segmentierung Γ in den diskreten Regularisierer $\mathcal{S}_h^{\text{diff}}$ einzubauen ist aufgrund der Differentiation aufwendiger. Die Berechnung der Ableitungen wird in (4.5) anhand von finiten Differenzen durchgeführt. Hierbei ist der Wert der Ableitung eines Punktes auf

dem staggered Gitter abhängig von beiden benachbarten Punkten auf dem cell-centered Gitter. Für Punkte $x \in X^{\text{stg}}$, die jeweils Nachbarn innerhalb und außerhalb der Segmentierung haben, soll dies vermieden werden. An diesen Stellen werden Randbedingungen verwendet.

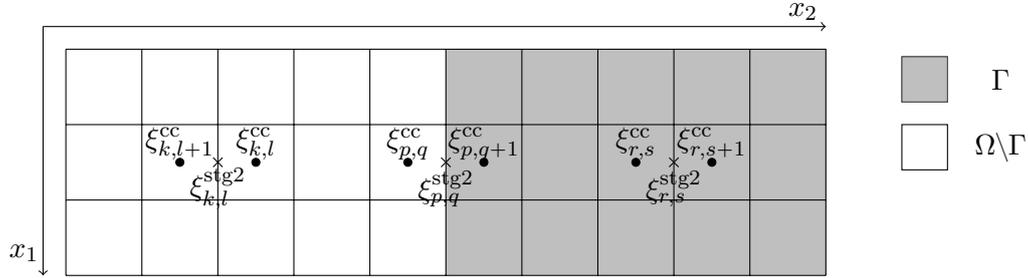


Abbildung 4.4: Drei Fälle der Ableitungen in x_2 -Richtung für ein Gitter X^{cc}

In Abbildung 4.4 sind die drei auftretenden Fälle für die Lage der approximierten Ableitungswerte dargestellt. Der Punkt $\xi_{p,q}^{\text{stg}2}$ liegt zwischen dem äußeren Punkt $\xi_{p,q}^{\text{cc}} \in \Omega \setminus \Gamma$ und dem inneren Punkt $\xi_{p,q+1}^{\text{cc}} \in \Gamma$. Mit der Neumann-Randbedingung wird hier $\frac{\partial u}{\partial x_2}(\xi_{p,q}^{\text{stg}2}) = 0$ gesetzt. Der Punkt $\xi_{r,s}^{\text{stg}2}$ liegt im Innern der Segmentierung Γ . Der Wert für die Ableitung wird wie gewohnt durch den zentralen Differenzenquotienten $\frac{\partial u}{\partial x_2}(\xi_{r,s}^{\text{stg}2}) \approx \frac{u(\xi_{p,q+1}^{\text{cc}}) - u(\xi_{p,q}^{\text{cc}})}{h_2}$ berechnet. Die Ableitung im Punkt $\xi_{k,l}^{\text{stg}2} \in \Omega \setminus \Gamma$ soll nicht berücksichtigt werden und wird Null gesetzt.

Es sollen also Maskierungen der staggered Gitters aufgestellt werden, die nur die inneren Punkte der Segmentierung in den Regularisierungsterm einfließen lässt. Mit punktweiser Multiplikation der Matrizen $B_1^\Gamma \in \mathbb{R}^{(m_1-1) \times m_2}$ und $B_2^\Gamma \in \mathbb{R}^{m_1 \times (m_2-1)}$ mit

$$B_1^\Gamma(i, j) = \begin{cases} 1 & , \xi_{i,j}^{\text{stg}1} \in \Gamma \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad B_2^\Gamma(i, j) = \begin{cases} 1 & , \xi_{i,j}^{\text{stg}2} \in \Gamma \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

an die jeweiligen eindimensionalen Ableitungen wird genau dieses realisiert.

Die punktweise Multiplikation erfolgt wie zuvor durch die Diagonalmatrix. Die Matrix

$$B_{x_1}^\Gamma = \text{diag}(\text{vec}(B_1^\Gamma)) \in \mathbb{R}^{(m_1-1)m_2 \times (m_1-1)m_2}$$

erfüllt die Maskierung der eindimensionalen Ableitung $D_{x_1} u_i$. Wie zuvor erhält man hieraus zunächst die Matrix

$$B_{x_1}^\Gamma = I_2 \otimes B_{x_1}^\Gamma \in \mathbb{R}^{2(m_1-1)m_2 \times 2(m_1-1)m_2}$$

für die Maskierung der eindimensionalen Ableitung von u . In x_2 -Richtung gilt analog

$$B_{x_2}^\Gamma = \text{diag}(\text{vec}(B_2^\Gamma)) \in \mathbb{R}^{m_1(m_2-1) \times m_1(m_2-1)}$$

$$B_{x_2}^\Gamma = I_2 \otimes B_{x_2}^\Gamma \in \mathbb{R}^{2m_1(m_2-1) \times 2m_1(m_2-1)}.$$

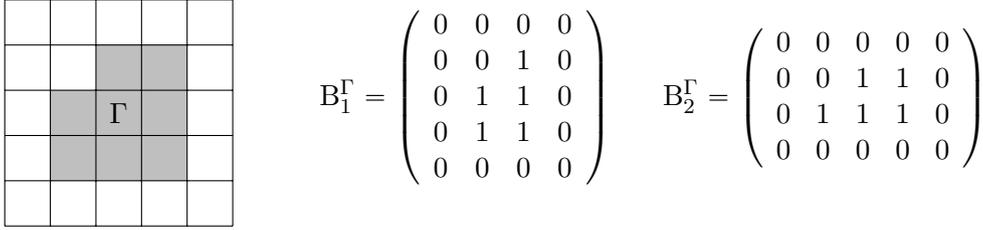


Abbildung 4.5: Maskierungen \mathbf{B}_1^Γ und \mathbf{B}_2^Γ für eine beispielhafte Segmentierung Γ

Schließlich enthält die Blockmatrix

$$\mathbf{B}^\Gamma = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{x_1}^\Gamma & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_{x_2}^\Gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2(m_1-1)m_2+2m_1(m_2-1) \times 2(m_1-1)m_2+2m_1(m_2-1)}$$

die Maskierung für den gesamten zweidimensionalen Ableitungsoperator \mathbf{D} . Analog lässt sich die Matrix $\mathbf{B}^{\Omega \setminus \Gamma}$ für die Maskierung von $\Omega \setminus \Gamma$ auf den staggered Gittern aufstellen. Die Matrix \mathbf{B}^Ω ist die Einheitsmatrix der entsprechenden Größe.

Der diskrete diffusive Regularisierer (4.5) wird nun zum diskreten inhomogenen Regularisierer

$$\mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Gamma](u) = h_1 h_2 u^\top \mathbf{A}_\delta^\Gamma u, \quad \text{mit } \mathbf{A}_\delta^\Gamma = \mathbf{D}^\top \mathbf{B}^\Gamma \text{diag}(d^\top \mathbf{M}) \mathbf{B}^\Gamma \mathbf{D}$$

erweitert, hier beispielhaft für die Regularisierung auf der Randregion S im Innern der Segmentierung Γ .

4.5.3 Aufteilung der diskreten Verrückung in Normalen- und Tangentialrichtung

Der letzte Schritt zur Aufstellung des diskreten richtungsabhängigen Regularisierers ist die Aufteilung der Verrückung u in Normalen- und Tangentialrichtung in der Umgebung des Randes. Es sei das diskrete Normalenfeld $\mathbf{n}(x) = (\mathbf{n}_1(x), \mathbf{n}_2(x)) \in \mathbb{R}^{m_1 \times 2m_2}$ gegeben. Hier gibt $\mathbf{n}_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ den Anteil in x_1 -Richtung und $\mathbf{n}_2 \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ den Anteil in x_2 -Richtung an.

Es definiere $P_\perp(u) = (P_{1\perp}(u), P_{2\perp}(u))$ die Funktion, die der Verrückung u ihren Normalenanteil zuordnet. Dann gibt $P_\parallel := \text{id} - P_\perp$ den Tangentialanteil der Verrückung an. Nach Gleichung (3.3.1) gewichtet P_\perp die Normalenrichtung mit dem Skalarprodukt $\langle n(x), u(x) \rangle$. Setzt man im Skalarprodukt $n(x) = \mathbf{n}_1(x) + \mathbf{n}_2(x)$ und $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, so gilt aufgrund der Orthogonalität von $\mathbf{n}_1 \perp u_2$ und $\mathbf{n}_2 \perp u_1$

$$\langle \mathbf{n}_1(x) + \mathbf{n}_2(x), u_1(x) + u_2(x) \rangle = \langle \mathbf{n}_1, u_1 \rangle + \langle \mathbf{n}_2, u_2 \rangle.$$

Wie zuvor wird für die punktweise Multiplikation in der Matrixschreibweise die Diagonalmatrix genutzt. Die Funktion $P_{i\perp}$ für $i = 1, 2$ kann durch

$$P_{i\perp}(u) = \text{diag}(\mathbf{n}_i)(\text{diag}(\mathbf{n}_1), \text{diag}(\mathbf{n}_2))u$$

beschrieben werden. Die Berechnung des Skalarprodukts geschieht durch Multiplikation mit der Matrix $(\text{diag}(n_1), \text{diag}(n_2))$. Durch Multiplikation mit der Diagonalmatrix $\text{diag}(n_i)$ geht der Richtungsanteil $n_i(x)$ in den Term mit ein.

Für die Ableitungen von P_\perp und P_\parallel gilt

$$\begin{aligned}\nabla P_\perp(u) &= \begin{pmatrix} \text{diag}(n_1)(\text{diag}(n_1), \text{diag}(n_2)) \\ \text{diag}(n_2)(\text{diag}(n_1), \text{diag}(n_2)) \end{pmatrix} \\ \nabla P_\parallel(u) &= (\mathbf{I}_{m_1 m_2}, \mathbf{I}_{m_1 m_2}) - \begin{pmatrix} \text{diag}(n_1)(\text{diag}(n_1), \text{diag}(n_2)) \\ \text{diag}(n_2)(\text{diag}(n_1), \text{diag}(n_2)) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4.5.4 Aufstellung des diskreten richtungsabhängigen Regularisierers

Schließlich sind alle zu berücksichtigenden Komponenten für den richtungsabhängigen Regularisierer gegeben. Mit den verschiedenen gewichteten diffusiven Regularisierern ist

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_h^{\text{DDR}}(u) &= \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[1-d, \Omega](u) + \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Omega](P_\perp(u)) \\ &\quad + \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Gamma](P_\parallel(u)) + \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Omega \setminus \Gamma](P_\parallel(u))\end{aligned}$$

die Entsprechung der kontinuierlichen Form (3.1) des Regularisierers nach Schmidt-Richberg.

Für die Ableitungen müssen die inneren Ableitungen berücksichtigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla \mathcal{S}_h^{\text{DDR}}(u) &= \nabla \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[1-d, \Omega](u) + \nabla P_\perp(u) \nabla \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Omega](P_\perp(u)) \\ &\quad + \nabla P_\parallel(u) \nabla \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Gamma](P_\parallel(u)) + \nabla P_\parallel(u) \nabla \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Omega \setminus \Gamma](P_\parallel(u))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathcal{S}_h^{\text{DDR}}(u) &= \nabla^2 \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[1-d, \Omega](u) + \nabla P_\perp(u)^\top \nabla P_\perp(u) \nabla^2 \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Omega](P_\perp(u)) \\ &\quad + \nabla P_\parallel(u)^\top \nabla P_\parallel(u) \nabla^2 \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Gamma](P_\parallel(u)) \\ &\quad + \nabla P_\parallel(u)^\top \nabla P_\parallel(u) \nabla^2 \mathcal{S}_h^{\text{diff}}[d, \Omega \setminus \Gamma](P_\parallel(u)).\end{aligned}$$

5 Optimierung

Dieses Kapitel führt die Methoden ein, mit denen das diskretisierte mathematische Problem (2.1) gelöst wird.

Für die Optimierung der Deformation φ wird von einer Startdeformation $\varphi_0 = 0$ ausgegangen und iterativ die Deformation $\varphi_{k+1} = \varphi_k + \alpha_k p_k$ bestimmt, für die $\mathcal{J}(R, T, \varphi_{k+1}) < \mathcal{J}(R, T, \varphi_k)$ gilt. Die Bestimmung der Suchrichtung p_k und passender Schrittweite α_k sowie die Abbruchbedingungen des Algorithmus werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

5.1 Gauß-Newton-Verfahren

Das Gauß-Newton-Verfahren ist eng verwandt mit dem Newton-Verfahren und kann als eine Vereinfachung desselben angesehen werden. Zunächst wird das Newton-Verfahren erklärt. Anschließend erfolgt die Spezialisierung zum Gauß-Newton-Verfahren.

Newton-Verfahren

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Das Newton-Verfahren basiert auf der Taylorapproximation

$$f(x+p) = f(x) + \underbrace{\nabla f(x)^\top p + \frac{1}{2} p^\top \nabla^2 f(x) p}_{=: \tilde{f}(p)} + \mathcal{O}(\|p\|^3)$$

der zweimal stetig differenzierbaren Zielfunktion f . Der Ansatz des Verfahrens ist, als Suchrichtung p die Richtung des Minimums der (insbesondere strikt konvexen) quadratischen Approximation $\tilde{f}(p)$ zu wählen. Die für ein Minimum notwendige Bedingung erster Ordnung liefert $\nabla_p \tilde{f}(p) = \nabla f(x) + \nabla^2 f(x) p = 0$. Durch Umstellen erhält man die Newton-Gleichung

$$\nabla^2 f(x) p = -\nabla f(x),$$

deren Lösung p die Abstiegsrichtung des Newton-Verfahrens ist.

Die Berechnung der benötigten zweiten Ableitung ist im Fall des Distanzmaßes $\mathcal{D}_h^{\text{SSD}}$ kostenintensiv und aufwendig. Um dies zu umgehen wird im nächsten Abschnitt das Gauß-Newton-Verfahren erläutert, welches ohne eine explizite zweite Ableitung auskommt.

Erweiterung zum Gauß-Newton-Verfahren

Das Gauß-Newton-Verfahren eignet sich als Spezialisierung des Newton-Verfahrens für

die Optimierung eines sogenannten *Least-Squares*-Problems $\min_x \{f(x) = \frac{1}{2}\|r(x)\|^2\}$, wobei $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein Residualvektor ist. Für die Ableitungen der Funktion f gilt

$$\nabla f(x) = J(x)^\top r(x) \quad \text{und} \quad \nabla^2 f(x) = J(x)^\top J(x) + \sum_{j=1}^m r_j(x) \nabla^2 r_j(x),$$

wobei $r_j(x)$ die Komponenten des Residuums r sind und $J(x) = \begin{pmatrix} \nabla r_1(x)^\top \\ \vdots \\ \nabla r_m(x)^\top \end{pmatrix}$ die Jacobimatrix ist.

In [14] wurde gezeigt, dass insbesondere nahe des Minimums der Einfluss des ersten Summanden größer als der des Zweiten ist. Daher ist die Verwendung der approximierten zweiten Ableitung $\nabla^2 f(x) \approx J(x)^\top J(x)$ im Gauß-Newton-Verfahren gerechtfertigt. Statt der Newton-Gleichung wird die Gleichung

$$J_k^\top J_k p_k = -J_k r_k$$

zur Bestimmung der Suchrichtung p_k gelöst.

Das verwendete Distanzmaß hat mit $r := T - R$ die Form $\mathcal{D}_h^{\text{SSD}}(R, T) = h_1 h_2 r^\top r = h_1 h_2 \|r\|_2^2$, weshalb das Gauß-Newton-Verfahren mit approximierter Ableitung

$$\nabla^2 \mathcal{D}_{h, \text{approx}}^{\text{SSD}}(R, T \circ \varphi) = \frac{2}{h_1 h_2} \nabla(T \circ \varphi_k)^\top \nabla(T \circ \varphi_k)$$

hier Anwendung findet.

Zur Lösung des Registrierungsproblems (2.1) wird die Suchrichtung durch

$$(\nabla^2 \mathcal{D}_{h, \text{approx}}^{\text{SSD}}(R, T \circ \varphi) + \nabla^2 \mathcal{S}^h(u)) p_k = -\nabla \mathcal{J}(R, T, \varphi)$$

bestimmt. Die Bestimmung einer geeigneten Schrittweite für diese Richtung wird im nächsten Abschnitt erläutert.

5.2 Schrittweitenbestimmung

Die Bestimmung der Schrittweite erfolgt iterativ indem geprüft wird, ob die aktuelle Iterierte einen hinreichenden Abstieg bewirkt. Falls nicht wird diese im nächsten Schritt verringert. Als Bedingung für den hinreichenden Abstieg wurde die Armijo-Bedingung

$$f(x_k + \alpha_k p_k) \leq f(x_k) + c \alpha \nabla f_k^\top p_k$$

gewählt. Der Abstieg wird durch die Konstante $c \in (0, 1)$ bestimmt, welche auf $c = 10^{-4}$ gesetzt wurde.

Um die Effizienz des Algorithmus zu erhöhen können durch eine weitere Bedingung (Wolfe-Bedingung, [14]) sehr kleine Schrittweiten ausgeschlossen werden.

5.3 Abbruchkriterien

Bei Erreichen einer hinreichenden Genauigkeit soll das Verfahren abgebrochen werden. Hierfür wurden die Abbruchkriterien nach Gill, Murray und Wright gewählt. Die Bedingungen

$$(K1) \quad \|f(x_{k-1}) - f(x_k)\|_2 < \tau(1 + \|f(x_k)\|)$$

$$(K2) \quad \|x_{k-1} - x_k\| < \sqrt{\tau}(1 + \|x_k\|)$$

$$(K3) \quad \|\nabla f(x_k)\| < \sqrt[3]{\tau}(1 + \|f(x_k)\|)$$

mit dem Toleranzwert τ geben an, ob die aktuelle Iterierte $x_k + 1$ die Funktion f ausreichend minimiert. Für den Fall, dass das Verfahren nicht bzw. nicht schnell genug konvergiert, kommen die Kriterien

$$(K4) \quad \|\nabla f(x_k)\| < \epsilon$$

$$(K5) \quad k > k_{\max}$$

hinzu, wobei ϵ die Maschinengenauigkeit und k_{\max} die vorher festgelegte maximale Anzahl an Iterationsschritten sind. Das Verfahren wird abgebrochen, falls $((K1) \wedge (K2) \wedge (K3)) \vee (K4) \vee (K5)$ gilt.

6 Numerische Experimente

In diesem Kapitel wird der Einsatz der richtungsabhängigen Regularisierung anhand von numerischen Experimenten evaluiert. Die im Folgenden aufgeführten Ergebnisse und Bilder stammen aus einer Implementierung in MATLAB. Zunächst wird der Ansatz an synthetischen Daten getestet. Anschließend werden Tests auf mittels Computertomographie aufgenommenen zweidimensionalen Schnittbildern einer menschlichen Lunge durchgeführt. Für jeden der Datensätze wurde die Registrierung sowohl mit dem richtungsabhängigen Regularisierer als auch mit dem diffusiven Regularisierer als Vergleichsverfahren durchgeführt. Der jeweilige Regularisierungsparameter α wurde von Hand gewählt.

6.1 Anwendung auf synthetische Daten

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Anwendung des richtungsabhängigen Regularisierers auf synthetische Daten vorgestellt. Als Referenzbild wurde ein Bild eines Rechtecks mit Grauwertgradient gewählt. Im Template wurde dieses Rechteck an einer inneren Kante geteilt und die zwei Segmente entgegengesetzt verschoben (vgl. Abb. 6.1). Für eine zweite Registrierung wurden Referenz und Template jeweils um 30° gedreht (vgl. Abb. 6.3).

Die Registrierungen des ungedrehten Datensatzes wurden mit dem Regularisierungsparameter $\alpha = 10^2$ durchgeführt. Die Ergebnisse der Registrierungen sowie der Anteil des Wertes vom ursprünglichen Wert des Distanzmaßes sind in Tabelle 6.1 dargestellt. Hier zeigt sich eine bessere Registrierung durch richtungsabhängige Regularisierung: Der Wert der Zielfunktion und des Distanzmaßes konnte um ein Vielfaches mehr reduziert werden, als durch diffusive Regularisierung. Abbildung 6.2 zeigt das deformierte Template und das Deformationsfeld der Registrierung des ersten Datensatzes mit richtungsabhängigem bzw. diffusivem Regularisierer. Auf den ersten Blick ist zu erkennen, dass durch Regularisierung mit \mathcal{S}^{DDR} eine große Ähnlichkeit mit dem Referenzbild entstanden ist, während durch die globale diffusive Regularisierung noch eine große Differenz zur Referenz besteht. Die erwartete Unstetigkeit im Deformationsfeld der richtungsabhängigen Regularisierung ist zu erkennen. Durch den diffusiven Regularisierer sind Wirbel im Deformationsfeld entstanden. Dennoch ist durch richtungsabhängige Regularisierung noch keine perfekte Übereinstimmung mit der Referenz erreicht worden, als bei Registrierung der ungedrehten Bilder. Betrachtet man das deformierte Template genauer, so ist erkennbar, dass die beiden Blöcke jeweils wenige Pixel zu wenig verschoben wurden. Der Abbruch beider Registrierungen erfolgte nicht durch die gewünschten Abbruchkriterien nach Gill, Murray und Wright (s. Abschnitt 5.3), sondern auf Grund einer hohen Iterationszahl im Algorithmus der Schrittweitenbestimmung. Die Schrittweite hatte zum

Zeitpunkt des Abbruchs eine Größenordnung von 10^{-10} , was numerisch nahe Null liegt. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass die Deformationen jeweils nahe eines lokalen Minimums der Zielfunktion lagen.

In Abbildung 6.4 sind die Ergebnisse der Registrierung der um 30° gedrehten Bilder dargestellt. Hier wurde der Regularisierungsparameter $\alpha = 10^3$ gewählt. Auf den ersten Blick sieht man, dass beide Regularisierungsansätze bei der Registrierung der Bilder gescheitert sind. Die Rechtecke sind auf den deformierten Templatebildern verzogen und es besteht weiterhin eine große Differenz zum Referenzbild. Beide Registrierungen wurden vor Erreichen der Abbruchbedingungen auf Grund von kleinen Schrittweiten der Größenordnung 10^{-10} abgebrochen. Tabelle 6.2 zeigt die Ergebnisse der Registrierungen. Die Distanz konnte durch beide Registrierungsansätze nur auf ca. 40% des Ausgangswertes verringert werden, was im Gegensatz zur Registrierung der vorigen Datensätze ein schlechteres Ergebnis ist. Die Regularisierung mit \mathcal{S}^{DDR} lieferte zudem ein wenig schlechtere Werte als die globale diffusive Regularisierung.

Obwohl sich die beiden Datensätze nur durch die Drehung unterschieden, ist insbesondere durch Regularisierung mit \mathcal{S}^{DDR} bei Registrierung der gedrehten Bilder ein viel schlechteres Registrierungsergebnis erreicht worden. Ein möglicher Grund dafür könnten die Gradienten der Bilder sein. Im ersten Datensatz lagen die Gradienten ausschließlich parallel zum Gitter, was bei den gedrehten Bildern nicht mehr der Fall ist. Möglicherweise wird hierdurch auf Grund der Diskretisierungsweise das Problem numerisch schlechter zu lösen.

	Registrierung mit \mathcal{S}^{DDR}		Registrierung mit $\mathcal{S}^{\text{diff}}$	
	Ergebnis der Registrierung	Anteil des Startwertes	Ergebnis der Registrierung	Anteil des Startwertes
$\mathcal{J}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi_{\min})$	1.1288	4.80%	12.6844	53.97%
$\mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi_{\min})$	0.0570	0.24%	7.5052	31.94%
$\mathcal{S}(u_{\min})$	0.0071		0.0518	

Tabelle 6.1: Ergebnisse der Registrierung der ungedrehten synthetischen Daten

	Registrierung mit \mathcal{S}^{DDR}		Registrierung mit $\mathcal{S}^{\text{diff}}$	
	Ergebnis der Registrierung	Anteil des Startwertes	Ergebnis der Registrierung	Anteil des Startwertes
$\mathcal{J}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi_{\min})$	191.9038	60.65%	185.0286	58.48%
$\mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi_{\min})$	129.9081	41.06%	121.0459	38.26%
$\mathcal{S}(u_{\min})$	0.0630		0.0640	

Tabelle 6.2: Ergebnisse der Registrierung der um 30° gedrehten synthetischen Daten

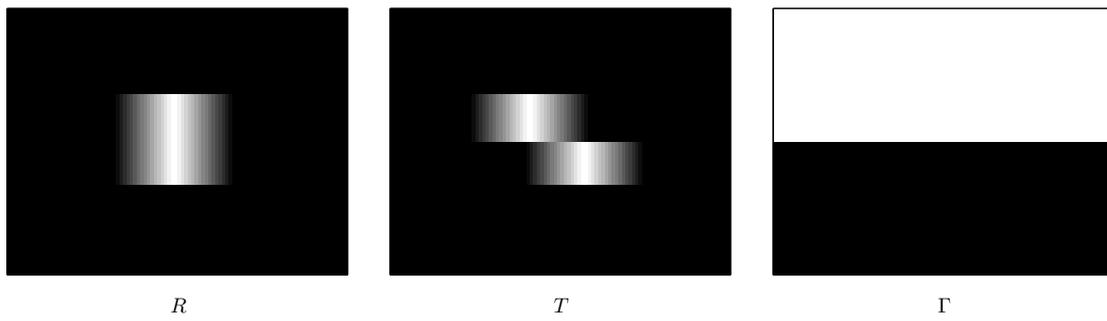


Abbildung 6.1: Referenzbild, Templatebild und Segmentierung Γ

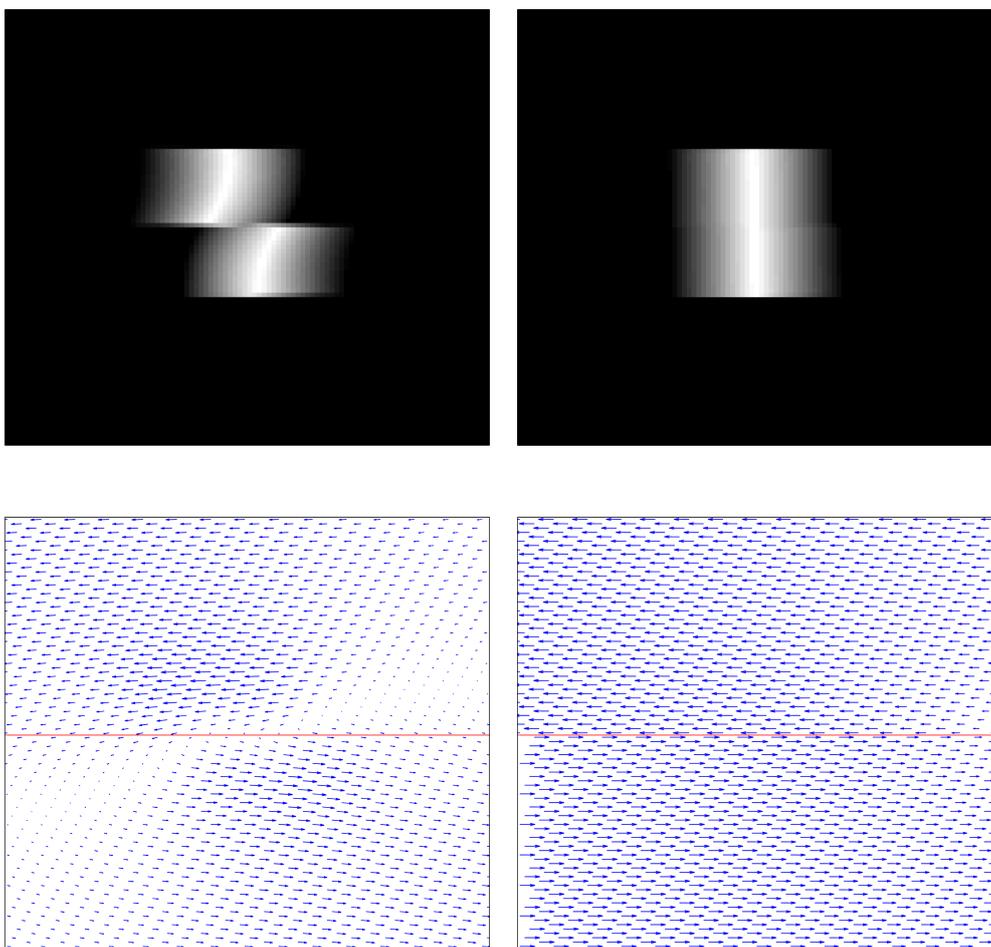


Abbildung 6.2: Ergebnisse der Registrierung des ungedrehten synthetischen Datensatzes. oben: deformiertes Template, unten: Deformationsfeld; links: Registrierung mit diffusiver Regularisierung, rechts: Registrierung mit richtungsabhängiger Regularisierung.

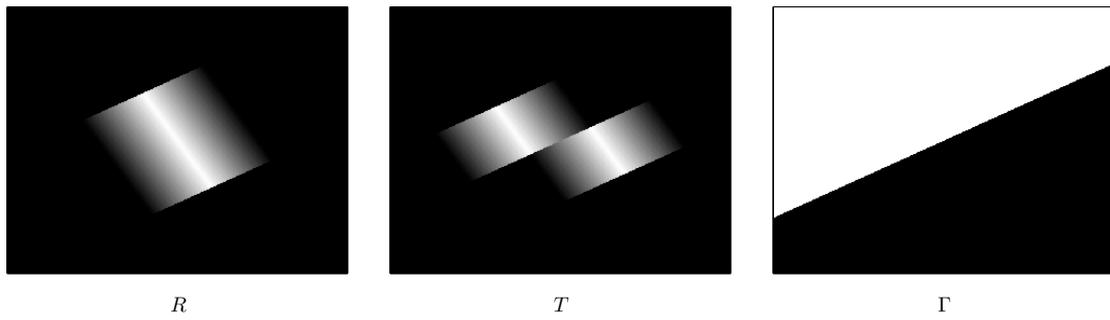


Abbildung 6.3: Referenzbild, Templatebild und Segmentierung Γ

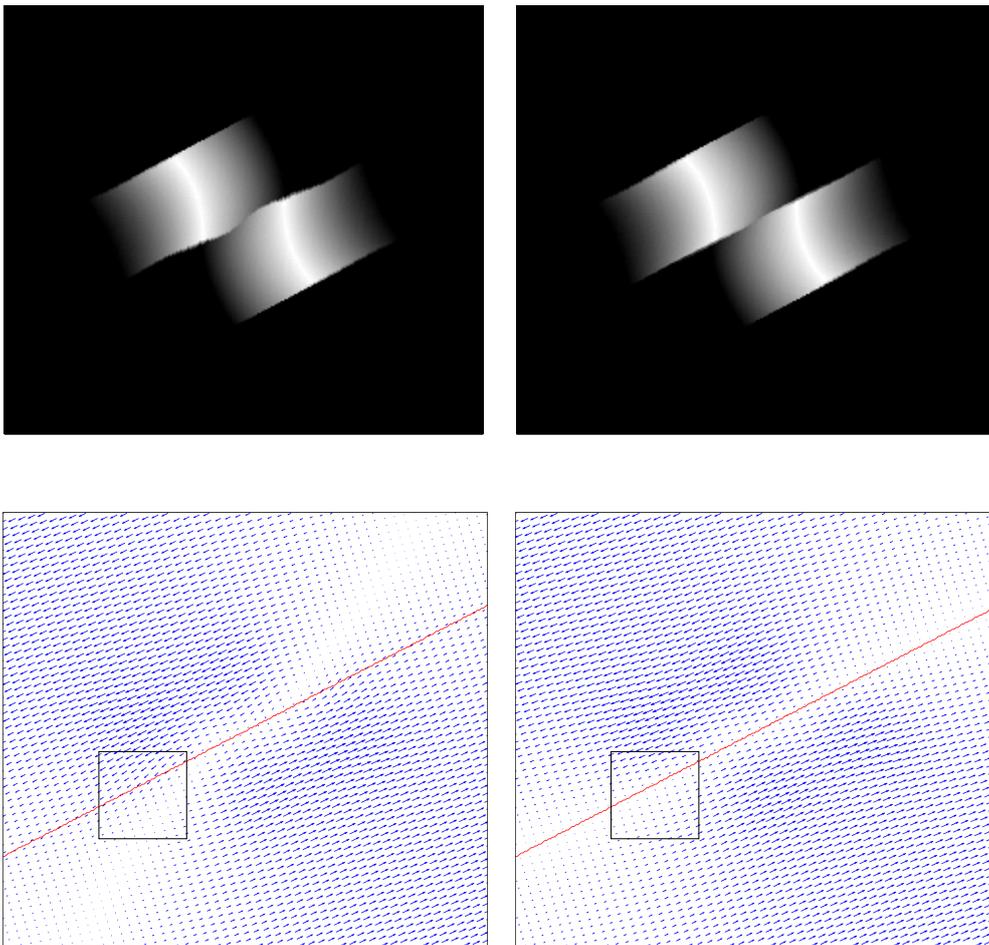


Abbildung 6.4: Ergebnisse der Registrierung des gedrehten synthetischen Datensatzes. oben: deformiertes Template, unten: Deformationsfeld; links: Registrierung mit diffusiver Regularisierung, rechts: Registrierung mit richtungsabhängiger Regularisierung. Die in den Deformationsfeldern gekennzeichneten Ausschnitte sind vergrößert in Abbildung 6.5 zu sehen.

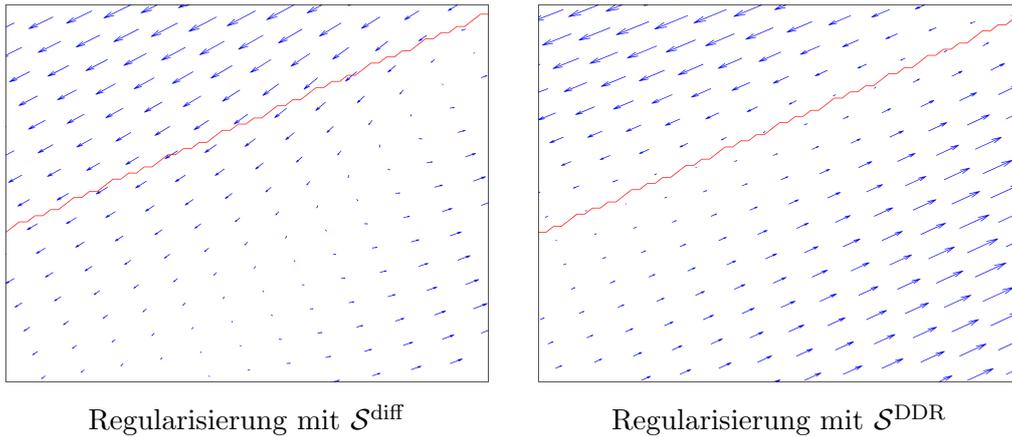


Abbildung 6.5: Ausschnitt des Deformationsfeldes aus der Registrierung mit globaler diffusiver Regularisierung (links) und mit richtungsabhängiger Regularisierung (rechts)

Die gewünschte Eigenschaft der richtungsabhängigen Regularisierung ist in Abbildung 6.5 zu erkennen. Das Deformationsfeld ist an der Grenze der Segmentierung in Tangentialrichtung unstetig, während durch globale diffusive Regularisierung Wirbel entstanden sind. Es ist jedoch zu beobachten, dass die Verrückung des durch \mathcal{S}^{DDR} geglätteten Deformationsfeldes in Nähe des Randes der Segmentierung kleiner werden. Dieses Phänomen trat bei Registrierung der ungedrehten Bilder nicht auf. Dies deutet darauf hin, dass die Entkopplung der Tangentialanteile bzw. Kopplung der Normalenanteile abhängig von der Orientierung des Gitters ist.

6.2 Anwendung auf CT-Daten der Lunge

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Registrierungen von Lungenbildern gezeigt. Die Bilder wurden mittels Computertomographie aufgenommen und zeigen zwei coronale Schichten einer menschlichen Lunge zu zwei verschiedenen Zeitpunkten des Atemzyklus (vgl. Abbildung 6.6).

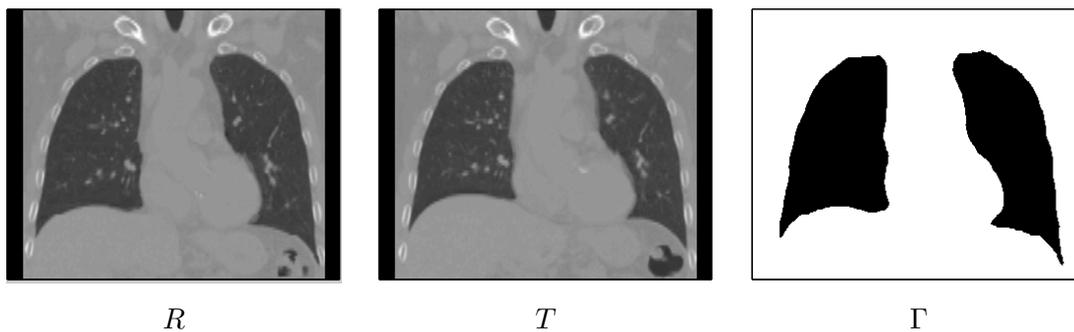


Abbildung 6.6: Referenzbild, Templatebild und Segmentierung der CT-Lungendaten

Auf den Bildern sind je zwei Lungenflügel und der diese umgebende Brustkorb in Form von Querschnitten einzelner Rippen erkennbar. Das die Lungen umgebende Gewebe ist wenig Kontrastreich. Innerhalb der Lungen sind Bronchialgefäße zu erkennen.

	Registrierung mit \mathcal{S}^{DDR}		Registrierung mit $\mathcal{S}^{\text{diff}}$	
	Ergebnis der Registrierung	Anteil des Startwertes	Ergebnis der Registrierung	Anteil des Startwertes
$\mathcal{J}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi_{\min})$	196.5264	26.32%	141.3731	15.37%
$\mathcal{D}^{\text{SSD}}(\mathcal{R}, \mathcal{T} \circ \varphi_{\min})$	90.4455	12.34%	78.0651	8.29%
$\mathcal{S}(u_{\min})$	0.0063		0.0633	

Tabelle 6.3: Ergebnisse der Registrierung der CT-Lungendaten

Für die Registrierungen wurde jeweils der Regularisierungsparameter $\alpha = 10^3$ gewählt. Die Ergebnisse der Registrierung sind in Tabelle 6.3 dargestellt. Das Distanzmaß vor der Registrierung betrug 888.6368. Abbildung 6.7 zeigt die entstandenen deformierten Templatebilder, die Differenzbilder sowie die berechneten Deformationsfelder. In den Deformationsfeldern ist der Rand der Segmentierung Γ der Lunge eingezeichnet.

Anhand der Reduktion des Distanzmaßes kann keine Verbesserung des Registrierungsergebnisses durch die richtungsabhängige Regularisierung gezeigt werden. Durch Registrierung mit $\mathcal{S}^{\text{diff}}$ konnte der Wert des Distanzmaßes auf 8.29% des Ausgangswertes verringert werden, während der aus der Registrierung mit \mathcal{S}^{DDR} stammende Wert mit 12.34% des Ausgangswertes höher ist.

Beide Registrierungen erreichten nicht die in Abschnitt 5.3 genannten Abbruchkriterien, sondern wurden aufgrund einer zu kleinen Schrittweite der Größenordnung 10^{-10} abgebrochen. Die hohe Iterationszahl im Algorithmus zur Schrittweitenbestimmung kann aus der Lage des Deformationsfeldes nahe eines lokalen Minimums resultieren.

Bei Betrachtung der jeweiligen Differenzbilder ist erkennbar, welche Regionen des deformierten Templates die größte Distanz zum Referenzbild aufweisen. Mit beiden Regularisierungsansätzen ist es kaum gelungen, die untere Spitze des auf den Bildern rechts gelegenen Lungenflügels zu registrieren. An dieser Stelle ist die gleitende Bewegung der Lunge auf den Testbildern klar erkennbar: der untere Lungenlappen liegt relativ zur untersten zu sehenden Rippe auf dem Templatebild höher als auf dem Referenzbild.

Insgesamt ist erkennbar, dass das diffusiv geglättete Deformationsfeld besonders außerhalb der Segmentierung der Lunge eine konstant höhere Verrückung aufweist. In dem Deformationsfeld aus der richtungsabhängigen Regularisierung sind die Verrückungen innerhalb der Segmentierung ähnlich groß wie im diffusiv geglätteten. Außerhalb der Segmentierung weist es geringere Verrückungen auf, was in den in Abbildung 6.8 gezeigten Ausschnitten gut erkennbar ist. Diese Beobachtung ist ein Hinweis auf die erfolgreiche Entkopplung der Regularisierung in Tangentialrichtung.

Im aus der Registrierung mit \mathcal{S}^{DDR} stammenden Differenzbild ist außerdem erkennbar, dass jeweils am unteren Rand der beiden Lungenflügel eine relativ große Differenz

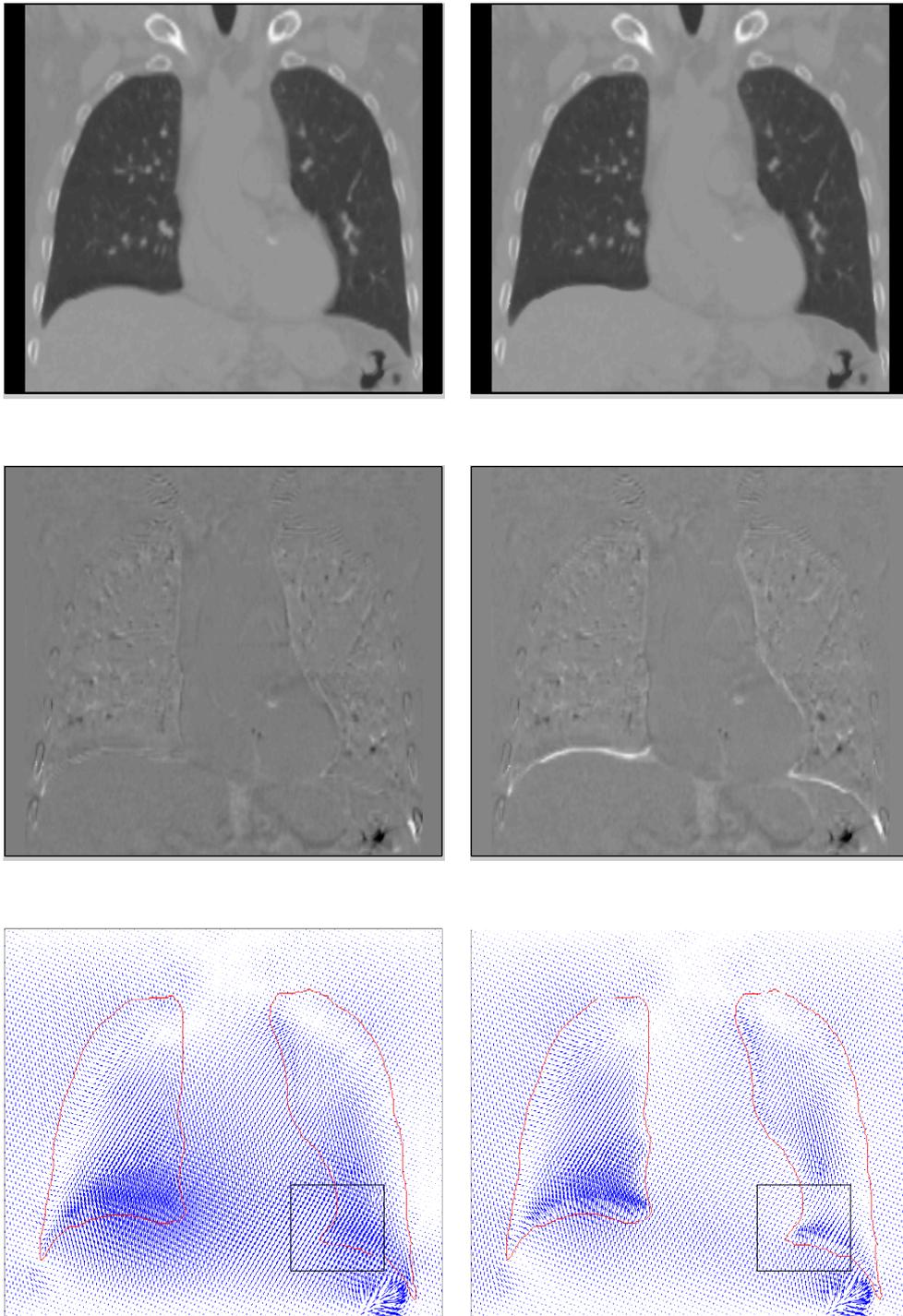


Abbildung 6.7: Deformiertes Template, Differenzbild und Deformationsfeld der Registrierung mit diffusivem Regularisierer (links) und mit richtungsabhängigem Regularisierer (rechts). Der in den Deformationsfeldern gekennzeichnete Bereich ist in Abbildung 6.8 vergrößert dargestellt.

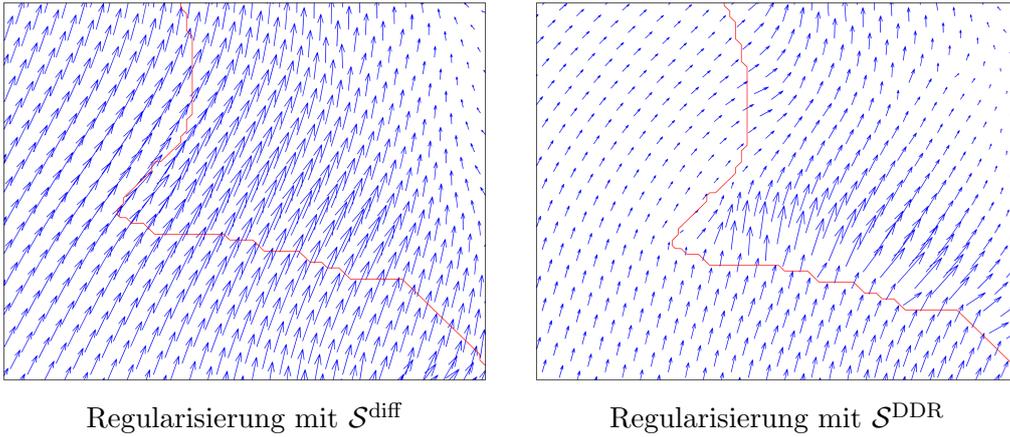


Abbildung 6.8: Ausschnitte des Deformationsfeldes aus der Registrierung mit globaler diffusiver Regularisierung (links) und mit richtungsabhängiger Regularisierung (rechts)

besteht. Das Deformationsfeld zeigt an diesen Stellen, dass in Normalenrichtung zur Segmentierung die Verrückung von außen nach innen stark ansteigt. Dies könnte darauf hindeuten, dass durch Fehler in der Implementierung die Regularisierung in Normalenrichtung ebenfalls teilweise entkoppelt wurde. Im Rahmen dieser Arbeit konnte das nicht überprüft werden.

7 Fazit

In dieser Arbeit wurde der inhomogene, anisotrope Regularisierungsansatz nach Schmidt-Richberg et al. (vgl. [21], [22]) zur Registrierung von gleitenden Objekten vorgestellt und getestet. Im Gegensatz zur in [21] gewählten Methode wurde hier der *Discretize-then-Optimize* - Ansatz verwendet. Dafür wurden der Regularisierer und andere benötigte Terme diskretisiert und ein Abstiegsverfahren vorgestellt.

Die Implementierungen in MATLAB wurden an zwei Datensätzen getestet. Die gewünschten Unstetigkeiten am Rand der Segmentierung in Tangentialrichtung waren in den synthetischen Daten gut erkennbar. Auch im Deformationsfeld der Lungendaten ließen sich an erwarteten Stellen Unstetigkeiten feststellen. Für die Registrierung lieferte der richtungsabhängige Regularisierer jedoch teilweise schlechtere Werte als der diffusive Regularisierer.

Die Ergebnisse könnten noch verbessert werden, indem Segmentierungen auch von benachbarten Organen erstellt werden. Durch die Verwendung verschiedener Regularisierer für die unterschiedlichen Segmentierungen könnten für jedes Organ spezifische physikalische Eigenschaften berücksichtigt werden, wie zum Beispiel die elastische Verformbarkeit der Leber durch den elastischen Regularisierer oder die Starrheit des Brustkorbs durch einen Regularisierer, der nur rigide Transformationen zulässt.

Durch die Verwendung eines Multiskalenansatzes kann die Gefahr, während des Optimierungsverfahrens in lokale Minima zu laufen, verringert werden. Um eine sehr kleine Schrittweite, die in den durchgeführten Tests meist der Grund des Abbruchs war, zu vermeiden, kann im Algorithmus der Schrittweitenbestimmung die Wolfe-Bedingung hinzugefügt werden.

Außerdem könnte der Regularisierungsparameter α durch bessere Parameterschätzung an die jeweilige Registrierung angepasst werden. In dieser Arbeit wie auch in [22] wurde der Parameter empirisch bestimmt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die gewünschten Unstetigkeiten im Deformationsfeld erkennbar sind, jedoch von der Orientierung von Gitter, Segmentierung und Gradient des Bildes abhängen. Der Grund für die unterschiedliche Ausprägung der Unstetigkeiten in verschiedenen Richtungen ist noch zu klären. Das Gleitverhalten in Form von Unstetigkeiten im Deformationsfeld konnte erfolgreich nachgewiesen werden.

Glossar

\mathcal{R}	stetiges Referenzbild
\mathcal{T}	stetiges Templatebild
R	diskretes Referenzbild
T	diskretes Templatebild
u	stetige Verrückung
\mathbf{u}	diskrete Verrückung als Matrix
u	vektorierte diskrete Verrückung
φ	Deformation $\varphi(x) := u(x) + x$
\mathcal{D}^{SSD}	Distanzmaß <i>Sum of squared Differences</i>
$\mathcal{D}_h^{\text{SSD}}$	diskretisiertes Distanzmaß <i>Sum of squared Differences</i> für ein Gitter mit Zellenabstand h
$\mathcal{S}^{\text{diff}}$	diffusiver Regularisierer
$\mathcal{S}_h^{\text{diff}}$	diskretisierter diffusiver Regularisierer für ein Gitter mit Zellenabstand h
$\mathcal{S}^{\text{diff}}[\mathbf{d}, \Gamma]$	gewichteter diffusiver Regularisierer für Regularisierung auf der Menge Γ mit Gewichtung \mathbf{d}
\mathcal{S}^{DDR}	richtungsabhängiger Regularisierer nach Schmidt-Richberg
$\mathcal{S}_h^{\text{DDR}}$	diskretisierter richtungsabhängiger Regularisierer für ein Gitter mit Zellenabstand h
Ω	Bildbereich
Γ	Segmentierung
S	Schlauch um den Rand der Segmentierung
δ	Gewichtungsfunktion der Region um den Rand der Segmentierung
$\text{diag}(v)$	Diagonalmatrix (Hauptdiagonale enthält Einträge des Vektors v)
$\text{vec}(M)$	spaltenweise Vektorisierung einer Matrix M
\otimes	Kronecker-Produkt
χ_M	Indikatorfunktion der Menge M
∂M	Rand der Menge M
\ominus	Erosion

Literaturverzeichnis

- [1] A. Bruhn. *Variational Optic Flow Computation Accurate Modelling and Efficient Numerics*. Dissertation, 2006.
- [2] A. Derksen, S. Heldmann, T. Polzin, and B. Berkels. Image registration with sliding motion constraints for 4d ct motion correction. In H. Handels, T. M. Deserno, H.-P. Meinzer, and T. Tolxdorff, editors, *Bildverarbeitung für die Medizin 2015, Algorithmen – Systeme – Anwendungen, Proceedings des Workshops vom 15. bis 17. März 2015 in Lübeck*, Informatik aktuell, pages 335–340, Berlin, Heidelberg, 2015. Springer.
- [3] K. Ens. *Kombinierte Registrierung und Segmentierung*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011.
- [4] R. Freund and R. Hoppe. *Numerische Mathematik 1*. Springer, 2007.
- [5] L. Han, D. Hawkes, and D. Barratt. A hybrid biomechanical model-based image registration method for sliding objects. In *SPIE Medical Imaging*, pages 90340G–90340G. International Society for Optics and Photonics, 2014.
- [6] M. Heinrich, M. Jenkinson, M. Brady, and J. Schnabel. Discontinuity preserving regularisation for variational optical-flow registration using the modified L_p norm. *Medical Image Analysis for the Clinic: A Grand Challenge*, pages 185–194, 2010.
- [7] S. Heldmann, T. Polzin, A. Derksen, and B. Berkels. An image registration framework for sliding motion with piecewise smooth deformations. In *Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, pages 335–347. Springer, 2015.
- [8] P. Keall, G. Mageras, J. Balter, R. Emery, K. Forster, S. Jiang, J. Kapatoes, D. Low, M. Murphy, B. Murray, et al. The management of respiratory motion in radiation oncology report of aapm task group 76a). *Medical physics*, 33(10):3874–3900, 2006.
- [9] J. Liesen and V. Mehrmann. *Lineare Algebra: Ein Lehrbuch über die Theorie mit Blick auf die Praxis*. Springer Studium Mathematik - Bachelor. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.
- [10] H. Lippert. *Lehrbuch Anatomie*. Elsevier, 2011.
- [11] V. Metzler. *Morphologische Dekomposition als universelle Methodik der medizinischen Bildverarbeitung: Grundlagen und praktische Umsetzung*. Fortschritt-Berichte VDI.: Informatik/Kommunikation. VDI-Verlag, 2002.

- [12] J. Modersitzki. *Numerical methods for image registration*. Oxford university press, 2003.
- [13] J. Modersitzki. *FAIR: Flexible Algorithms for Image Registration*. SIAM, 2009.
- [14] J. Nocedal and S. Wright. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [15] J. Olesch. *Bildregistrierung für die navigierte Chirurgie: Spezialisierte Ansätze zur Anwendung in der navigierten Leberchirurgie*. Aktuelle Forschung Medizintechnik – Latest Research in Medical Engineering. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2014.
- [16] T. Pock, M. Urschler, C. Zach, R. Beichel, and H. Bischof. A duality based algorithm for TV-L 1-optical-flow image registration. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2007*, pages 511–518. Springer, 2007.
- [17] P. Remeijer and M. van Herk. Imaging for imrt. In *Image-Guided IMRT*, pages 19–30. Springer, 2006.
- [18] G. Scheffers. *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie: In Zwei Bänden*. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [19] A. Schmidt-Richberg. *Registration Methods for Pulmonary Image Analysis: Integration of Morphological and Physiological Knowledge*. Aktuelle Forschung Medizintechnik. Springer, 2014.
- [20] A. Schmidt-Richberg, J. Ehrhardt, R. Werner, and H. Handels. Slipping objects in image registration: improved motion field estimation with direction-dependent regularization. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention–MICCAI 2009*, pages 755–762. Springer, 2009.
- [21] A. Schmidt-Richberg, J. Ehrhardt, R. Werner, and H. Handels. Direction-dependent regularization for improved estimation of liver and lung motion in 4D image data. In *SPIE Medical Imaging*, pages 76232Y–76232Y. International Society for Optics and Photonics, 2010.
- [22] A. Schmidt-Richberg, R. Werner, H. Handels, and J. Ehrhardt. Estimation of slipping organ motion by registration with direction-dependent regularization. *Medical Image Analysis*, 16(1):150–159, 2012.
- [23] J. Ulysses and A. Conci. Measuring similarity in medical registration. In *IWSSIP 17th International Conference on Systems, Signals and Image Processing*, 2010.
- [24] R. Werner. *Strahlentherapie atmungsbewegter Tumoren: Bewegungsfeldschätzung und Dosisakkumulation anhand von 4D-Bilddaten*. Aktuelle Forschung Medizintechnik – Latest Research in Medical Engineering. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.

- [25] Z. Wu, E. Rietzel, V. Boldea, D. Sarrut, and G. Sharp. Evaluation of deformable registration of patient lung 4DCT with subanatomical region segmentations. *Medical physics*, 35(2):775–781, 2008.
- [26] Y. Xie, M. Chao, and G. Xiong. Deformable image registration of liver with consideration of lung sliding motion. *Medical physics*, 38(10):5351–5361, 2011.