



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
IMAGE COMPUTING

Globale Minimierung des Aktive Konturen Modells auf Basis der Totalen Variation

Global Minimization of the Active Contour Model based on Total Variation

Bachelorarbeit

im Rahmen des Studiengangs
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften
der Universität zu Lübeck

vorgelegt von

Lisa Kerl

ausgegeben und betreut von

Prof. Dr. Jan Modersitzki
Institute of Mathematics and Image Computing

mit Unterstützung von

Dr. Kanglin Chen
Institute of Mathematics and Image Computing

Lübeck, den 8. November 2014

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Lübeck, den 8. November 2014

Lisa Kerl

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Bildsegmentierung mittels aktiver Konturen	3
2.1	Mathematische Grundlagen für die Bildsegmentierung	3
2.2	Das Aktive Konturen Modell	6
2.3	Das Modell der Geodesic Active Contours	7
2.4	Das Mumford-Shah Modell und die Approximation von Chan-Vese	9
3	Die Totale Variation in der Bildverarbeitung	13
3.1	Das Prinzip der Totalen Variation	13
3.2	Das Rudin-Osher-Fatemi-Modell	16
3.3	Das ROF-Modell mit der gewichteten Totalen Variation	20
3.4	Beispiele für die Anwendung im Entrauschen	21
4	Globale Minimierung des Aktive Konturen Modells	23
4.1	Motivation	23
4.2	ROF basiertes Modell	23
4.3	ACWE-basiertes Modell	28
5	Ergebnisse	33
5.1	Abbruchkriterium	33
5.2	Schwellenwertverfahren	33
5.3	Ergebnisse der ROF-basierten Methode	34
5.4	Ergebnisse der ACWE-basierten Methode	37
5.5	Fazit	40
	Literaturverzeichnis	43

1 Einleitung

Die Bildsegmentierung beschäftigt sich damit, ein Bild in die Sammlung seiner enthaltenen Objekte aufzuteilen. Sie stellt ein Problem in der Bildverarbeitung dar und sie ist gleichzeitig die Brücke zwischen der grundlegenden Bildverarbeitung und dem Maschinellen Sehen (Computer Vision), da auf ihrer Grundlage viele komplexere Methoden aufbauen [10]. Die Anwendungen, in denen die Bildsegmentierung genutzt wird, sind zahlreich. In der medizinischen Bildgebung wird sie zur Tumordetektion und für Gewebemessungen verwendet [12]. Sie ist außerdem die Grundlage der Objektdetektion und -erkennung, die die Grundlagen für Anwendungen des Maschinellen Sehens bildet. So können beispielsweise Fußgänger im Straßenverkehr erkannt werden und somit Verkehrskontrollsysteme verbessert werden [15]. Sicherheitssysteme können mit Hilfe der Bildsegmentierung und der darauf basierenden Objekterkennung durch Gesichts- und Fingerabdruckerkennung entwickelt werden [25].

Es gibt viele Wege, die das Segmentierungsproblem zu lösen versuchen. Ein ganz einfaches ist das Schwellenwertverfahren, bei dem das Bild anhand von Schwellenwerten in mehrere Bereiche ähnlicher Helligkeit aufgeteilt wird [21]. Mumford und Shah stellten 1989 ein variationelles Modell [19] auf, das als Segmentierung eine Menge von stückweise glatten Kurven liefert, das jedoch numerisch schwer zu lösen ist. Ein weiterer Ansatz ist das Aktive Konturen Modell, zuerst formuliert von Kass et al [17]. Hier wird eine Initialkontur in einem Bild durch die Gegebenheiten im Bild um die Objekte gelegt, sodass die Konturen am Ende die Objekte umschließen.

Das Aktive Konturen Modell ist ein häufig genutztes Modell in der Bildsegmentierung, hat jedoch einen großen Nachteil: Es hat lokale Minima, die es notwendig machen, für eine optimale Segmentierung eine gute initiale Kontur zu wählen. Bresson et al. entwickelten dann in [5] eine Methode, die über die Verbindung des Entrauschungs-Problems mit dem Segmentierungsproblem, ein globales Minimum für das Aktive Konturen Modell zunächst auf schwarz-weiß Bildern findet. Durch die Verknüpfung dieses Modells mit einer Approximation des Mumford-Shah Funktionals durch Chan-Vese ergibt sich wiederum ein Modell, das auch ein globales Minimum für grauwertige Bilder findet [5]. In ihrem Paper liefern sie auch einen Beweis für das globale Minimum.

Die vorgelegte Arbeit stellt eine Aufarbeitung des Papers von Bresson et al. dar, außerdem formuliert sie die grundlegenden Theorien und die Methoden systematisch. Zunächst werden in den Kapiteln 2 und 3 die grundlegenden Methoden wie die Geodesic-Active-Contours und die Active-Contours-Without-Edges erklärt und auf das Rudin-Osher-Fatemi-Modell und die Totale Variation eingegangen. Dann werden die Methoden von Bresson et al. in Kapitel 4 vorgestellt. Als Teil dieser Aufarbeitung habe ich die Methoden von Bresson et al. implementiert. Diese Implementierung und ihre Ergebnisse werde ich in Kapitel 5 vorstellen.

2 Bildsegmentierung mittels aktiver Konturen

In diesem Kapitel möchte ich kurz auf die mathematischen Grundlagen eingehen, die für diese Arbeit wichtig sind. Außerdem werde ich eine Definition für das Segmentierungsproblem geben und verschiedene Methoden zur Lösung des Problems vorstellen. Diese bilden die Grundlage für die in Kapitel 4 vorgestellten Methoden.

2.1 Mathematische Grundlagen für die Bildsegmentierung

2.1.1 Bilder

Um zu verstehen, wie die Segmentierung funktioniert, ist es zunächst wichtig zu wissen, was überhaupt ein Bild ist. Aubert und Kronprobst [2] beschreiben ein digitales oder diskretes Bild als eine Möglichkeit, die wirklich Welt digital darzustellen, in dem ein Gitter über die Szene gelegt wird und jedes Bildelement (Pixel) die Durchschnittsfarbe bzw. Helligkeit der Fläche, die das Pixel beschreibt, annimmt. Die Auflösung eines digitalen Bildes ist dann die Anzahl der Zeilen M und Spalten N des Gitters. Ein grauwertiges Bild kann dann durch ein Element des $\mathbb{R}^{M \times N}$ in welchem die Helligkeitswerte der Pixel enthalten sind, beschrieben werden. Farbige RGB-Bilder haben dagegen drei Kanäle pro Pixel, so dass jeweils ein Wert für blau, rot und grün gespeichert werden kann [2, p.3f].

Um die Methoden in der Bildverarbeitung auf der Basis kontinuierlicher Methoden zu beschreiben, definiert man ein grauwertiges Bild als eine Abbildung u von einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in die reellen Zahlen. Die Abbildung wird auch als Intensitätsfunktion bezeichnet. Meist handelt sich um nur stückweise stetige Funktionen. Starke Intensitätsänderungen an einer Stellen werden vom Betrachter des Bildes als Kanten bzw. Objektgrenzen wahrgenommen [2]. Ein binäres Bild ist reines schwarz-weiß Bild. Eine Abbildung, die ein solches Bild beschreibt hat eine Bildmenge mit nur zwei Elementen (meistens 0 und 1).

2.1.2 Definitionen und Notationen

Im Zuge dieser Arbeit tauchen einige Räume und Funktionen wiederholt auf, die ich hier kurz erläutern möchte.

Sei Ω ein offenes, beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^N , $N = 1, 2$. Die charakteristische Funktion

$\chi : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ einer Menge $A \subseteq \Omega$ ist gegeben durch:

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{für } x \notin A. \end{cases}$$

In dieser Arbeit werden außerdem folgende Funktionenräume benötigt:

- $C^1(\Omega)$ ist der Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω [14].
- $C^\infty(\Omega)$ ist der Raum der unendlichen oft stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω [14].
- C_0^1 ist der Raum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf Ω [2].
- $C := \{c : [0, 1] \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, c \text{ stückweise } C^1, c(a) = c(b)\}$ Menge der stückweise stetigen Kurven in Ω [2].
- $L^p(\Omega) := \left\{ u : \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}$ für $p \in [0, \infty]$ mit der Norm $\|u\|_{L^p} = [\int_\Omega |u|^p dx]^{1/p}$ [10].

Der Rand einer Menge ω sei durch $\partial\omega$ bezeichnet.

2.1.3 Das Variationsproblem und die Euler-Lagrange-Gleichung

In dieser Arbeit tauchen wiederholt variationelle Modelle auf, die mittels der Theorie der Variationsrechnung gelöst werden können. Deshalb möchte ich hier kurz auf den grundlegenden Lösungsweg eines Variationsproblems eingehen.

Definition 1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, V ein Banachraum, der Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ enthält und $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sei $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ das Funktional

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u, \nabla u) dx.$$

Das Problem

$$\inf_{u \in V} F(u) \tag{2.1}$$

heißt Variationsproblem.

Die Existenz eines Minimums liefert der folgende Satz

Satz 2 (Aubert und Kornprobst [2]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und erfülle die folgenden Bedingungen:

- (i) $f(x, u, \xi) \geq (a(x) + b|u|^p + c|\xi|^p)$ für alle (x, u, ξ) und für einige $a \in L^1(\Omega)$, $b > 0$, $c > 0$, und $p > 1$.

(ii) $\xi \rightarrow f(x, u, \xi)$ ist konvex in (x, u) .

(iii) Es existiert ein u_0 mit $u_0 \in L^1(\Omega)$ und $\nabla u_0 \in L^1(\Omega)$ mit $F(u_0) < \infty$.

Dann hat das Problem (2.1) eine Lösung. Gilt in (ii) strikte Konverxität, dann ist die Lösung eindeutig.

Die Lösung dieses Variationsproblems liefert unter bestimmten Bedingungen die Euler-Lagrange-Gleichung:

Satz 3. Ist $f \in C^1$, $u \in L^1(\Omega)$, $\nabla u \in L^1(\Omega)$ und erfüllt f die folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \xi) \right| &\leq a'(1 + |u|^{p-1} + |\xi|^p), \\ |\nabla_{\xi} f(x, u, \xi)| &\leq a''(1 + |u|^p + |\xi|^{p-1}), \end{aligned}$$

für fast alle x und alle (u, ξ) Konstanten $a', a'' > 0$, dann ist die Lösung u von

$$F'(u) = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u, \nabla u) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{x_1}}(x, u, \nabla u) \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_{x_2}}(x, u, \nabla u) \right) = 0 \quad (2.2)$$

eine Lösung des Problems (2.1).

Gleichung (2.2) heißt Euler-Lagrange-Gleichung.

2.1.4 Das Segmentierungsproblem

Das Problem der Segmentierung eines Bildes wird in [2] als die Aufgabe beschrieben, ein Bild in seine wesentlichen Bestandteile bzw. enthaltenen Objekte aufzuteilen. Die Aufteilung des Bildes erfolgt anhand der Kanten im gegebenen Bild. Diese sind durch große Intensitätssprünge im Bild beschrieben. Um diese Kanten zu finden, gibt es verschiedene Ansätze.

Der erste Ansatz ist, eine Kurve $c \in C$ als Kontur um alle Objekte im Bild zu legen, die sich dann durch Nebenbedingungen gelenkt um die einzelnen Objekte legt. Anhand der Kontur wird dann das Bild segmentiert. Er eignet sich für Bilder, wie das „Münzen“-Bild in Abbildung 2.1(a), da bei diesem Bild die Kanten der Objekte sehr deutlich sind. Dieser Ansatz wurde zuerst von Kass, Witkin und Terzopoulos in [17] erwähnt und umgesetzt. Auf ihr Modell werde ich im Abschnitt 2.2 eingehen.

Der zweite Ansatz unterteilt ein Bild in Regionen von ähnlicher Intensität und trennt diese voneinander als Segmentierung. Das Ergebnis ist ein binäres Bild, das durch seine zwei Regionen die Segmentierung des Initialbildes repräsentiert. Dieser Ansatz ist sinnvoll für Bilder, wie das „Mond“-Bild in Abbildung 2.1(b), da hier die rechte Grenze des Mondes nicht deutlich als Kante erkennbar ist. Mit diesem Ansatz stellten Mumford-Shah ein Modell auf [19], das in dieser Arbeit in Abschnitt 2.4 genauer beschrieben wird.

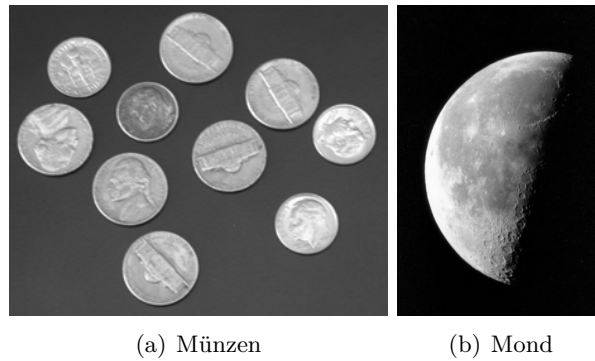


Abbildung 2.1: Beispiele für zwei Bilder, die unterschiedliche Arten von Segmentierungsverfahren fordern.

Quelle: MATLAB version 8.3.0.532 (R2014a)

2.2 Das Aktive Konturen Modell

In diesem und dem nächsten Abschnitt soll es um Methoden gehen, die auf dem Ansatz beruhen, ein Bild anhand der Objektgrenzen zu segmentieren. Die Annahme hinter diesem Ansatz ist, dass die Objekte sich durch große Intensitätsunterschiede voneinander abgrenzen. Diese Grenzen werden im Folgenden als Kanten bezeichnet. Um Kanten zu erkennen, benötigt man eine Kantenfunktion, die für ein Bild, die Kanten erkennt.

2.2.1 Die Kantenfunktion

Eine Kantenfunktion sollte möglichst gute Regularitätsbedingungen besitzen um die Modelle, die sie gewichtet, nicht schwieriger numerisch lösbar zu machen. Da die Modelle üblicherweise minimiert werden, ist es sinnvoll, eine Funktion zu definieren, die Kanten einen möglichst kleinen Wert zuordnet, damit das Energiefunktional an dieser Stelle kleiner wird. Dies motiviert die folgende Aussage.

Eine Kantenfunktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die Kanten über sehr kleine Werte, bzw. Nullwerte angibt, erfüllt folgende Eigenschaften [2, p.173]:

1. g ist stetig differenzierbar und monoton fallend.
2. $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = 0$.

Es gibt verschiedene Funktionen, die diese Bedingungen erfüllen. Je nach Anwendung verwendet man eine andere bei der Implementierung. In dieser Arbeit wird als Kantenfunktion der Cauchy-Zerfall

$$g(s) = \frac{1}{1 + as^2}, \quad a > 0 \tag{2.3}$$

benutzt, da diese auch in [5] vorgeschlagen wird. Zunächst ist im weiteren Verlauf der Arbeit mit g aber allgemein eine Kantenfunktion gemeint, die die obigen Eigenschaften erfüllt.

2.2.2 Das Snake-Modell

Das erste Aktive Konturen Modell stellen Kass, Witkin und Terzopoulos in [17] vor. In diesem wird eine initiale Kontur um die zu segmentierenden Objekte gelegt, die dann mittels Charakteristiken des Bildes unter Kurve in Richtung der Objekte gezogen wird. Diese Charakteristiken sind die Glattheit der Kurve und die Lage von Kanten im Bild u_0 , repräsentiert durch große Gradienten. Die mathematische Formulierung des Modells ist die folgende:

Für $c(q) = (c_1(q), c_2(q)) \in C$ und ein zu segmentierendes Bild $u_0 \in L^1(\Omega)$ definieren Kass et al. in [17] die folgende Energie $E_{\text{snake}} : C \rightarrow \mathbb{R}$, umformuliert in [2]:

$$E_{\text{snake}}(c) = \underbrace{\int_a^b |c'(q)|^2 dq + \beta \int_a^b |c''(q)|^2 dq}_{\text{Interne Energie}} + \underbrace{\lambda \int_a^b g^2(|\nabla u_0(c(q))|) dq}_{\text{Externe Energie}} \quad (2.4)$$

Die Ableitungen der Kurvenfunktion sind durch $c'(q) = \left(\frac{dc_1}{dq}, \frac{dc_2}{dq}\right)$ und $c''(q) = \left(\frac{dc_1'}{dq}, \frac{dc_2'}{dq}\right)$ analog.

Die Energie (2.4) enthält eine interne Energie, die die Glattheit der Kurve lenkt und eine externe Energie, die die Kontur durch äußere Faktoren lenkt. Die Kantenfunktion in der externen Energie sorgt für kleine Werte an großen Gradienten und zieht die Kontur somit zu den Kanten der Objekte hin. Um Unstetigkeiten der Kurve in der zweiten Ordnung (wie z.B. bei Ecken der Fall) zu erlauben muss im zweiten Regularitätsterm $\beta = 0$ gesetzt werden [2, p.174].

Das Snake-Modell birgt einige Nachteile in sich, dennoch ist es die Grundlage für das folgende Modell und wird deshalb hier betrachtet. Zunächst ist das Snake-Modell nicht intrinsisch, also abhängig von der Parametrisierung der Kurve c . Die Regularitätsbedingung in der internen Energie sorgt dafür, dass keine Änderung in der Ausrichtung der Kontur möglich ist. Deshalb kann nur ein (konvexes) Objekt erkannt werden. Außerdem kann man nur ein lokales Minimum für das Segmentierungsproblem finden [2, p.175]. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit einer auf (2.4) basierenden Methode, die die ersten zwei Nachteile umgeht.

2.3 Das Modell der Geodesic Active Contours

Caselles, Kimmel und Sapiro entwickeln in [6] das Aktive Konturen Modell von Kass et al. [17] weiter. Als ersten Schritt setzen sie in (2.4) den Parameter $\beta = 0$, da der Regularisierungseffekt des ersten Terms zur Minimierung der Krümmung genügt [6]. Die resultierende Energie ist allerdings immer noch abhängig von der Parametrisierung der Kurve.

Daraufhin leiten Caselles et al. die folgende Energie her [6]:

$$J_2(c) = \int_0^1 g(|\nabla u_0(c(q))|) |c'(q)| dq \quad (2.5)$$

Den Vorteil dieser Energie liefert der folgende Satz:

Satz 4 (Aubert und Kornprobst [2]). *Die Energie (2.5) ist unabhängig von der Parametrisierung der Kurve c .*

Beweis. nach Aubert und Kornprobst [2]. Ersetze q durch neue Parametrisierung ϕ . Es gelte: $q := \phi(r)$, $\phi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, $\phi' > 0$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} = \phi'(r) \Leftrightarrow d\phi(r) = \phi'(r) dr$$

Dann ist

$$J_2(c) = 2\sqrt{\lambda} \int_a^b g(|\nabla u_0(c(\phi(r)))|) |c'(\phi(r))| d\phi(r)$$

Setze $\bar{c}(r) := c(\phi(r))$:

$$\int_a^b g(|\nabla u_0(\bar{c}(r))|) \underbrace{|c'(\phi(r))| \phi'(r)}_{=|\bar{c}'(r)|} dr$$

Mit der Kettenregel gilt:

$$\int_a^b g(|\nabla u_0(\bar{c}(r))|) |\bar{c}'(r)| dr$$

Die Energie (2.5) hat sich also durch die Reparametrisierung nicht verändert und ist intrinsisch. \square

Vergleicht man (2.5) mit der Euklidischen Länge einer Kurve, die durch $\int_a^b |c'(q)| dq$ gegeben ist, erkennt man, dass das Modell eine neue Länge definiert, die die Euklidische Länge mittels der Kantenfunktion gewichtet. Das Modell kann also weiter umformuliert werden [2]:

$$E_{GAC}(C) = \int_0^{L(C)} g(|\nabla u_0(C(q))|) ds, \text{ mit } ds = |c'(q)| dq.$$

Auf die Minimierung dieser Energie werde ich hier nicht eingehen. In Kapitel 4 wird die Minimierung einer äquivalenten Energie gezeigt.

2.4 Das Mumford-Shah Modell und die Approximation von Chan-Vese

1989 stellten Mumford und Shah in [19] ein variationelles Modell zur Bildsegmentierung auf, das Objekte als Regionen mit ähnlicher Intensität definiert. Die folgenden Ausführungen sind angelehnt an die Zusammenfassung des Modells durch Aubert und Kornprobst in [2, §4.2].

Das Mumford-Shah Modell nutzt den zweiten in Abschnitt 2.1.4 erwähnten Ansatz. Anstatt die Konturen der Objekte über große Gradienten zu erkennen, ist es das Ziel dieser Methode, das Bild in Partitionen zu unterteilen, wobei die Objekte jeweils in einer der Partitionen wiederzufinden sind. Somit kann diese Methode auch auf Bilder angewendet werden, in denen die Objekte keine klaren Kanten haben. Ω sei ein offenes, beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^2 , u_0 beschreibe das Initialbild und es gelte $0 \leq u_0(x) \leq 1$ für alle $x \in \Omega$.

Gesucht ist das Paar (u, K) , bestehend aus dem Bild $u \in L^1(\Omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Menge $K \subset \Omega$ von Unstetigkeitsstellen von u , das das folgende Energiefunktional minimiert [2]:

$$F(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - u_0)^2 dx + \lambda \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \beta \int_K d\sigma, \text{ mit } \lambda, \beta \geq 0 \text{ konstant.} \quad (2.6)$$

Dabei ist $\nabla u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ der Gradient von u . Mumford und Shah stellten die Vermutung auf, dass ein minimierendes K die Vereinigung einer endlichen Menge von $C^{1,1}$ -Kurven ist. Der erste Term repräsentiert die Differenz des Bildes u zu den originalen Daten im Bild u_0 , der zweite Term ist ein Regularisierer, der zu große Variation in den Funktionswerten von u bestraft, und damit glättend wirkt und der letzte Term sorgt dafür, dass K möglichst kurz ist. Das Finden eines Minimierers von (2.6) ist numerisch sehr schwierig. Es gibt allerdings viele Ansätze zur Approximation des Funktionals. Einen möchte ich im folgenden Abschnitt vorstellen.

2.4.1 Das Modell der Active Contours without Edges

Chan und Vese stellen in [11] das Modell der Aktiven Konturen ohne Kanten vor. Dieses Modell approximiert das Mumford-Shah-Modell und enthält dabei schon einige Eigenschaften des Aktiven Konturen Modells. Es wird später die Grundlage für die zweite Methode in Kapitel 4 bilden, weshalb ich es hier kurz vorstellen möchte.

Die Idee des ACWE-Modell ist es, zwei Regionen mit ähnlichen Intensitäten zu bilden, in dem eine Kurve, ähnlich wie bei den Aktiven Konturen, durch die Mittelwerte des Gebietes, das sie umschließt und des äußeren Gebiets geleitet wird. Chan und Vese approximieren das Mumford-Shah Funktional (2.6), in dem sie von u als stückweise konstante Funktion ausgehen. Die Menge K wird in ihrem Modell repräsentiert durch die Kurve $c \subset \Omega$, die den Rand der offenen Teilmenge $\Sigma \subset \Omega$ beschreibt: $c = \partial \Sigma$ [11]. Dabei ist $c \in \mathcal{C}$, wodurch sich schon ein Verbindung zum Aktiven Konturen Modell ergibt. Das Gebiet innerhalb der Kurve ist dann Σ , das Gebiet außerhalb der Kurve $\Omega \setminus \Sigma$. Da u eine stückweise konstante Funktion

sein soll, wird sie die Durchschnittswerte der Intensitäten auf dem inneren Gebiet (a_1) und dem äußeren Gebiet (a_2) annehmen:

$$u = \begin{cases} a_1, & u \in \Sigma, \\ a_2, & u \in \Omega \setminus \bar{\Sigma}. \end{cases}$$

Nun wird der Term in (2.6), der den Gradienten enthält, approximiert durch $\int_{\Omega \setminus c} (u - u_0)^2 dx$ aufgetrennt an der Kurve c :

$$\lambda \int_{\Sigma} |u_0(x) - c_1|^2 dx + \lambda \int_{\Omega \setminus \bar{\Sigma}} |u_0(x) - c_2|^2 dx$$

Der Term $\alpha \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx$ fällt weg, da für eine stückweise konstante Funktion der Gradient 0 ist, bis auf die Unstetigkeitsstellen, die aber für dieses Integral ausgeschlossen werden. Die Länge von K vereinfacht sich zur Länge der Kurve c , die wie im GAC-Modell über die Ableitung berechnet werden kann. Zusätzlich wurde als Nebenbedingung in [11] die Fläche der inneren Region gewählt. Da diese jedoch in der Praxis automatisch mit der Länge der Kurve minimiert wird, betrachten Chan und Vese [11] nur die folgende Energie $E_{ACWE} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R}^+$ zur Approximation des Mumford-Shah-Funktional:

$$\begin{aligned} E_{ACWE}(a_1, a_2, c) = & \mu \int_{\Omega} |c'(q)| dq \\ & + \lambda \int_{\text{innen}(c)} |u_0(x) - a_1|^2 dx + \lambda \int_{\text{aussen}(c)} |u_0(x) - a_2|^2 dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

mit $\mu \geq 0$ und $\lambda > 0$.

2.4.2 Formulierung in der Level-Set-Form

Bevor Chan und Vese [11] einen Weg zur Suche eines Minimierers von (2.7) zeigen, geben sie das Funktional mittels der Level-Set-Methode an. Hierzu wird $c \in \Omega$ repräsentiert durch die hinreichend glatte Funktion $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Für die Mengen in Ω ergibt sich dann folgendes:

$$\begin{aligned} C = \partial\omega &= \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\} \\ \Sigma = \omega &= \{x \in \Omega : \phi(x) > 0\} \\ \Omega \setminus \bar{\Sigma} &= \Omega \setminus \bar{\omega} = \{x \in \Omega : \phi(x) < 0\} \end{aligned}$$

Dies wird in Abbildung 2.2 verdeutlicht. Nun sind die Heaviside-Funktion und das Dirac-

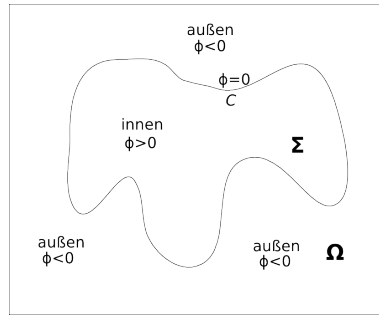


Abbildung 2.2: Visualisierung der Level-Set-Formulierung für die Kurve $C = \{x \in \Omega : \phi(x) = 0\}$. Erstellt nach [11, Fig.2].

Maß nötig, um aus dem Funktional bezüglich ϕ eine Verbindung zu Ω herzustellen:

$$H : \Omega \rightarrow \{0, 1\}, \quad \delta_0 : \Omega \rightarrow \{0, 1\},$$

$$H(z) = \begin{cases} 1, & \text{für } z \geq 0 \\ 0, & \text{für } z < 0 \end{cases} \quad \delta_0 = \frac{d}{dz} H(z).$$

Hier mit lassen sich die einzelnen Komponenten von (2.7) umschreiben.

$$\int_{\phi=0} |c'(q)| dq = \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x))| dx = \int_{\Omega} \delta_0(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| dx.$$

$$\int_{\phi>0} |u_0(x) - c_1|^2 dx = \int_{\Omega} |u_0(x) - c_1|^2 H(\phi(x)) dx.$$

$$\int_{\phi<0} |u_0(x) - c_2|^2 dx = \int_{\Omega} |u_0(x) - c_2|^2 (H(-\phi(x))) dx.$$

Für das ACWE-Modell in der Level-Set-Formulierung mit $\nu = 0$ und $\lambda_1 = \lambda_2$ ergibt sich nun:

$$F(c_1, c_2, \phi) = \mu \int_{\Omega} \delta_0(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| dx +$$

$$\lambda \int_{\Omega} \left(|u_0(x) - c_1|^2 H(\phi(x)) + |u_0(x) - c_2|^2 H(-\phi(x)) \right) dx.$$

Um nun eine Lösung für das Segmentierungsproblem zu finden, suchen Chan und Vese [11] einen Minimierer dieses Funktionals. Mit diesem Optimierungsproblem werde ich mich in Kapitel 4 näher beschäftigen.

3 Die Totale Variation in der Bildverarbeitung

Die Totale Variation findet an vielen Stellen in der Bildverarbeitung Anwendung. Sie wird bei schlecht gestellten Problemen als Regularisierer verwendet. Mehrere Anwendungen wie optischer Fluss, Inpainting und Entrauschen sind zum Beispiel in [4] und [8] aufgeführt und beschrieben. Da die Verwendung in den Segmentiermethoden, die im nächsten Kapitel vorgestellt werden, eng mit der Verwendung im Bildentrauschen zusammenhängt, möchte ich hier, nach einer Einführung in das Prinzip der Totalen Variation, auch auf diese Anwendung eingehen. Zu diesem Zweck werde ich das Modell von Rudin, Osher und Fatemi [22] vorstellen, einmal in seiner klassischen Variante und dann mit seiner dualen Formulierung nach Chambolle [7].

3.1 Das Prinzip der Totalen Variation

Die Total Variation einer Funktion ist ein Maß dafür, wie stark ihre Funktionswerte auf einem beschränkten Gebiet variieren. Für stetig differenzierbare Funktionen ergibt sich die Variation ihrer Funktionswerte aus dem absoluten Betrag ihrer Ableitung. Allgemein kann man die Totale Variation für $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $u \in C^1(\Omega)$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N = 1, 2)$ beschränktes Gebiet, wie folgt definieren, wobei $\text{TV} : C^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\text{TV}[u] := \int_{\Omega} |\nabla u| dx. \tag{3.1}$$

Zur Verdeutlichung des Konzepts ein Beispiel:

Beispiel 5. Sei $\Omega = (0, 2\pi)$, $u : \Omega \rightarrow [-1, 1]$ und $u = \cos(x)$, außerdem $u \in C^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \text{TV}[u] &= \int_0^{2\pi} |\cos'(x)| dx = \int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin(x) dx \\ &= 2 [-\cos(x)]_0^{\pi} = 4. \end{aligned}$$

Die Funktionswerte von $\cos(x)$ variieren auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ also um 4. Das ist auch mittels der Abbildung 3.1 verifizierbar.

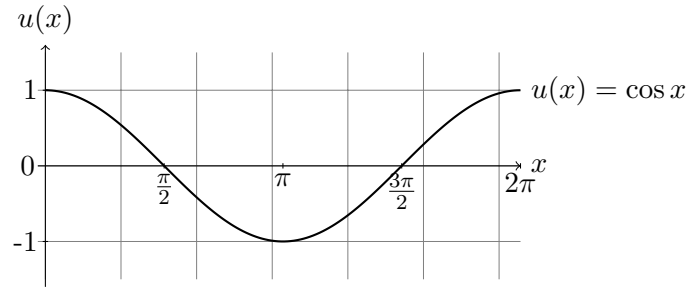


Abbildung 3.1: Funktion u auf dem Intervall $(0, 2\pi)$.

Die stetige Formulierung der Totalen Variation (3.1) eignet sich nicht für nicht-stetig-differenzierbare Funktionen. Da es sich bei den meisten Bildfunktionen jedoch um Funktionen mit Unstetigkeiten handelt, wird eine allgemeinere Formulierung benötigt.

Um die Totale Variation für $u \in L^1(\Omega)$ zu definieren, macht man sich das Konzept der Dualität zu nutze und führt eine Testfunktion $\phi \in C_0^1(\Omega)$. Diese stellt über die Divergenz die Zerlegung von u auf dem entsprechenden Intervall dar.

Die folgende Definition der Totalen Variation ist [2] entnommen und ist bekannt als *duale Formulierung* der Totalen Variation:

Definition 6 (Aubert, Kronprobst in [2]). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N = 1, 2$) ein offenes und beschränktes Gebiet und u eine Funktion in $L^1(\Omega)$. Dann ist die Totale Variation $TV : L^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ von u gegeben durch:*

$$TV[u] := \sup_{\varphi} \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx; \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \in C_0^1(\Omega)^N, |\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}.$$

$\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$ ist die Divergenz der Funktion φ aus $C_0^1(\Omega)^N$ und $|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_x \sqrt{\sum_{i=1}^N \varphi_i^2(x)}$.

Zur Verdeutlichung dieser Definition ein weiteres Beispiel:

Beispiel 7. *Es sei eine stückweise konstante Funktion $f : (-5, 5) \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ gegeben mit*

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-1, 0] \\ 1 & x \in (0, 1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Erkennbar in Abbildung 3.2 ist, dass die Summe der Sprünge von f vier ist. Mithilfe von Definition 6 berechnet man die Totale Variation von f wie folgt: Da die Divergenz im ein-dimensionalen zur Ableitung wird, ist

$$\int_{-5}^5 f \operatorname{div} \varphi dx = \int_{-5}^5 f \varphi' dx$$

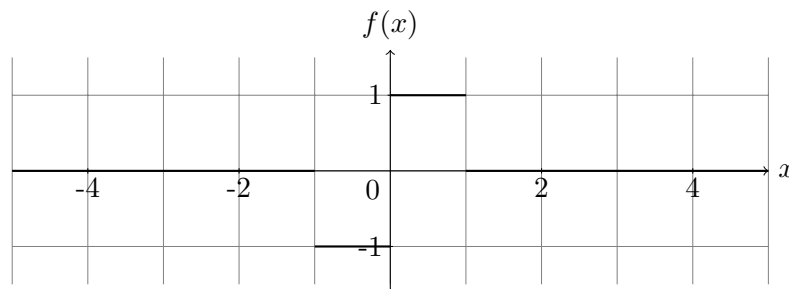


Abbildung 3.2: Funktion f auf dem Gebiet $(-5, 5)$.

Einsetzen der Funktionswerte von f liefert:

$$-\int_{-1}^0 \varphi'(x) dx + \int_0^1 \varphi'(x) dx = \underbrace{-2\varphi(0) + \varphi(-1) + \varphi(1)}_{(*)}$$

Der Term $(*)$ wird unter der Bedingung $|\varphi(x)| \leq 1$ am größten für $\varphi(0) = -1, \varphi(-1) = 1$ und $\varphi(1) = 1$. Daraus folgt

$$\text{TV}[f] = \int_{\Omega} |Df| = \sup_{|\varphi(x)| \leq 1} \int_{-5}^5 f \operatorname{div} \varphi dx = -2 \cdot (-1) + 1 + 1 = 4.$$

Die duale Formulierung der Totalen Variation ist die Grundlage für den Chambolle-Algorithmus [7], der, wie in Abschnitt 3.2.1 deutlich wird, die Minimierung der Totalen Variation deutlich vereinfacht, da diese Formulierung immer differenzierbar ist. Für die Funktionale, die die Totale Variation benutzen, ist es sinnvoll einen Raum zu definieren, auf dem die Totale Variation endlich ist.

Definition 8 (Aubert, Kornprobst [2]). *Der Raum der Funktionen mit beschränkter Variation ist definiert als*

$$BV(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} |Du| < \infty \right\}.$$

3.1.1 Geometrische Bedeutung der Totalen Variation

Die in Kapitel 4 vorgestellten Methoden von Bresson et al. [5] bauen auf der geometrischen Bedeutung der Totalen Variation auf. Deshalb soll nun eine Erklärung dazu folgen, da dies das Verständnis für die Methoden in Kapitel 4 erleichtert.

Im Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschreibt die Totale Variation einer charakteristischen Funktion auf einer Menge die Länge der Kurve, die diese Menge umgibt. Dies bezeichnet man auch als Perimeter. In Abbildung 3.3 sind drei Bilder zur Verdeutlichung dieses Konzepts zu sehen. In Abbildung 3.3(a) ist die Funktion $f : [0, 2] \times [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2}$ zu sehen,

der Plot 3.3(b) stellt die Niveaumengen N_μ mit

$$N_\mu = \{x \in \Omega \mid u(x) \leq \mu\}$$

dar. Plottet man die charakteristische Funktion der Menge $N_{0,25}$ auf dem Gebiet $[0, 2] \times [-2, 2]$, erhält man Plot 3.3(c).

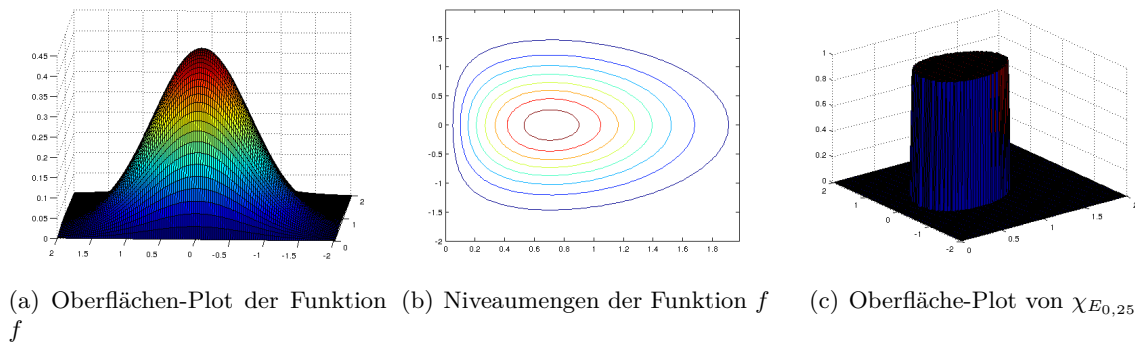


Abbildung 3.3: Verschiedene Plots für $f(x_1, x_2) = x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2}$ zur Illustration des Konzepts des Perimeters.

Quelle: MATLAB version 8.3.0.532 (R2014a)

Die Totale Variation über die charakteristische Funktion einer Menge gibt den Umfang dieser Menge, und heißt Perimeter:

$$\text{Per}(N_\mu) := \text{TV}(\chi_{N_\mu}), \text{ mit } \chi_{N_\mu} \text{ charakteristische Funktion der Niveaumenge.}$$

Addiert man nun diese einzelnen Perimeter über alle Niveaus der Funktion u erhält man die Totale Variation der Funktion u . Bildlich gesprochen werden die Umfänge der einzelnen Niveaumengen aufaddiert zur Totalen Variation der Gesamtfunktion. Diesen Zusammenhang formalisierte Enrico Giusti in [16]. Die Co-Area-Formel spiegelt diesen Zusammenhang wieder:

$$\text{TV}[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Per}(E_\mu) d\mu. \quad (3.2)$$

Über den Perimeter einer Menge stellen Bresson et al. in [5] die Verbindung zwischen der Totalen Variation und den Aktiven Konturen aus Kapitel 2 her. Mehr dazu in Kapitel 4.

3.2 Das Rudin-Osher-Fatemi-Modell

Rauschen ist eine zufällige Verzerrung des Bildes, dass im Aufnahme, Übertragungs- oder Transformationsprozess des Bildes entsteht [22]. Das Auftreten von Rauschen in Bildern ist

unvermeidbar. Um vernünftig mit einem Bild weiterarbeiten zu können, kann es nützlich sein, das Rauschen vorher zu entfernen [22]. Das Bilderentrauschen bildet also die Grundlage für alle Disziplinen der Bildverarbeitung.

1992 publizierten Rudin, Osher und Fatemi in [22] erstmals ein Entrauschungsverfahren, das die Totale Variation enthielt.

Das Problem des Entrauschens eines Bildes ist eng mit dem Problem der Segmentierung verbunden. Über das Rudin-Osher-Fatemi Modell kann man eine gemeinsame Lösungsmethode für beide Probleme finden. Dies wird in Kapitel 4 näher beschrieben. In diesem Kapitel möchte ich zunächst das Entrauschungsproblem und das Modell von Rudin, Osher und Fatemi vorstellen.

Rudin et al. schlugen folgende Energie vor (Formulierung wie in [5]):

$$\inf_u \left\{ E_{\text{ROF}}(u, \lambda) = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx + \lambda \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx \right\} \quad (3.3)$$

Wobei u_0 das verrauschte Bild beschreibt und u das „saubere“ Bild. Im besten Fall ist $u \approx u_0 + \eta$, wobei η das Rauschen ist, über das normalerweise nichts bekannt ist. Der hintere Term nähert u an u_0 über die Kleinste-Quadrate-Methode an.

Rudin, Osher und Fatemi wählen die Totale Variation als Regularisierer aus, da sie große Gradienten nicht so stark bestraft wie die zuvor benutzten L^2 -Normen, und daher die Kanten des ursprünglichen Bildes besser erhält [22]. Eine Möglichkeit zur Minimierung dieser Energie ist die Euler-Lagrange-Gleichung. Diese geben Rudin et al. in [22] für den zweidimensionalen Fall an.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_{x_2}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right) - \lambda(u - u_0) = 0 \text{ in } \Omega,$$

mit $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf $\partial\Omega$.

Zur Lösung dieser Gleichung schlagen sie eine parabolische Gleichung mit der Zeit als Parameter oder das Verfahren des steilsten Abstiegs vor [22]. Da die Gleichung nicht überall differenzierbar ist, ergibt sich ein numerisches Problem, weshalb diese Methode ist sehr aufwendig und Laufzeit-intensiv ist. Durch den Gradienten-Term im Nenner entartet die Gleichung [10, p.179]

Antonin Chambolle stellt in [7] einen Algorithmus vor, der über die duale Formulierung der Totalen Variation, eine numerisch einfachere Lösung des Minimierungsproblems findet. Auf diesen Algorithmus wird in den folgenden Methoden zurück gegriffen.

3.2.1 Minimierung der dualen Formulierung

In diesem Abschnitt möchte ich auf die Methode zur Minimierung der Totalen Variation von Chambolle [7] eingehen. Angelehnt an dieses Paper, möchte ich hier die Minimierung

vorstellen, da alle folgenden Methoden in dieser Arbeit mit Hilfe dieses Algorithmus minimiert werden.

Der Hauptunterschied zu vorherigen Minimierung der ROF-Energie ist die Verwendung der dualen Formulierung. Chambolle führt $p = (p_1, p_2) \in C_0^1(\Omega)^2$ ein und schreibt Energie (3.3) mit Definition 6 um [7]. Es sei $E_{\text{ROF}'} : \text{BV}(\Omega) \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} E_{\text{ROF}'}(u, \lambda) &= \text{TV}[u] + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx \\ &= \sup_{|p|_{L^\infty} \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} p dx + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Der Daten-Term kann in die Supremumsmenge hereingezogen werden, da er nicht von p abhängt.

Diese Energie ist konvex in u , wie die folgende Rechnung für $\alpha \in [0, 1]$ und $u, v \in \text{BV}(\Omega)$ zeigt:

$$\begin{aligned} E_{\text{ROF}'}(\alpha u + (1 - \alpha)v, \lambda) &= \int_{\Omega} (\alpha u + (1 - \alpha)v) \operatorname{div} p dx + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (\alpha u + (1 - \alpha)v - u_0)^2 dx \\ &= \alpha \int_{\Omega} u \operatorname{div} p dx + (1 - \alpha) \int_{\Omega} v \operatorname{div} p dx \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda} \|\alpha u + (1 - \alpha)v - \alpha u_0 - (1 - \alpha)u_0\|_{L^2}^2 \\ \text{mit Dreiecksungleichung} &\leq \alpha \int_{\Omega} u \operatorname{div} p dx + (1 - \alpha) \int_{\Omega} v \operatorname{div} p dx + \frac{1}{2\lambda} \|\alpha u - \alpha u_0\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda} \|(1 - \alpha)v - (1 - \alpha)u_0\|_{L^2}^2 \\ \text{Homogenität der Norm} &= \alpha \int_{\Omega} u \operatorname{div} p dx + (1 - \alpha) \int_{\Omega} v \operatorname{div} p dx + \frac{1}{2\lambda} \alpha \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda} (1 - \alpha) \int_{\Omega} (v - u_0)^2 dx \\ &= \alpha E(u, p) + (1 - \alpha) E(v, p). \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((\alpha p + (1 - \alpha)q)) dx = \alpha \int_{\Omega} \operatorname{div}(p) dx + (1 - \alpha) \int_{\Omega} \operatorname{div}(q) dx$$

Konkavität und Konvexität in p .

Nun sucht Chambolle das Infimum des ROF-Modells.

$$\inf_u \left\{ E_{\text{ROF}'}(u, \lambda) \right\} = \inf_u \sup_{|p|_{L^\infty} \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} p dx + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 dx \right\}.$$

Durch die Konvexität in u und die Konkavität in p können wie in [18] Infimum und Supremum getauscht werden:

$$\sup_{|p|_{L^\infty} \leq 1} \inf_u \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} p \, dx + \frac{1}{2\lambda} \int_{\Omega} (u - u_0)^2 \, dx \right\}.$$

Außerdem folgt aus der Konvexität in u , dass das Infimum über die Nullstelle der Euler-Lagrange-Gleichung gefunden werden kann. Mit (2.2) ist die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \left(u \operatorname{div} p \, dx + \frac{1}{2\lambda} (u - u_0)^2 \, dx \right) = 0.$$

Da die Energie nicht von ∇u abhängig ist, sind die restlichen Terme in (2.2) 0. Weiter gilt,

$$u = u_0 - \lambda \operatorname{div} p.$$

Das Ergebnis für u kann wieder in E_{ROF} eingesetzt werden, es ergibt sich das folgende Optimierungsproblem bezüglich p :

$$\sup_{|p|_{L^\infty} \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \left(u_0 \operatorname{div} p - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} p)^2 \right) \, dx \right\} \quad (3.4)$$

Um nur einen von p abhängigen Term in der Energie zu haben, ist es hilfreich, die zu integrierende Funktion in die quadratische Form umzuschreiben. Das Multiplizieren mit einem positiven Skalar und die Addition einer Konstante ändern zwar das Minimum dieser Funktion, nicht jedoch den Minimierer. Außerdem kann ein Supremum zu einem Infimum umgewandelt werden durch die Multiplikation mit -1 . Das Problem (3.4) ist demnach äquivalent zu dem folgenden Problem:

$$\inf_{|p|_{L^\infty} \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \left(\frac{\lambda}{2} (\operatorname{div} p)^2 - u_0 \operatorname{div} p \right) \, dx \right\}$$

Multiplikation mit 2λ und Addition von u_0^2 liefert:

$$\inf_{|p|_{L^\infty} \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{div} p - u_0)^2 \, dx \right\}$$

Was folgt ist eine punktweise Minimierung bezüglich x . Diese erfolgt analog zu der Minimierung, die in Abschnitt 4.2.1 beschrieben wird. Daher werde ich hier nicht genauer auf sie eingehen.

3.3 Das ROF-Modell mit der gewichteten Totalen Variation

Das ROF-Modell ist bezüglich der Kantenerhaltung bereits ein Fortschritt gegenüber vorhergehenden Entrauschungsverfahren [22]. Um es weiter zu verbessern, kann man den Regularisierer, die Totale Variation, durch eine Kantenfunktion zu gewichten, um diesen Term an den Kanten klein zu halten. Dadurch ist die Regulierung an den Kanten nicht zu stark. Dies erreicht man durch die Verwendung der *gewichteten Totalen Variation*, die auch in der Bildsegmentierung verwendet wird. Sie wird also nicht nur hier eine Rolle spielen, sondern auch im nächsten Kapitel. Die Definition der gewichteten TV ist sehr ähnlich zur Definition 6. Der Unterschied besteht nur in der Gewichtung durch eine Kantenfunktion.

Definition 9 (nach Bresson et al. [5]). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, $u \in \text{BV}(\Omega)$ und g eine positive, beschränkte und stetige Funktion auf Ω . Die gewichtete Totale Variation $\text{TV}_g : \text{BV}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ von u mit der Gewichtsfunktion g ist definiert durch*

$$\text{TV}_g(u) := \sup_{\varphi} \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx; \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N) \in C_0^1(\Omega)^N, |\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leq g \right\}.$$

Der gewichtete Perimeter einer Level-Menge $E_\mu = \{x : u(x) > \mu\}$ ist dazu wie folgt definiert:

$$\operatorname{Per}_g(E_\mu) := \int_{\partial E_\mu} g ds,$$

wobei ds das Euklidische Längenelement ist.

Analog zur stetigen Formulierung der Totalen Variation (3.1) gibt es auch hier für $u \in C^1(\Omega)$ eine stetige Formulierung. Sie ist gegeben durch [5]:

$$\text{TV}_g(u) = \int_{\Omega} g |\nabla u| dx \tag{3.5}$$

Um die Notation zu vereinfachen wird im folgenden Gleichung (3.5) für alle u verwendet. Das ROF-Modell mit der gewichteten Totalen Variation ist dann [13]:

$$E_{\text{ROF}_g}(u, \lambda) = \text{TV}_g(u) + \frac{1}{2\lambda} \|u - u_0\|^2. \tag{3.6}$$

Diese veränderte Version des Modells kann zum einen zum Entrauschen verwendet werden wie in [13] oder für die Bildsegmentierung wie in [5]. Die Bestimmung eines Minimierer $u \in \text{BV}(\Omega)$ von $E_{\text{ROF}_g}(u, \lambda)$ kann analog zur der in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen erfolgen. Von

$$\inf_u \sup_{|p|_{L^\infty} \leq g} \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} p + \frac{1}{2\lambda} (u - u_0)^2 dx \right\}$$

(3.7)

$$\text{gelangt man zu } \inf_{|p|_{L^\infty} \leq g} \left\{ \int_{\Omega} (\lambda \operatorname{div} p - u_0)^2 dx \right\}$$

Die punktweise Bestimmung eines Minimierers die findet sich in Kapitel 4.

3.4 Beispiele für die Anwendung im Entrauschen

Als Teil dieser Arbeit habe ich den Chambolle-Algorithmus auf zwei verschiedene Varianten implementiert. In einer Implementierung verwende ich wie in [5] eine Gewichtung durch eine Kantenfunktion, in der anderen wie in [7] keine. Mit diesen beiden Implementierungen habe ich den Effekt der Kantenfunktion auf das Entrauschen mit dem ROF-Modell getestet. Im folgenden Abschnitt möchte ich das Ergebnis kurz vorstellen.

Um ein Testbild zu haben, von dem auch die enträuschte Version bekannt ist, habe ich auf ein Bild ohne Rauschen (Abbildung 3.4(a)) Gaußsches Rauschen mit Mittelwert 0 und Varianz 0,01 addiert (Abbildung 3.4(b)). Lässt man den Algorithmus mit $\lambda = 0,2$ über das Bild aus Abbildung 3.4(b) laufen, entstehen für den Fall mit und ohne Kantenfunktion die Bilder, die in Abbildung 3.5 zu sehen sind. Alle Parameter waren dabei für beide Versionen gleich. Die verwendete Kantenfunktion ist ein Cauchy-Zerfall (siehe Gleichung (2.3) mit dem Parameter $a = 10$).

Bis zur Konvergenz (siehe auch Abschnitt 5.1) des Algorithmus benötigte die Version ohne Kantenfunktion 59 Schritte, die mit Kantenfunktion 52 Schritte. Vergleicht man die Bilder in Abbildung 3.5 untereinander, fällt auf, dass Bild (a) verwischtere Konturen hat als Bild (b). Vergleicht man beide Bilder mit dem originalen Bild (Abbildung 3.4(a)), sieht man, dass im Ergebnis der Version mit Kantenfunktion die Konturen des originalen Bildes besser rekonstruiert sind, als im Ergebnis der Version ohne Kantenfunktion.

Das Entrauschen mit Kantenfunktion liefert in diesem Fall also ein besseres Ergebnis.



(a) Original



(b) mit Rauschen

Abbildung 3.4: Originales Bild ohne Rauschen und Testbild für die Implementierungen mit Gaußschem Rauschen ($\mu = 0, \sigma = 0,01$).

Quelle: MATLAB version 8.3.0.532 (R2014a)



(a) ohne Kantenfunktion



(b) mit Kantenfunktion

Abbildung 3.5: Ergebnisse des Entrauschens mit $\lambda = 0,2$, Schrittweite $\delta t = 0,25$ und $g(s) = \frac{1}{1+10s^2}$

Quelle: MATLAB version 8.3.0.532 (R2014a)

4 Globale Minimierung des Aktive Konturen Modells

4.1 Motivation

In diesem Kapitel wird ein Modell zur Bildsegmentierung angegeben, dass die in Kapitel 2 und 3 vorgestellten Methoden zusammenbringt. Zuerst wird ein Modell vorgestellt, dass die ROF-Energie mit dem GAC-Modell von Caselles, Kimmel und Sapiro vereint. Als Zweites geht es um die Verbindung dieses Modells mit dem ACWE-Modell von Chan und Vese. Der große Vorteil dieser Modelle ist, dass sie globale Minima für das Aktive Konturen Modell liefern, und damit den größten Nachteil der beiden Segmentierungsmodelle aus Kapitel 2 aufheben. Das bedeutet, dass das Endergebnis nicht von der Initialkontur abhängt, was die Handhabung des Segmentierungsverfahrens erheblich vereinfacht, da nicht mehrere Initialkonturen getestet werden müssen um ein optimales Ergebnis zu erhalten. Zusätzlich sind die in diesem Kapitel beschriebenen Methoden über die Chambolle-Minimierung aus Kapitel 3 lösbar, was sie numerisch einfacher und schneller lösbar macht.

Die Ausführungen in diesem Kapitel basieren auf dem von Bresson, Esedoglu, Vandergheynst, Thiran und Osher veröffentlichten Paper [5].

4.2 ROF basiertes Modell

Bresson et al. schlagen in [5] vor, zur Segmentierung das ROF-Modell aus [22], das in Kapitel 3.2 beschrieben wurde, mit dem GAC-Modell von Caselles et al. aus [6], das in Kapitel 2.3 beschrieben wurde, zu verbinden. Somit würde man die guten Kantenerhaltungseigenschaften des ROF-Modells mit der geometrischen Bedeutung des GAC-Modells verbinden [5].

Die Nutzung der gewichteten Totalen Variation ist die Verbindung zwischen dem GAC-Modell (2.3) und dem ROF-Modell (3.3). Ihren Zusammenhang möchte ich kurz erläutern. Sei u die charakteristische Funktion einer geschlossenen Menge $\Omega_C \subset \Omega$, wobei $C = \partial\Omega$, der Rand von Ω_C sei. C kann auch nicht-zusammenhängend sein. Dann ergibt sich folgender Zusammenhang [5]:

$$\text{TV}_g(u = \chi_{\Omega_C}) = \int_{\Omega} g |\nabla \chi_{\Omega_C}| dx.$$

Über die Verbindung zum gewichteten Perimeter und der Co-Area Formel (siehe Definition 9) wird daraus [24]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\partial S_\mu} g ds d\mu \text{ mit } S_\mu = \{x : \chi_{\Omega_C} \geq \mu\}.$$

Für $\mu > 1$ ist die Menge S_μ leer und auch ihr Rand ist leer, da χ_{Ω_C} nie größer als 1 ist. Für $\mu < 0$ ist $S_\mu = \Omega$, da die Totale Variation für eine charakteristische Funktion auf komplett Ω gleich 0 ist, können wir auch diese Mengen weglassen [24]. Also kann man den obigen Ausdruck umschreiben zu

$$\int_0^1 \int_{\partial S_\mu} g ds d\mu.$$

Da die Mengen $S_\mu = \Omega_C$ für $0 < \mu \leq 1$, ist $\partial S_\mu = C$ und es folgt

$$\int_C g ds = E_{GAC}(C).$$

Die vorgeschlagene Energie in [5] entspricht dann dem ROF-Modell mit gewichteter Totaler Variation aus Kapitel 3.3, wobei im Anpassungsterm die L^1 -Norm statt der L^2 -Norm verwendet wird.

$$E_1(u, \lambda) := \underbrace{\int_{\Omega} g |\nabla u| dx}_{=TV_g(u)} + \lambda \int_{\Omega} |u - f| dx \quad (4.1)$$

Die Verwendung der L^1 -Norm hat gegenüber der Verwendung der L^2 -Norm mehrere Vorteile, die beispielsweise in [9] genauer behandelt werden. Hier eine kurze Zusammenfassung. Sofort am Funktional zu erkennen ist, das die Verwendung der L^1 -Norm das Modell invariant bezüglich des Kontrastes macht: Ist u der Minimierer für beobachtetes Bild $u_0(x)$, so ist ku der Minimierer für $ku_0(x)$ [9]. Die Regularisierung durch die Norm wirkt dadurch geometrischer, sie hängt mehr von der Form der Bildelemente ab, als von ihrem Kontrast. Dies ist für die Bildsegmentierung von Vorteil, da ein Bild auf Basis seiner Geometrie segmentiert werden soll. Damit zusammenhängend beobachten Chan und Esedoglu in [9] auch, dass kleine Objekte im Bild während der Regularisierung lange ihren Kontrast behalten, bevor sie plötzlich verschwinden.

Die Energie (4.1) liefert tatsächlich ein globales Minimum für das Segmentierungsproblem auf binären Bildern. Der folgende Satz liefert die entsprechende Aussage.

Satz 10 (Bresson et al. [5]). *Sei $g \in [0, 1]$ und $f(x)$ die charakteristische Funktion eines beschränkten Gebiets $\Omega_f \subset \Omega$. Ist $u(x)$ Minimierer der Energie $E_1(\cdot, \lambda)$ mit $\lambda > 0$ fest, gilt für fast jedes $\mu \in [0, 1]$, dass die charakteristische Funktion*

$$\chi_{\Omega_C(\mu)} = \{x: u(x) > \mu\}(x) \text{ mit } C \text{ Rand der Menge } \Omega_C$$

ein globaler Minimierer von $E_1(\cdot, \lambda)$.

Der zugehörige Beweis baut auf [9] und [20] auf.

Bresson et al. [5] liefern eine Interpretation für diesen Satz. Für $u = \chi_{\Omega_C}$ wie oben gilt:

$$\begin{aligned} E_1(\chi_{\Omega_C}, \lambda) &= \int_{\Omega} g|\chi_{\Omega_C}|dx + \lambda \int_{\Omega} |\chi_{\Omega_C} - u_0(x)|dx \\ &= \int_C gds + \lambda \int_{\Omega} |\chi_{\Omega_C} - u_0(x)|dx. \end{aligned}$$

Also ist das Minimieren der Energie (4.1) äquivalent zum minimieren des GAC-Modells, während u_0 über die charakteristische Funktion einer Menge Ω_C approximiert wird. Da E_1 konvex in u ist, aber nicht strikt konvex, kann sie keine lokalen Minima haben, die nicht globale Minima sind [5]. Damit ist jeder Minimierer der Energie ein globaler Minimierer. Also ist für jeden Minimierer u von E_1 die Kontur C der Menge $\{x : u(x) > \mu\}$ für beliebiges $\mu \in [0, 1]$ ein globales Minimum des Aktive Konturen Modells für binäre Bilder [5].

4.2.1 Minimierung

Um die Energie E_1 zu minimieren, approximieren Bresson et al. [5] sie durch eine Energie, in der sie zusätzlich die Variable $v \in BV(\Omega)$ einführen. Ziel der Aufteilung ist es, dass u die geometrischen Informationen des Bildes enthält und v die strukturellen Informationen. Die Zusammensetzung $u + v$ nähert sich f an, je kleiner der Parameter $\theta > 0$ wird. Das Energiefunktional sieht dann folgendermaßen aus:

$$\min_{u,v} \left\{ E_1^r(u, v, \lambda, \theta) = \int_{\Omega} g(x)|\nabla u|dx + \frac{1}{2\theta} \int_{\Omega} (u + v - f)^2 dx + \lambda \int_{\Omega} |v|dx \right\}. \quad (4.2)$$

Es enthält zwei Minimierungsprobleme, die jeweils konvex in u bzw. v sind. Wie in [3] können diese separat minimiert werden. Ist v fest, ergibt sich das Minimierungsproblem nach u :

$$\min_u \left\{ TV_g(u) + \frac{1}{2\theta} \|u + v - f\|_{L^2}^2 \right\} \quad (4.3)$$

Die Minimierung bezüglich v bei festem u ist dann das folgende eindimensionale Problem:

$$\min_v \left\{ \frac{1}{2\theta} \|u + v - f\|_{L^2}^2 + \lambda \|v\|_{L^1} \right\}. \quad (4.4)$$

Der Algorithmus, der von Bresson et al. [5] vorgeschlagen wird, führt zuerst die Minimierung nach u bis zur Konvergenz aus. Mit der Lösung wird v berechnet, womit wiederum u gelöst wird, womit wieder v berechnet wird und so weiter bis zur Konvergenz.

Nun zur Lösung der beiden Teilprobleme:

Das Minimierungsproblem nach u (4.3) ist dasselbe wie die Minimierung der ROF-Energie mit der gewichteten Totalen Variation (Gleichung 3.6). Wie in Kapitel 3.3 ergibt sich mit

der dualen Formulierung der Totalen Variation analog zu (3.7):

$$\inf_{|p|_{L^\infty} \leq g} \left\{ \int_{\Omega} (\theta \operatorname{div} p - (v - f))^2 dx \right\}$$

mit $p = (p^1, p^2)$. Nur erfolgt eine Diskretisierung der Bedingung $|p|_{L^\infty} \leq g$, wie vorgeschlagen in [7]. Ab hier wird punktweise für jedes $x \in \Omega$ minimiert.

$$\forall x \in \Omega : \inf \left\{ |\theta \operatorname{div} p(x) - (v(x) - f(x))| : |p(x)|^2 - |g(x)|^2 \leq 0 \right\}$$

wobei $g = g(\nabla f(x))$.

Die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen aus z.B. [26] liefern einen Lagrange-Multiplikator $\alpha \geq 0$, so dass für jedes x gilt [7]

$$- (\nabla(\theta \operatorname{div} p - (v - f))) + \alpha p = 0. \quad (4.5)$$

Ist die Bedingung aktiv, also $|p|^2 = |g|^2$, dann ist $\alpha > 0$. Es gilt also:

$$(|\nabla(\theta \operatorname{div} p - (v - f))|)^2 - \alpha^2 g^2 = 0$$

Ist die Bedingung nicht aktiv, also wenn $|p|^2 < |g|^2$, dann ist $\alpha = 0$. Man kann also für beide Fälle schreiben [5]

$$\alpha = \frac{1}{g} |\nabla(\theta \operatorname{div} p - (v - f))|$$

Setzt man das Ergebnis für α in (4.5) ein, erhält man:

$$- (\nabla(\theta \operatorname{div} p - (v - f))) + \frac{1}{g} |\nabla(\theta \operatorname{div} p - (v - f))| p = 0. \quad (4.6)$$

Diese Gleichung lösen Bresson et al. in [5] nach dem Vorbild von Chambolle in [7] mit einem semi-impliziten Gradientenverfahren. (4.6) wird gelöst mit $p^0 = (0, 0)^T$ und

$$p^{n+1} = \frac{p^n + \delta t \nabla(\operatorname{div} p^n - (f - v)/\theta)}{1 + \frac{\delta t}{g} |\nabla(\operatorname{div} p^n - (f - v)/\theta)|}. \quad (4.7)$$

Nun betrachten Bresson et al. [5] das Minimierungsproblem (4.4) nach v , das einem klassischen eindimensionalen Optimierungsproblem entspricht. Da das Problem konvex in v ist, sind alle stationären Punkte der Ableitung von (4.4) auch Minimierer [5]. Dazu liefert (2.2) wieder die Euler-Lagrange-Gleichung:

$$\frac{1}{\theta} (u + v - f) + \lambda \operatorname{sign}(v) = 0.$$

$\text{sign}(x)$ ist da bei die Vorzeichenfunktion gegeben durch:

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{wenn } x < 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \\ 1, & \text{wenn } x > 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

Zum Auflösen nach v ergeben sich drei Fälle:

- Fall 1: $v < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}(u + v - f) - \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow v &= f - u + \lambda\theta < 0 \\ \Leftrightarrow f - u &< -\lambda\theta \end{aligned}$$

- Fall 2: $v > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta}(u + v - f) + \lambda &= 0 \\ \Leftrightarrow v &= f - u - \lambda\theta > 0 \\ \Leftrightarrow f - u &> \lambda\theta \end{aligned}$$

- Fall 3: $v = 0$:

Dieser Fall tritt für die verbleibenden Fälle von $f - u$ ein. Diese sind $f - u \leq \lambda\theta$ und $f - u \geq -\lambda\theta$. Der letzte Fall ist äquivalent zu $-(f - u) \leq \lambda\theta$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ \Leftrightarrow |f - u| &\leq \lambda\theta \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich abschließend für die Lösung des zweiten Teilproblems (4.4) [5]:

$$v = \begin{cases} f - u + \lambda\theta, & \text{für } f - u < -\lambda\theta \\ f - u - \lambda\theta, & \text{für } f - u > \lambda\theta \\ 0, & \text{für } |f - u| \leq \lambda\theta \end{cases} \quad (4.9)$$

4.2.2 Diskretisierung

Die Variablen u und v werden als Matrizen der Dimension von u_0 , $N_{x_1} \times N_{x_2}$, dargestellt. Dabei entspricht der Funktionswert an der Stelle $x = (x_1, x_2)$ dem Wert der Matrix in Zeile x_1 und Spalte x_2 .

Die Divergenz und der Gradientenoperator müssen ebenfalls diskretisiert werden. Für den

Gradientenoperator habe ich ein Vorwärtsschema gewählt, wie von Bresson et. al in [5] vorgeschlagen.

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla u)_{i,j})^1, (\nabla u)_{i,j})^2)$$

mit

$$(\nabla u)_{i,j})^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{falls } i < N_{x_1} \\ 0 & \text{falls } i = N_{x_1} \end{cases} \quad \text{und } (\nabla u)_{i,j})^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{falls } j < N_{x_2} \\ 0 & \text{falls } j = N_{x_2} \end{cases}.$$

Die Divergenz ist dementsprechend mit einem Rückwärtsschema diskretisiert:

$$(\text{div} p)_{i,j} = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{falls } 1 < i \leq N_{x_1} \\ p_{i,j}^1 - p_{N_{x_1},j}^1 & \text{falls } i = 1 \end{cases} + \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{falls } 1 < j \leq N_{x_2} \\ p_{i,j}^2 - p_{i,N_{x_2}}^2 & \text{falls } j = 1 \end{cases}.$$

Die Lösungen der Minimierungsprobleme über u und v müssen ebenfalls diskretisiert werden. Da die Lösungen punktweise gefunden wurden, kann für jedes i, j die Lösung einfach angegeben werden. Die Diskretisierung von Gleichung (4.7) ist

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \delta t \nabla(\text{div} p^n - (f - v)/\theta)_{i,j}}{1 + \frac{\delta t}{g_{i,j}} |\nabla(\text{div} p^n - (f - v)/\theta)_{i,j}|}.$$

Die Diskretisierung von Gleichung (4.9) ist

$$v_{i,j} = \begin{cases} f_{i,j} - u_{i,j} + \lambda\theta, & \text{für } f_{i,j} - u_{i,j} < -\lambda\theta \\ f_{i,j} - u_{i,j} - \lambda\theta, & \text{für } f_{i,j} - u_{i,j} > \lambda\theta \\ 0, & \text{für } |f_{i,j} - u_{i,j}| \leq \lambda\theta \end{cases}.$$

4.3 ACWE-basiertes Modell

Die Methode, die im vorherigen Abschnitt vorgestellt wurde, ist nur auf binären Bildern anwendbar, die eventuell durch Rauschen deformiert wurden. In diesem Abschnitt wird nun eine Methode vorgestellt, die auf Bilder anwendbar ist, die sich im Spektrum des gesamten Graubereichs befinden. Diese Methode ist eine Vereinigung des Active-Contour-Without-Edges Modell, das das Mumford-Shah-Modell approximiert und der Geodesic-Active-Contours. Sie basiert also auf dem Finden von großen Gradienten zur Segmentierung und dem gleichzeitigen Bilden zweier homogener Regionen.

Bresson et al. starten in [5] mit dem ACWE-Modell und entwickeln hieraus das neue Modell. Aus Kapitel 2.4.1 ist die Level-Set-Formulierung dieses Modells bereits bekannt. Hier setzen

sie $\mu = 1$:

$$F(\phi, a_1, a_2, \lambda) = \int_{\Omega} \delta_0(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| dx + \lambda \int_{\Omega} (|u_0(x) - a_1|^2 H(\phi(x)) + |u_0(x) - a_2|^2 H(-\phi(x))) dx. \quad (4.10)$$

Um dieses Modell zu minimieren, benötigt man eine kontinuierliche Approximation der Heaviside-Funktion und ihrer Ableitung. Sei H_ε eine stetig differenzierbare, strikt monotone Approximation von $H(z)$ (z.B. $H_\varepsilon(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)\right)$, [11]) und $\delta_\varepsilon(z) = H'_\varepsilon(z)$. Dann ist der Gradientenabstieg bezüglich einer künstlichen Zeitkomponente, der die kontinuierliche Formulierung von (4.10) minimiert, folgender [5]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\phi) \left[\operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \lambda \underbrace{((a_1 - u_0(x))^2 - (a_2 - u_0(x))^2)}_{:=r(x, a_1, a_2)} \right].$$

Die stationäre Lösung dieses Abstiegs ist dieselbe, wie die des folgenden Gradientenabstiegs:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \lambda r(x, a_1, a_2).$$

Dieser ist wiederum der Gradientenabstieg für die Minimierung der Energie

$$F_2(\phi, a_1, a_2, \lambda) = \int_{\Omega} |\nabla \phi| + \lambda \int_{\Omega} r(x, a_1, a_2) \phi dx. \quad (4.11)$$

Daher formulieren Bresson et al. in [5] zur Approximation des ACWE-Modells eine Energie, die statt der Länge der Kontur (also den vorderen Term in (4.10)) das GAC-Modell verwendet. Sie vereinen somit das ROF-basierte Modell mit dem ACWE-Modell, dass wiederum eine Approximation des Mumford-Shah-Modells darstellt (vgl. Kapitel 2). Für ein gegebenes $u_0 \in \operatorname{BV}(\Omega)$ und $\lambda > 0$ schlagen sie vor, die folgende Energie zu minimieren:

$$E_2(u, a_1, a_2, \lambda) = \operatorname{TV}_g(u) + \lambda \int_{\Omega} r(x, a_1, a_2) u dx. \quad (4.12)$$

Der Unterschied zwischen (4.11) und (4.12) ist die Verwendung der gewichteten Totalen Variation, die wieder die Verbindung zum GAC-Modell herstellt. Ist u eine charakteristische Funktion χ_{Ω_C} , wobei Ω_C definiert ist wie im vorherigen Abschnitt, so gilt:

$$\begin{aligned} E_2(\chi_{\Omega_C}, a_1, a_2, \lambda) &= \operatorname{TV}_g(\chi_{\Omega_C}) + \lambda \int_{\Omega} r(x, a_1, a_2) \chi_{\Omega_C} dx \\ &= \int_C g ds + \lambda \int_{\Omega} ((a_1 - u_0(x))^2 - (a_2 - u_0(x))^2) \chi_{\Omega_C} dx \end{aligned}$$

Bei der Minimierung der Energie (4.12) wird das GAC-Modell minimiert, während parallel u_0 durch zwei Regionen Ω_C und $\Omega \setminus \Omega_C$ mit den Werten a_1 und a_2 , die die Durchschnittswerte der Intensitäten in der Regionen darstellen, approximiert wird.

Das diese Energie ein globales Minimum besitzt zeigt der folgende Satz:

Satz 11 (Bresson et al. [5]). *Es seien $u_0(x), g(x) \in [0, 1]$. Für gegebene $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gelte:*

Wenn $u(x)$ Minimierer von $E_2(\cdot, a_1, a_2, \lambda)$ ist, dann ist für fast alle $\mu \in [0, 1]$ die charakteristische Funktion

$$\chi_{\Omega_C(\mu)=\{x:u(x)>\mu\}}(x) \quad \text{mit } C = \partial\Omega_C,$$

ein globaler Minimierer von $E_2(\cdot, a_1, a_2, \lambda)$.

Der Beweis ist ähnlich zu dem Beweis von Satz 10.

Bresson et al. liefern in [5] folgende Interpretation des Satzes: Für festes λ, a_1, a_2 , und beliebigen Minimierer u definiert eine Menge von Punkten in Ω , für die der Minimierer u größer als ein Wert μ ist, eine Menge Ω_C , deren Rand C ein globales Minimum des Segementierungsproblems in diesem Abschnitt ist.

Da Energie (4.12) homogen in u vom Grad 1 ist (d. h. $E_2(\alpha u) = \alpha E_2(u)$), hat sie keine stationären Lösungen, solange die Minimierung nicht beschränkt (restringiert) ist. Deshalb beschränken Bresson et al. die minimierende Funktion u auf das Intervall $[0, 1]$. Dieses restringierte Problem lässt sich dann mit folgendem Satz wieder in ein unrestringiertes Problem umwandeln:

Satz 12 (Bresson et al. [5]). *Sei $r(x, a_1, a_2) \in L^\infty(\Omega)$, für beliebige, gegebene $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann hat das konvexe, restringierte Minimierungsproblem*

$$\min_{0 \leq u \leq 1} \left\{ \text{TV}_g(u) + \lambda \int_{\Omega} r(x, a_1, a_2) u dx \right\} \quad (4.13)$$

die gleiche Menge von Minimierern, wie das konvexe, unrestringierte Minimierungsproblem

$$\min_u \left\{ \text{TV}_g(u) + \lambda \int_{\Omega} r(x, a_1, a_2) u + \alpha \nu(u) dx \right\}. \quad (4.14)$$

Dabei ist $\nu(\xi) := \max\{0, 2|\xi - \frac{1}{2}| - 1\}$ eine exakte Fehlerfunktion, wenn α groß genug gewählt wird, so dass $\alpha > \frac{\lambda}{2} \|r(x)\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Der Beweis ist in [20], wobei die Totale Variation durch die gewichtete Totale Variation ersetzt werden muss.

4.3.1 Minimierung

Die Minimierung des ACWE-basierten Modells ist sehr ähnlich zu der des ROF-basierten Modells. Über die Einführung einer neuen Variable v teilen Bresson et al. die Energie auf, so dass folgende Optimierungsproblem entsteht:

$$\min_{u,v} \left\{ E_3(u, v, a_1, a_2, \lambda, \alpha, \theta) = TV_g(u) + \frac{1}{2\theta} \|u - v\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} \lambda r(x, a_1, a_2) v + \alpha \nu(v) dx \right\}. \quad (4.15)$$

Analog zum ROF-basierten Modell teilen Bresson et al. auch dieses Problem in zwei Teilprobleme auf, die dann separat minimiert werden:

Das Minimierungsproblem nach u bei festem v

$$\min_u \left\{ TV_g(u) + \frac{1}{2\theta} \|u - v\|_{L^2}^2 \right\}, \quad (4.16)$$

und das Minimierungsproblem nach v bei festem u

$$\min_v \left\{ \frac{1}{2\theta} \|u - v\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} (\lambda r(x, a_1, a_2) v + \alpha \nu(v)) dx \right\}. \quad (4.17)$$

Der Ablauf zu Minimierung der gesamten Energie verläuft analog zu der des ROF-basierten Modells, wobei alle 10 Iterationen, die Durchschnittswerte a_1 und a_2 entsprechend der Regionen neu berechnet werden.

Die Lösung von (4.16) ist analog zu (4.3) und ist somit:

$$\begin{aligned} u &= v - \theta \operatorname{div} p \\ \text{wobei } p &\text{ gegeben ist durch } p^0 = (0, 0) \text{ und für alle } i, j : \\ p_{i,j}^{n+1} &= \frac{p_{i,j}^n + \delta t \nabla(\operatorname{div} p^n - v/\theta)_{i,j}}{1 + \frac{\delta t}{g_{i,j}} |\nabla(\operatorname{div} p^n - v/\theta)_{i,j}|}. \end{aligned}$$

Für die Lösung des Minimierungsproblems nach v (4.17) nehmen Bresson et al. an, dass α groß genug gewählt wurde, so dass $\alpha \nu(v)$ eine exakte Fehlerfunktion ist. Aus der Verknüpfung von u und v über den Term $\|u - v\|_{L^2}^2$ kann man schließen, dass $u \in [0, 1]$ nach der u -Minimierung, wenn für v zuvor gilt $v \in [0, 1]$. Andersherum ist $v \in [0, 1]$ nach der v -Minimierung, wenn $u \in [0, 1]$. Angenommen, die Minimierung hat mit einem entsprechenden Initialwert begonnen, dann können wir davon ausgehen, dass $v \in [0, 1]$. Da $\nu(v)$ ignoriert werden kann, weil diese Funktion äquivalent zum Abschneiden von v an den Grenzen 0 und

1 ist, ist der Minimierer von v gegeben durch die stationäre Lösung der Ableitung:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \left(\int_{\Omega} \left(\lambda r(x, a_1, a_2)v + \frac{1}{2\theta}(v - u)^2 \right) dx \right) \\ \Leftrightarrow & \lambda r(x, a_1, a_2) + \frac{1}{\theta}(v - u) = 0 \\ \Leftrightarrow & v(x) = u(x) - \theta \lambda r(x, a_1, a_2). \end{aligned}$$

Nun muss noch das Abschneiden der Lösung an den Grenzen des Intervalls $[0, 1]$ stattfinden, da $\alpha\nu(v)$ ja ignoriert wurde. Für die Lösung von (4.17) ergibt sich

$$v = \min\{\max\{u(x) - \theta \lambda r(x, a_1, a_2), 0\}, 1\}.$$

Da sich bei der Diskretisierung des Mumford-Shah basierten Modells keine Unterschiede zum ROF-basierten Modell ergeben, wird hier darauf verzichtet und auf Abschnitt 4.2.2 verwiesen.

5 Ergebnisse

Als Teil dieser Arbeit habe ich die Bildsegmentierungsmethoden aus Kapitel 4 in Matlab implementiert und auf ein selbst erstelltes und ein klassisches Bildverarbeitungsbeispiel angewendet. In diesem Kapitel möchte ich die Ergebnisse vorstellen und diskutieren.

Als Kantenfunktion habe ich durchgehend einen Cauchy-Zerfall (siehe Gleichung 2.3) benutzt mit dem Parameter $a = 0,001$.

5.1 Abbruchkriterium

Bei der Implementierung beider Algorithmen aus Kapitel 4 gibt es je zwei Stellen, an denen ein Abbruchkriterium eingebaut werden muss. Diese sind für beide Algorithmen gleich und werden hier deshalb gemeinsam betrachtet. Zunächst muss bei der Minimierung nach u die Gleichung 4.7, die über n iteriert wird, bei Konvergenz abgebrochen werden. Wie Chambolle in [7] vorschlägt habe ich das folgende punktweise Abbruchkriterium gewählt:

$$|p^{n+1} - p^n| < \frac{1}{100}.$$

Die Iteration über die beiden Minimierungsprobleme wird gestoppt, sobald sich in u und v keine Veränderungen mehr ergeben. Dies geschieht mit dem folgenden punktweisen Abbruchkriterium (wie vorgeschlagen in [5]):

$$\max\{|u^{n+1} - u^n|, |v^{n+1} - v^n|\} < \varepsilon.$$

Mit ε ist die Maschinengenauigkeit bezeichnet.

5.2 Schwellenwertverfahren

In beiden Methoden ist als Ergebnis für u eine charakteristische Funktion, also ein binäres Bild als globaler Minimierer gefordert. Da die Algorithmen jedoch nur das Minimum der Energien approximieren, ist das Ergebnis nicht immer vollständig binär. Mittels des Schwellenwertverfahrens habe ich, wie von Bresson et al. in [5] vorgeschlagen, nach der Konvergenz der Algorithmen u jeweils angepasst. Dabei werden alle Werte von u , die kleiner als ein Schwellenwert μ sind, auf 0 gesetzt und alle Werte von u , die größer sind als μ auf 1. Dies ist

kein Widerspruch zu Satz 10, da der dort beschriebene Minimierer nur approximiert wird. Folglich ist für jedes Bild einer finalen Kontur im Folgenden auch der Parameter μ angegeben.

5.3 Ergebnisse der ROF-basierten Methode

Die auf dem Rudin-Osher-Fatemi-Modell basierende Methode von Bresson et al. aus Abschnitt 4.2 ist für binäre Bilder aufgestellt worden. Deshalb habe ich meine Implementierung zunächst auf einem selbst erstellten schwarz-weiß Bild getestet, auf das Salz und Pfeffer Rauschen der Dichte 0,2 addiert wurde. In Abbildung 5.1a) ist die kreisförmige Initialkontur innerhalb des Bildes in rot dargestellt. Mit den Parametern $\theta = 1$ und $\lambda = 0,1$ und dem Schwellenwert $\mu = 0,5$ liefert das Programm die finale Kontur, die in Abbildung 5.1b) zu sehen ist. Das Ergebnis für u vor dem Schwellenwertverfahren ist in Abbildung 5.2a) zu sehen. In dem dazugehörigen Histogramm ist erkennbar, dass es fast binär ist. Die Wahl des Schwellenwerts μ spielt hier also keine große Rolle. In Abbildung 5.2 ist ebenfalls das Ergebnis für v zu sehen. Vergleicht man u und v mit dem originalen Bild, so wird die Trennung in Geometrie und Textur deutlich, da in v hauptsächlich das Rauschen aus dem Originalbild zu sehen ist.

Um zu testen, ob das Verfahren wirklich unabhängig von der Initialkontur ist, habe ich

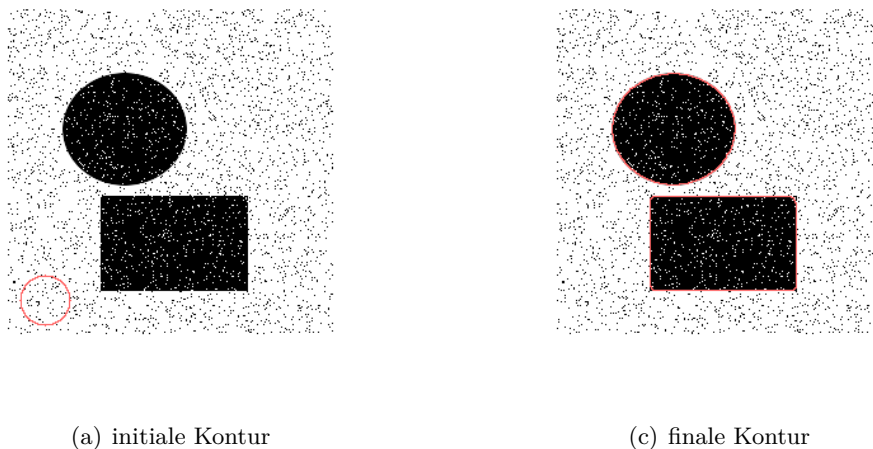
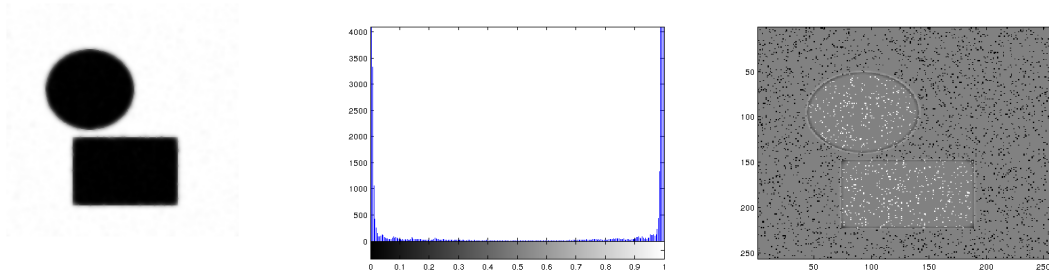
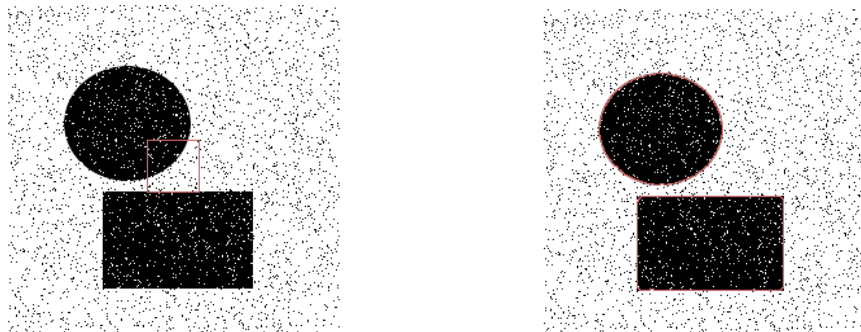


Abbildung 5.1: Binärbild mit initialer und finaler Kontur für $\lambda = 0,1, \theta = 1$ und $\mu = 0,5$.

auf dasselbe Bild, bei gleichen Parametern wie im vorherigen Beispiel, verschiedene Initialkonturen angewendet. In Abbildung 5.3 sieht man das Ergebnis unter Verwendung einer rechteckigen Initialkontur, die im Gegensatz zu der kreisförmigen Kontur aus Abbildung 5.1 Kontakt zum zu segmentierenden Objekt hat. In beiden Fällen ist gut erkennbar, dass sich das Ergebnis für die finale Kontur nicht von der im ersten Beispiel unterscheidet.

(a) u vor dem Schwellenwertverfahren(b) Histogramm von u (c) v Abbildung 5.2: Zwischenergebnisse für $\lambda = 0, 1$ und $\theta = 1$.

(a) initiale Kontur

(b) finale Kontur

Abbildung 5.3: Binärbild mit rechteckiger initialer und finaler Kontur für $\lambda = 0, 1, \theta = 1$ und $\mu = 0, 5$.

5.3.1 Parameterauswahl

Die Auswahl von λ und θ richtet sich nach ihrer Funktion im zu minimierenden Modell. λ regelt in Energie 4.1 die Gewichtung zwischen dem Regularisierungsterm und dem Datenterm. Für $\lambda = 1$ liegt ein Gleichgewicht zwischen dem Term, der die gewichtete Totale Variation enthält, und dem Term, der u an das ursprüngliche Bild annähert, vor. Für $\lambda < 1$ ist die Regularisierung stärker gewichtet und für $\lambda > 1$ entsprechend die Datenanpassung. θ regelt die Aufteilung des ursprünglichen Bildes f in die beiden Teile u und v , wie in Energie

4.2 erkennbar. Je größer θ wird, umso mehr kann $v + u$ von f abweichen. Wählt man θ also zu groß, entfernt sich die Summe von Geometrie und Textur zu weit vom Original. Wählt man θ zu klein, ist der Freiraum für u zu eingeschränkt.

Um die Güte der Ergebnisse für verschiedene λ und θ bei gleicher Initialkontur darzustellen, habe ich das Ergebnis für u mit dem originalen Binärbild u_{opt} , das die optimale Segmentierung für das verrauschte Bild darstellt, verglichen. Dazu habe ich die Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung (RMSD) bezüglich aller Pixel berechnet. Die Ergebnisse für verschiedene λ und θ sind in Tabelle 5.1 zu sehen. Für drei der Parameterkombinationen

λ	θ	RMSD
0,2	1,1	0,045311
1	1	0,076995
0,01	10	0,22311

Tabelle 5.1: RMSD von finalem u und originalem Binärbild

sind in Abbildung 5.4 - 5.6 das Ergebnis für u , das zugehörige Histogramm und die finale Kontur dargestellt. Das Ergebnis für $\lambda = 0,2$ und $\theta = 1,1$ ist ähnlich zu dem von $\lambda = 0,1$

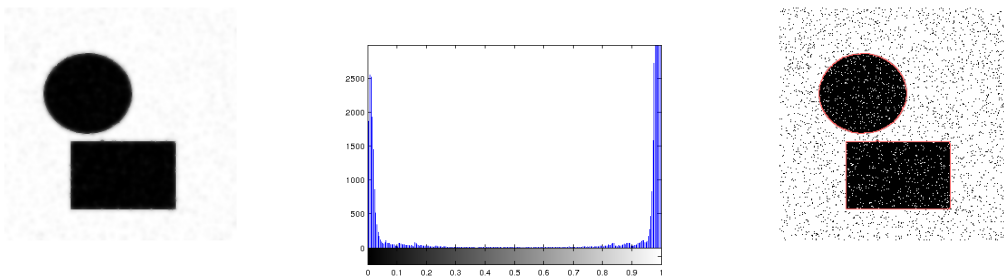


Abbildung 5.4: u mit Histogramm und finaler Kontur für $\lambda = 0,2$, $\theta = 1,1$ und $\mu = 0,5$.

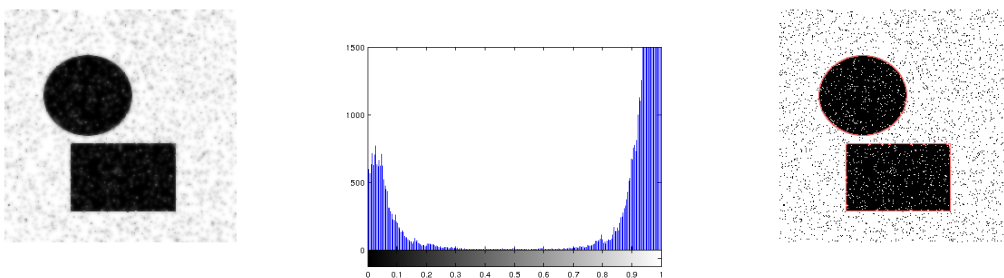


Abbildung 5.5: u mit Histogramm und finaler Kontur für $\lambda = 1$, $\theta = 1$ und $\mu = 0,5$.

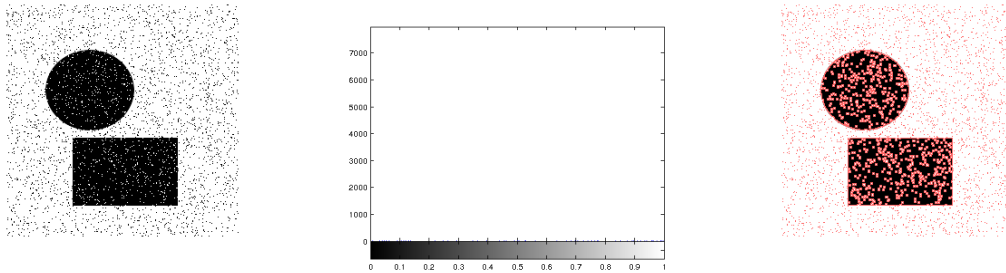


Abbildung 5.6: u mit Histogramm und finaler Kontur für $\lambda = 0,01$, $\theta = 10$ und $\mu = 0,5$.

und $\theta = 1$, wobei am Histogramm erkennbar ist, dass u noch nicht binär ist. Die finale Kontur ist jedoch aufgrund des Schwellenwertverfahrens gleich. Für $\lambda = 1$ und $\theta = 1$ ist das Endergebnis wieder das gleiche, jedoch erkennt man an u und am Histogramm, dass das Ergebnis nicht sehr gut ist. Für $\lambda = 0,01$ und $\theta = 10$ ist das Ergebnis schließlich ziemlich schlecht, da quasi keine Veränderung vom ursprünglichen Bild zu u erkennbar ist, und die finale Kontur die Objekte nicht segmentiert.

Aus Tabelle 5.1 und den Bildern lässt sich ablesen, dass die besten Ergebnisse für $\lambda < 1$, also eine stärkere Gewichtung der Regularisierung, und ein $\theta \approx 1$ entstehen. Das Gewicht liegt also auf der Regularisierung und dem Annähern von $v + u$ an f und nicht so sehr auf der Datenanpassung.

5.4 Ergebnisse der ACWE-basierten Methode

Die zweite von Bresson et al. vorgestellte Methode ist auf Bilder im Grauwertbereich anwendbar. Zunächst habe ich meine Implementierung auf dem Bild des Kameramanns getestet. In Abbildung 5.7 ist das Ergebnis für eine kreisförmige Initialkontur mit den Werten $\lambda = 0.001$ und $\theta = 10$ zu sehen. In Abbildung 5.8 ist u vor dem Schwellenwertverfahren dargestellt und außerdem ein dazugehöriges Histogramm. Man erkennt, dass u schon annähernd binär ist, allerdings hat die Wahl von μ in den Randbereichen des Intervall $[0, 1]$ noch Einfluss auf die finale Kontur.

Wie bei der ersten Methode auch, habe ich hier verschiedene Initialkonturen getestet. In Abbildung 5.9 kann man das Ergebnis für eine rechteckige Initialkontur sehen, die im Gegensatz zu der kreisförmigen Initialkontur aus Abbildung 5.7 Kontakt zum zu segmentierenden Objekt hat. Die Ergebnisse sind identisch mit der finalen Kontur in Abbildung 5.7, da auch die Parameter dieselben sind. Dies lässt sich für zahlreiche weitere Initialkonturen verifizieren, unabhängig von ihrer Form oder dem Kontakt zum zu segmentierenden Objekt. Also ist diese Methode auch in der Praxis unabhängig von der Initialkontur.



(a) initiale Kontur



(b) finale Kontur

Abbildung 5.7: Bild des Kameramanns mit initialer und finaler Kontur für $\lambda = 0,001$, $\theta = 10$ und $\mu = 0,5$.

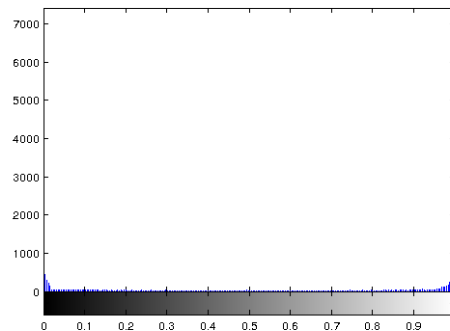


Abbildung 5.8: u vor dem Schwellenwertverfahren und dazugehöriges Histogramm für $\lambda = 0,001$ und $\theta = 10$.

5.4.1 Parameterauswahl

Auch bei dieser Methode ist der Einfluss der Parameter interessant. Die Funktion von λ in Energie 4.15 ist die Gewichtung zwischen dem Term, der die gewichtete Totale Variation enthält und dem Term, der die zwei Regionen mit ähnlicher Intensität bildet. Für $\lambda < 1$ hat der erste Term das größere Gewicht, für $\lambda > 1$ ist es andersherum. θ ist der Parameter, der die Gewichtung der Approximation $v \approx u$ steuert, die eingeführt wurde, um die Energie leichter zu minimieren. Je größer θ , umso kleiner wird die Bedeutung dieser Approximation, dass heißt umso weniger entspricht v am Ende u .



(a) initiale Kontur



(b) finale Kontur

Abbildung 5.9: Kameramann mit rechteckiger Initialkontur und der resultierenden finalen Kontur für $\lambda = 0,001$, $\theta = 10$ und $\mu = 0,5$.

Wie im vorherigen Abschnitt auch, möchte ich die Güte der Ergebnisse für verschiedene λ und θ über den RMSD angeben. Hierfür habe ich den Algorithmus auf das Bild einer Insel angewendet, für die eine, von einem Menschen durchgeführte, Segmentierung vorliegt (siehe Abbildung 5.10[1]). Die Initialkontur war ein Kreis in der unteren linken Ecke ohne Berührung mit dem Objekt.



Abbildung 5.10: Inselbild und menschliche Segmentierung in rot aus [1]

In Tabelle 5.2 sind die Fehler zwischen der Segmentierung des Programms und dieser menschlichen Segmentierung angegeben. Für zwei der Parameterkombinationen sind in den Abbildungen 5.11 - 5.12 außerdem das Ergebnis für u , das Histogramm und die finale Kontur zu sehen. Dabei fällt zunächst auf, dass die Fehler sich nicht signifikant unterscheiden. In den

Bildern der finalen Konturen ist jedoch ein deutlicher Unterschied zu erkennen. Es fällt auf, dass der Algorithmus sehr schnell terminiert für $\theta\lambda > 1$ und die Segmentierung sehr viele kleine Konturen liefert. Die Konturen liegen dann dort wo große Gradienten sind. Abgesehen davon kann θ zwischen 1 und 100 variieren. Auffällig ist, dass für viele Kombinationen von θ und λ der Algorithmus nicht in angemessener Zeit terminiert. Bricht man ihn einfach nach 5000 Iterationen ab, ist das Ergebnis dennoch nicht zufriedenstellend. Dies ist vor allem der Fall, wenn das Produkt aus θ und λ kleiner als 0,1 ist. Ein ausgeglichenes Ergebnis erhält man für $0,1 \leq \lambda\theta \leq 1$, wobei die Gewichtung durch $\lambda < 1$ stets auf dem Regularisierungsterm liegt.

Ähnliche Ergebnisse erhält man für den Kameramann. Da mir hierfür keine optimale oder menschliche Segmentierung vorliegt, habe ich nur Bilder der Ergebnisse zu zeigen (siehe Abbildung 5.13). Die Ergebnisse sind alle bis auf Details gut, nur für $\lambda = 0,1$ und $\theta = 0,5$ ist das Ergebnis nicht zufriedenstellend. Letzteres ist ein Beispiel für eine Parameterkombination, bei der ich nach 5000 Iterationen das Programm manuell abgebrochen habe.

λ	θ	RMSD
0,001	100	0,14867
0,001	10	0,1579

Tabelle 5.2: RMSD von finalem u und der menschlichen Segmentierung des Inselbildes.

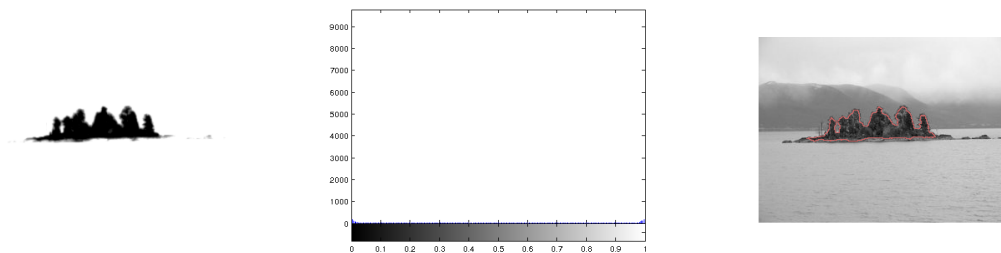


Abbildung 5.11: u mit Histogramm und finaler Kontur für $\lambda = 0,001$, $\theta = 100$ und $\mu = 0,5$.

5.5 Fazit

Abschließend kann ich feststellen, dass die Implementierung gute Ergebnisse liefert. Bei der Segmentierung von binären Bildern findet der Algorithmus die optimale Kontur, bei der Segmentierung von grauwertigen Bildern werden die groben Strukturen segmentiert, bei kleinen Details findet er noch nicht die optimale Segmentierung. Im Paper von Bresson et al. konnte jedoch gezeigt werden, dass die Methoden globale Minima für das Aktive Konturen Modell liefern und auch in meiner Implementierung ist das Ergebnis unabhängig von der

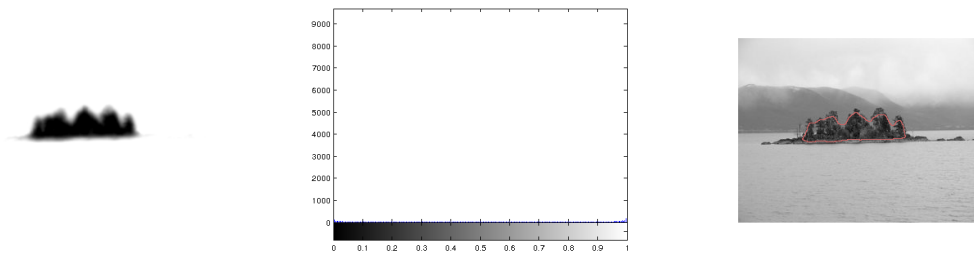


Abbildung 5.12: u mit Histogramm und finaler Kontur für $\lambda = 0,001$, $\theta = 10$ und $\mu = 0,5$.

Initialkontur. Damit hat diese Methode einen großen Vorteil gegenüber dem GAC-Modell, bei dem die Entscheidung für eine initiale Kontur stets das Ergebnis beeinflusste.



(a) initiale Kontur



(b) finale Kontur für $\theta = 1$ und $\lambda = 1$



(c) finale Kontur für $\theta = 0,5$ und $\lambda = 0,1$



(d) finale Kontur für $\theta = 8$ und $\lambda = 0,8$

Abbildung 5.13: Finale Konturen für verschiedene λ und θ mit $\mu = 0,5$.

Literaturverzeichnis

- [1] Sharon Alpert, Meirav Galun, Ronen Basri, and Achi Brandt. Image Segmentation by Probabilistic Bottom-Up Aggregation and Cue Integration. In *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, June 2007.
- [2] Gilles Aubert and Pierre Kornprobst. *Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations*, volume 147. Springer, 2006.
- [3] Jean-François Aujol, Guy Gilboa, Tony Chan, and Stanley Osher. Structure-Texture Image Decomposition - Modeling, Algorithms, and Parameter Selection. *International Journal of Computer Vision*, 67(1):111–136, 2006.
- [4] Xavier Bresson and Tony F. Chan. Fast Dual Minimization of the Total Variation Norm and Applications to Color Image Processing. *Inverse Problems and Imaging*, 2(4):455–484, October 2008.
- [5] Xavier Bresson, Selim Esedoglu, Pierre Vandergheynst, Jean-Philippe Thiran, and Stanley Osher. Fast Global Minimization of the Active Contour/Snake Model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 28(2):151–167, 2007.
- [6] Vicent Caselles, Ron Kimmel, and Guillermo Sapiro. Geodesic Active Contours. In *ICCV*, pages 694–699, 1995.
- [7] Antonin Chambolle. An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20(1-2):89–97, 2004.
- [8] Antonin Chambolle and Thomas Pock. A First-Order Primal-Dual Algorithm for Convex Problems with Applications to Imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(1):120–145, 2011.
- [9] Tony F. Chan and Selim Esedoglu. Aspects of Total Variation Regularized L^1 Function Approximation. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 65(5):1817–1837, 2005.
- [10] Tony F. Chan and Jianhong Shen. *Image processing and analysis - variational, PDE, wavelet, and stochastic methods*. SIAM, 2005.
- [11] Tony F. Chan and Luminita A. Vese. Active contours without edges. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 10(2):266–277, February 2001.
- [12] Dina Aboul Dahab, Gamal M. Selim, and Samy S. A. Ghoniemy. Automated Brain Tumor Detection and Identification Using Image Processing and Probabilistic Neural

- Network Techniques. *International Journal of Image Processing and Visual Communication*, 1(2), October 2012.
- [13] Abdallah El-Hamidi, Michel Ménard, Mathieu Lugiez, and Clara Ghannam. Weighted and extended total variation for image restoration and decomposition. *Pattern Recognition*, 43(4):1564–1576, 2010.
- [14] Jürgen Elstrodt. Springer-Verlag, 7 edition, 2011.
- [15] Andreas Ess, Tobias Mueller, Helmut Grabner, and Luc J. Van Gool. Segmentation-Based Urban Traffic Scene Understanding. In *BMVC*. British Machine Vision Association, 2009.
- [16] Enrico Giusti. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Birkhäuser, 1984.
- [17] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *INTERNATIONAL JOURNAL OF COMPUTER VISION*, 1(4):321–331, 1988.
- [18] Jahn Philipp Müller. Parallel Total Variation Minimization. Master’s thesis, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, November 2008.
- [19] David Mumford and Jayant Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, 42(5):577–685, 1989.
- [20] Mila Nikolova, Selim Esedoglu, and Tony F. Chan. Algorithms for Finding Global Minimizers of Image Segmentation and Denoising Models. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 66(5):1632–1648, 2006.
- [21] Nikhil R. Pal and Sankar K. Pal. A review on image segmentation techniques. *Pattern Recognition*, 26(9):1277–1294, 1993.
- [22] Leonid I. Rudin, Stanley Osher, and Emad Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 60(1-4):259–268, 1992.
- [23] Maurice Sion. On general minimax theorems. *Pacific Journal of Mathematics*, 8(1):171–176, 1958.
- [24] Gilbert Strang. Maximal flow through a domain. *Mathematical Programming*, 26(2):123–143, 1983.
- [25] Yogesh Tayal, Ruchika Lamba, and Subhransu Padhee. Automatic Face Detection Using Color Based Segmentation. *International Journal of Scientific and Research Publications*, 2(6), June 2012.
- [26] Michael Ulbrich and Stefan Ulbrich. Restringierte Optimierung. In *Nichtlineare Optimierung*, Mathematik Kompakt, chapter 16, page 94. Springer Basel.