



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUTE OF MATHEMATICS  
AND IMAGE COMPUTING

HERMITE-BIRKHOFF INTERPOLATION WITH RADIAL  
BASIS FUNCTIONS FOR SURFACE MODELING

*HERMITE-BIRKHOFF-INTERPOLATION MIT RADIALEN  
BASISFUNKTIONEN ZUR OBERFLÄCHENMODELLIERUNG*

BACHELORARBEIT

verfasst am  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND IMAGE COMPUTING

im Rahmen des Studiengangs  
MATHEMATIK IN MEDIZIN UND LEBENSWISSENSCHAFTEN  
der Universität zu Lübeck

vorgelegt von  
ALINA RITTER

ausgegeben und betreut von  
PROF. DR. JAN MODERSITZKI

Lübeck, den 3. September 2025

## ZUSAMMENFASSUNG

Eine Linearkombination von Riesz-Darstellern interpoliert Funktionswerte der zugehörigen stetigen linearen Funktionale, die nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz eindeutig zuordenbar sind. Diese interpolierende Funktion wird unter allen Funktionen, die die generierten Funktionswerte interpolieren, als Minimum bezüglich der Norm des Hilbertraums, aus dem die Riesz-Darsteller stammen, bewiesen. Dieser in der Arbeit präsentierte Interpolationsansatz wird auf die Hermite-Birkhoff-Interpolation mit radialen Basisfunktionen (RBFs) spezifiziert, indem die linearen Funktionale in Form einer Verkettung von Auswertung und Differentiation gewählt werden. Das Konzept wird dann zur Modellierung von implizit definierten Oberflächen genutzt, die durch Punkte und Normalenvektoren beschrieben werden. Im Vergleich der von Gauß und Wendland eingeführten RBFs bei der Oberflächenrekonstruktion zeigt sich, dass der freie Parameter der Gauß RBFs die Krümmung der Oberfläche beeinflusst und der Parameter der Wendlandfunktionen einen Interpolationsradius angibt. Optische Rückstände des kompakten Trägers der Wendlandfunktionen können durch die Eingliederung von Polynomtermen in die interpolierende Funktion aufgehoben werden. Die Raum-erweiterung mit Polynomen im Allgemeinen hat einen optisch glättenden Effekt in den Oberflächen.

## ABSTRACT

A linear combination of Riesz representers interpolates values generated by the evaluation of the associated continuous linear functionals. The interpolant of that form is proven to be norm-minimal among all functions interpolating the generated values in the Hilbert space containing the Riesz representers. This in the thesis displayed interpolation approach is specialized to Hermite-Birkhoff interpolation with radial basis functions (RBFs) by choosing a composition of evaluation and differentiation as linear functionals. The interpolation framework is then applied to the problem of modeling surfaces implicitly through a function that interpolates given data, i.e. points and normal vectors. Comparing Gaussian and Wendland RBFs in the interpolation for surface modeling, Gaussian's shaping parameter influences the surface curvature whereas Wendland's denotes an interpolation radius. Optical traces of the Wendland RBF's compact support are revoked by including a polynomial term into the interpolating function. The augmentation with polynomials in general evokes an optical smoothing in the surfaces.

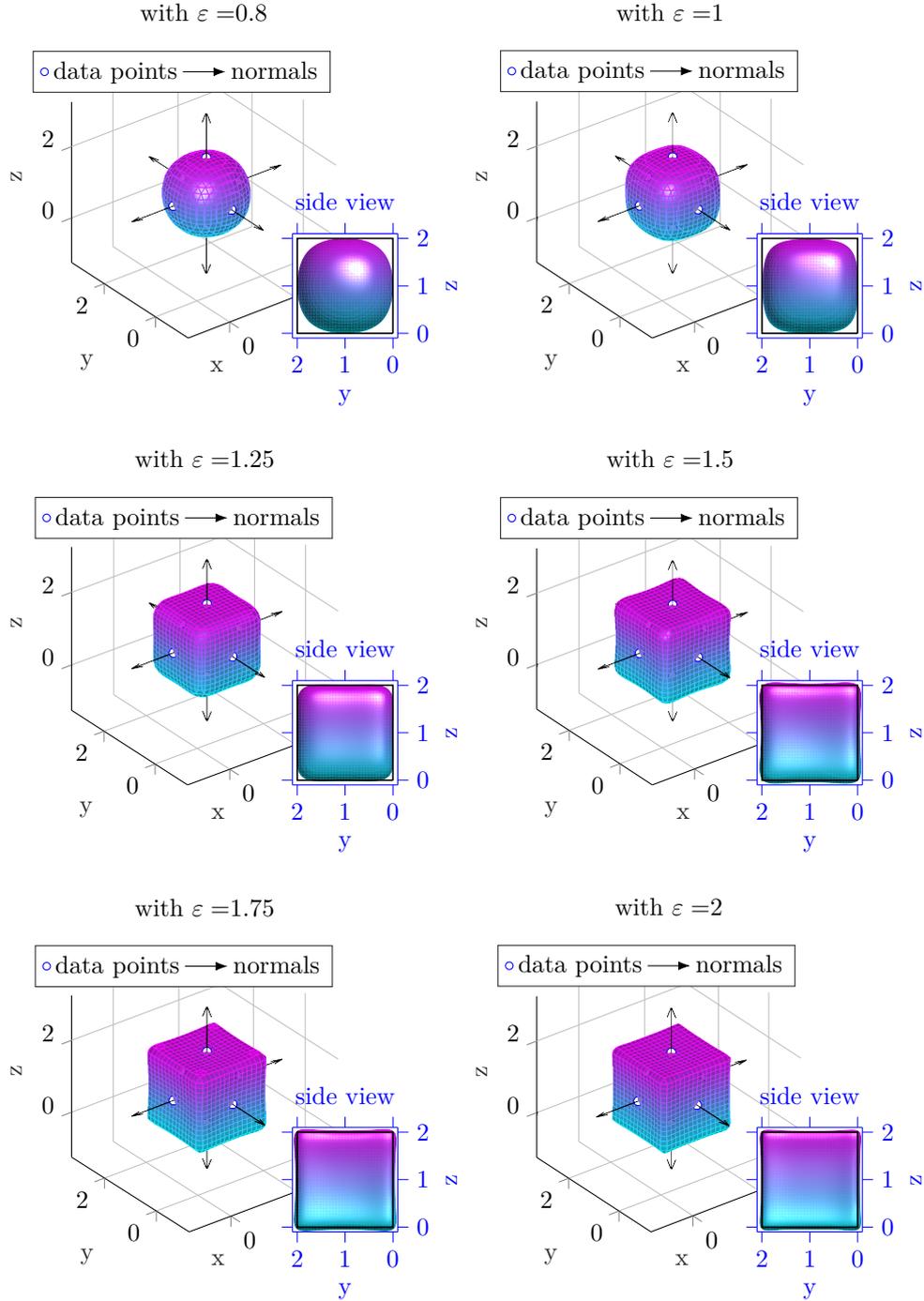


FIGURE 1: A cube's surface reconstructed with Gauss RBFs ( $\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \exp(-\varepsilon^2\|\mathbf{x}\|_2^2)$ ) and various shaping parameter  $\varepsilon > 0$  shows that the cube's faces appear spherical for lower and more planar for higher  $\varepsilon$ . The subplots show an edge comparison of the reconstructed with the ideal cube (black edges) in side view and indicate that the surfaces curvature inverts its direction from outside to inside for growing  $\varepsilon$ .