



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
IMAGE COMPUTING

Masterarbeit

Diffeomorphism-Equivariant Neural Networks

Diffeomorphismusäquivalente Neuronale Netze

Autor: Josephine Elisabeth Oettinger

Betreuer: Prof. Dr. Jan Lellmann,

Mit Unterstützung von: Zakhar Shumaylov und Prof. Dr. Carola Bibiane Schönlieb,
Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics (DAMPT), University of Cambridge

Abstract

Deep learning models are widely used across scientific fields but typically depend strongly on the data seen during training and require large amounts of high-quality data. In this work, we propose and analyse a strategy for turning any neural network into a diffeomorphism-equivariant neural network using an energy-based canonicalisation framework inspired by LieLAC, extended to the group of diffeomorphisms. Our network achieves approximate equivariance without extensive augmentation or retraining. We provide a theoretical analysis with bounds on the expected loss. Experiments on synthetic nested squares and real chest X-ray images demonstrate strong generalisation and competitive segmentation performance.

Zusammenfassung

Deep-Learning-Methoden sind in vielen wissenschaftlichen Bereichen verbreitet, sind jedoch stark von den im Training verwendeten Daten abhängig und benötigen oft große Datenmengen. In dieser Arbeit schlagen wir einen Ansatz vor, mit dem sich ein beliebiges neuronales Netz in ein diffeomorphismusäquivalentes Netz transformieren lässt. Wir verwenden ein energiebasiertes Kanonisierungs-Framework, das von LieLAC inspiriert ist und auf die Gruppe der Diffeomorphismen erweitert wird. Unser Ansatz erreicht annähernde Äquivarianz ohne umfangreiche Datenaugmentation. Wir liefern eine theoretische Analyse inklusive Schranken für den erwarteten Verlust. Experimente auf synthetischen Quadraten und Thorax-Röntgenaufnahmen zeigen gute Generalisierung und wettbewerbsfähige Segmentierungsergebnisse.

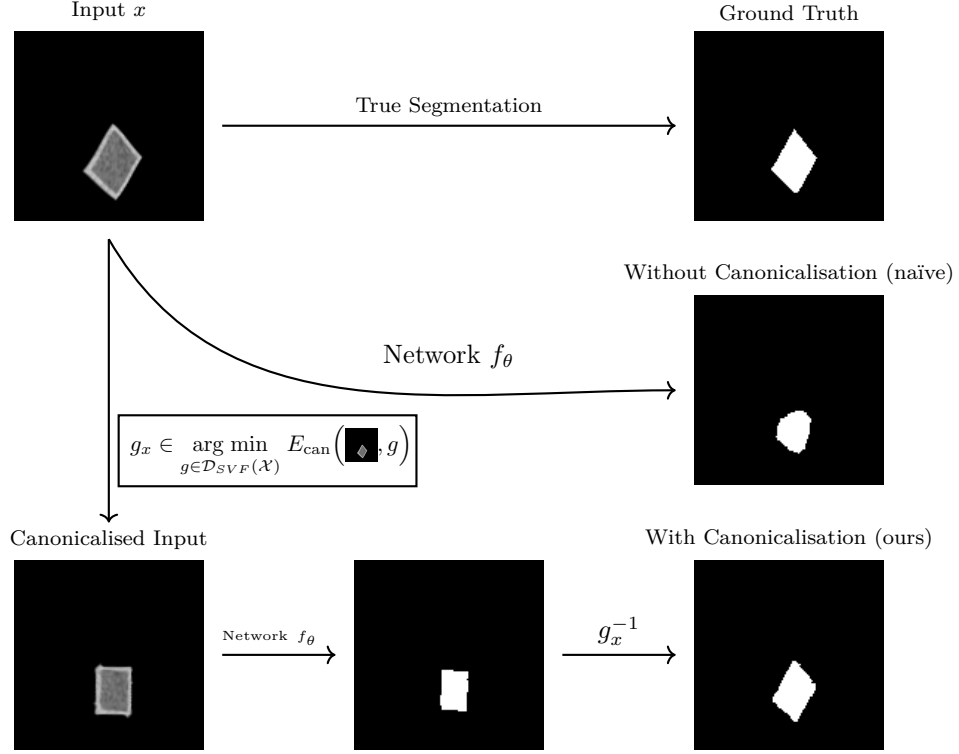


Figure 1: **English:** Canonicalisation strategy for segmentation. The task is to segment the inner square. The network f_θ is pretrained on a dataset of squares. Applying the model f_θ to a diffeomorphically transformed square image without canonicalisation results in an Intersection-over-Union (IoU) of 0.6887 (naïve strategy). One can see obvious classification errors. Using canonicalisation before applying the network f_θ , and then transforming it back, increases the IoU to 0.9299 (our method). The predicted output is nearly identical to the ground-truth segmentation. Our segmentation is significantly closer to a perfect segmentation, which would have an IoU of 1, as the naïve approach. **Deutsch:** Kanonisierungsstrategie beispielhaft für eine Segmentierung. Die Aufgabe besteht darin, das innere Quadrat zu segmentieren. Das Netzwerk f_θ wurde auf einem Datensatz von Quadraten vortrainiert. Wendet man f_θ ohne Kanonisierung auf ein diffeomorph transformiertes Quadratbild an, ergibt sich ein Intersection-over-Union-(IoU)-Wert von 0.6887 (naiver Ansatz). Hier treten deutlich erkennbare Klassifikationsfehler auf. Durch die Verwendung der Kanonisierung vor der Anwendung von f_θ und anschließender Rücktransformation erhöht sich der IoU-Wert auf 0.9299 (unsere Methode). Die vorhergesagte Ausgabe ist nahezu identisch zur Ground-Truth-Segmentierung. Unsere Segmentierung liegt damit deutlich näher an einer perfekten Segmentierung mit IoU von 1 als der naïve Ansatz.