UNIVERSITÄT ZU LÜBECK
INSTITUTE OF MATHEMATICS
AND IMAGE COMPUTING

An l-BFGS based Tikhonov-regularised interior-point method in large-scale nonlinear inequality-constrained convex optimisation

Ein l-BFGS-basiertes Tikhonov-regularisiertes Innere-Punkte-Verfahren für hochdimensionale nichtlineare ungleichungsbeschränkte konvexe Optimierungsprobleme

Masterarbeit

verfasst am
Institute of Mathematics and Image Computing

im Rahmen des Studiengangs
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften
der Universität zu Lübeck

vorgelegt von
Ole Gildemeister

ausgegeben und betreut von
Prof. Dr. Jan Lellmann

mit Unterstützung von
Dr. Florian Mannel

Lübeck, den 07. März 2024

Zusammenfassung

In den letzten Jahren wurde der Entwicklung von Innere-Punkte-Verfahren für hochdimensionale konvexe Optimierungsprobleme viel Beachtung geschenkt. Innere-Punkte-Verfahren sind dafür bekannt, in Kombination mit dem Newtonverfahren exzellent zu funktionieren, aber durch dessen Voraussetzung, lineare Gleichungssysteme mit Hessematrizen zu lösen, ist ihre Verwendung häufig nicht sinnvoll oder sogar unmöglich. Quasi-Newton-Verfahren stellen hierzu eine geeignete Alternative dar, indem sie Ableitungen zweiter Ordnung ausschließlich anhand bereits berechneter Gradienteninformationen approximieren. Allerdings sind sie dafür bekannt, bei schlechter Konditioniertheit langsam zu konvergieren, wodurch ihre Verwendung in Innere-Punkte-Verfahren besonders herausfordernd ist. In dieser Arbeit wird daher ein Verfahren zur Lösung nichtlinearer ungleichungsbeschränkter Probleme diskutiert, in dem ein primaler Innere-Punkte-Ansatz mit einer Tikhonov-Regularisierung modifiziert und ein strukturiertes l-BFGS-Verfahren zum Lösen der inneren Probleme verwendet wird, das darauf abzielt, die Approximation an die Hessematrix zu verbessern. Es wird bewiesen, dass das Verfahren mit einer in den äußeren Iterierten linearen Konvergenzrate gegen die Minimum-Norm-Lösung konvergiert, und dass die Anzahl der l-BFGS-Iterationen, die zum Erreichen einer gegebenen Genauigkeit in der Zielfunktion benötigt werden, polynomiell in dieser Genauigkeit ist. Abschließend werden numerische Ergebnisse präsentiert, die auf die Eignung des Verfahrens für hochdimensionale nichtlineare konvexe Probleme hindeuten.

Abstract

In recent years, the development of interior-point methods for large-scale convex optimisation problems has received much attention. Interior-point methods are well-known to perform excellent when combined with Newton's method, but the latter's requirement of solving linear systems of equations involving Hessian matrices often make their use unviable or even impossible. Quasi-Newton methods present a convenient alternative, as they approximate second-order derivatives using only previously computed gradient information. However, they are known to converge slowly under ill-conditionedness, which makes their use particularly challenging in interior-point methods. In this thesis, a method for solving nonlinear inequality-constrained problems is therefore discussed in which a primal interior-point approach is modified with a Tikhonov regularisation, and in which a structured l-BFGS method is used to solve the inner problems, aiming at improving the Hessian approximation. It is proven that the method converges to the minimal-norm solution at a linear convergence rate in the outer iterates, and that the number of l-BFGS iterations required to reach a given accuracy in the objective function is polynomial in the accuracy. Finally, numerical results of the method are presented which indicate its suitability for dealing with large-scale nonlinear convex problems.

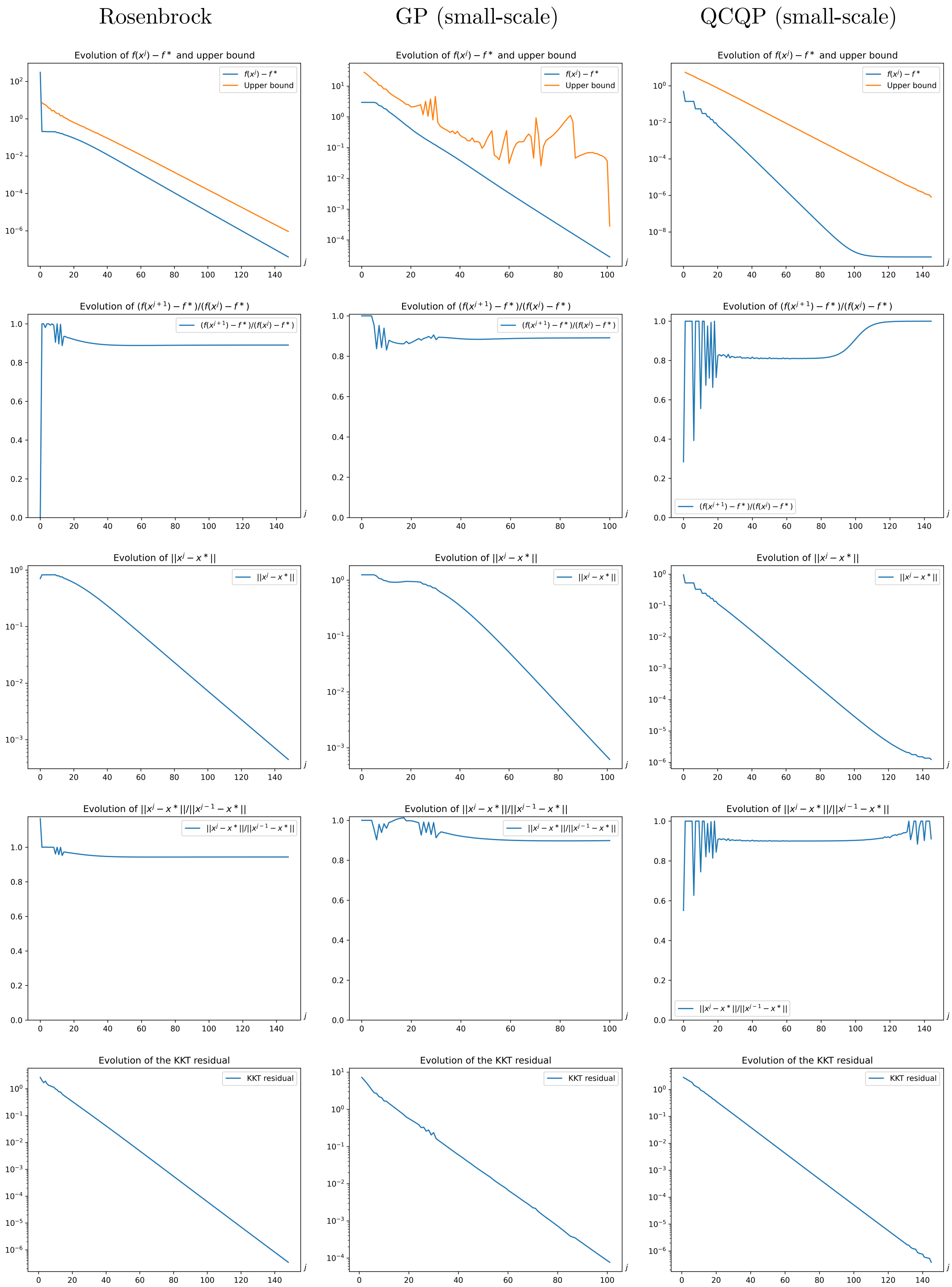

Figure 5.1: Evolution of the Tikhonov-regularised IPM of Algorithm 3.2 in the outer iterations for a small number of variables. The first two rows show how the method converges linearly in the objective at a rate of $\beta = 0.9$ for Rosenbrock and GP, and even of 0.8 for the QCQP. Similarly, the plots in the third and fourth row indicate that linear convergence is obtained in the iterates. In the last row, the decrease of the KKT residual is presented, which again is linear in the logarithmic y-axis.

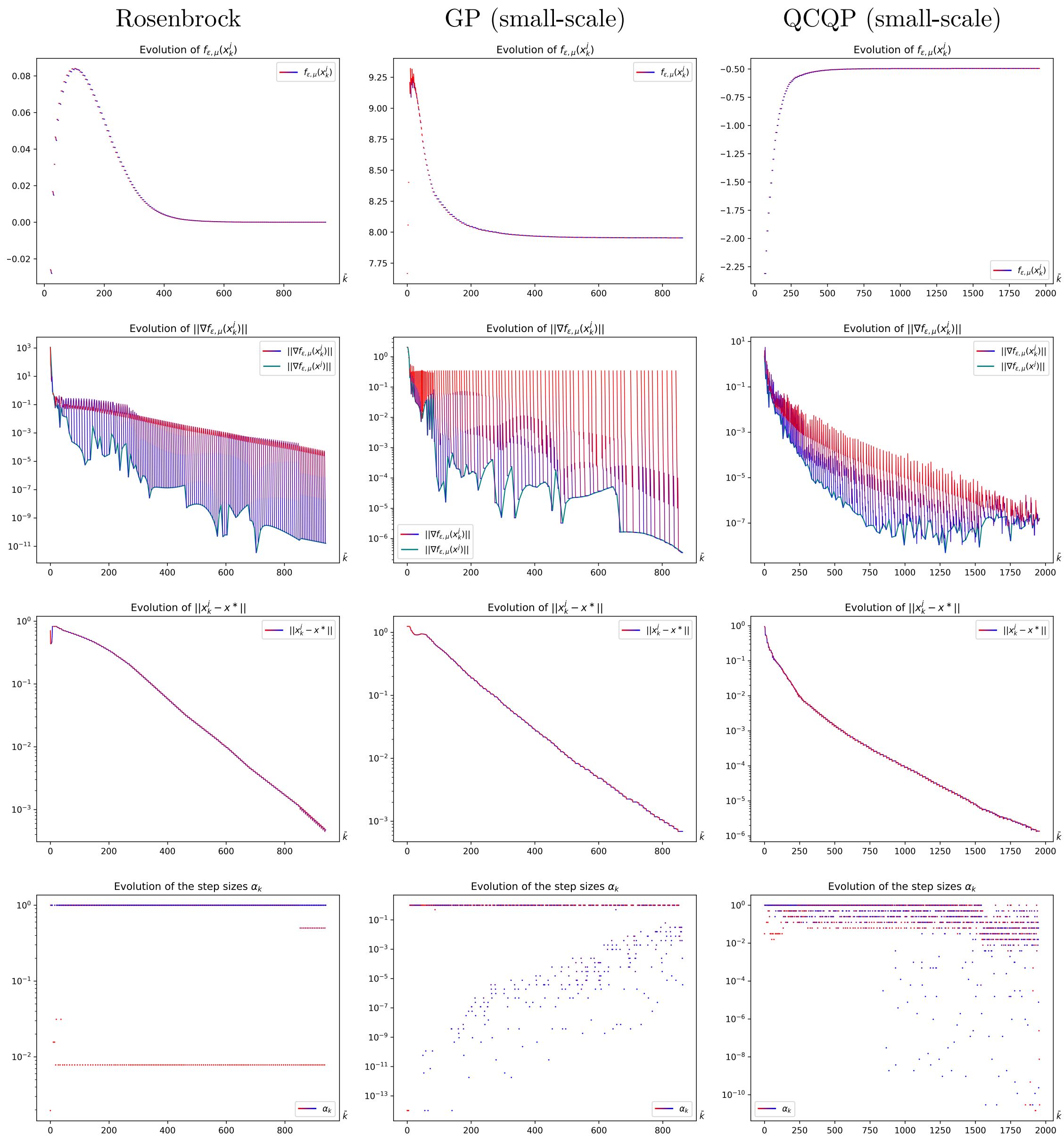

Figure 5.3: Inner iteration behaviour of the Tikhonov-regularised IPM of Algorithm 3.2 for a small number of variables. The results for each inner loop are shown with a colour gradient: from red in the first inner iterate to blue in the last one. By construction of f_{ε_j,μ_j}, its values can increase as well as decrease with progressing outer iterations; in each inner loop, however, they strictly decrease. The overall method demands that each inner loop reduces the gradient norm of f_{ε_j,μ_j} below $C\varepsilon_j^2$. With the subsequent update of ε_j and μ_j, a sudden increase in the gradient norm is observed, ultimately resulting in an overall increasing margin between the initial and final gradient norm in each inner loop. The inner iterates mainly follow the overall trend of the outer iterates observed in Figure 5.1. Their trajectories furthermore indicate that they follow a consistent pattern in each inner loop. In the last row, the step sizes are presented which were obtained in the inner iterations.