



UNIVERSITÄT ZU LÜBECK  
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND  
IMAGE COMPUTING

# Optimierung in der Strahlentherapie

*Optimization in Radiation Therapy*

## Bachelorarbeit

im Rahmen des Studiengangs  
Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften  
der Universität zu Lübeck

### Vorgelegt von

Johannes Kreimer

### Ausgegeben und betreut von

Prof. Dr. Jan Lellmann  
Institute of Mathematics and Image Computing

### Mit Unterstützung von

Dr. Nils Papenberg und Dr. Florian Mannel

12. November 2025



## Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Lübeck,  
12. November 2025

---

Autor



## Kurzfassung

In der Strahlentherapie ist die inverse Planungsoptimierung ein zentraler Bestandteil, um eine hohe Dosis im Tumervolumen zu erzielen und gleichzeitig Risikoorgane bestmöglich zu schonen. Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene Modellierungsansätze für die inverse Planungsoptimierung im Bereich der intensitätsmodulierten Strahlentherapie (IMRT) mathematisch zu formulieren und hinsichtlich der Effizienz und Anwendbarkeit zu vergleichen. Dazu werden zwei Ansätze betrachtet. Der direkte Ansatz verwendet eine Berechnung von Absorptionskoeffizienten während der Optimierung, was zu einem konzeptionell einfachen, aber numerisch aufwendigen Verfahren führt. Der zweite Ansatz beruht auf einer Vorberechnung vor der Optimierung und speichert die Absorptionskoeffizienten in einer Gewichtungsmatrix. Dadurch kann das Problem als lineares Programm (LP) formuliert werden. Während der direkte Ansatz einen allgemeinen Solver für Probleme mit Nebenbedingungen nutzt, erlaubt die LP-Formulierung die Nutzung eines speziellen LP-Solvers. Die numerischen Experimente zeigen, dass die lineare Formulierung mit LP-Solver die effizienteste Lösung liefert und die direkte Methode im Vergleich deutlich langsamer ist. Insgesamt werden die Grenzen des direkten Ansatzes und die Vorteile der Vorberechnung gezeigt. Die Arbeit trägt zur methodischen Einordnung von Modellierungs- und Lösungsansätzen in der inversen Planungsoptimierung bei und verdeutlicht, wie stark sich die Wahl der Modellierung und des Solvers auf die Rechenzeit und die Praktikabilität auswirkt.

## Abstract

In radiation therapy, inverse treatment planning is a key component to achieve a high dose in the tumor volume while sparing organs at risk. The aim of this thesis is to mathematically formulate different modeling approaches for inverse planning in the field of intensity modulated radiation therapy (IMRT) and to compare them in terms of efficiency and applicability. Two approaches are considered. The direct approach computes beam interactions during the optimization, which results in a conceptually simple but numerically expensive procedure. The second approach performs a precalculation step and stores the beam interactions in a weighting matrix. This allows to formulate the problem as a linear program (LP). While the direct method relies on a general solver for constrained problems, the LP formulation additionally enables the use of a specialized LP solver. Numerical experiments demonstrate that the LP formulation combined with an LP solver provides the most efficient solution, whereas the direct method is considerably slower in comparison. Overall, the study highlights the limitations of the direct approach and the advantages of precalculation. This work addresses the methodological classification of modeling and solution strategies in inverse treatment planning and illustrates the significant impact of model formulation and solver choice on computational time and practical applicability.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und theoretischer Hintergrund</b>	<b>1</b>
1.1	Strahlentherapie . . . . .	1
1.2	Grundlagen der Strahlenphysik . . . . .	3
1.3	Dosiskalkulationsverfahren . . . . .	4
1.4	Beiträge und Aufbau dieser Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Mathematische Formulierung</b>	<b>7</b>
2.1	Strahlenmodell . . . . .	7
2.2	Datensatz . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Verfahrensansätze</b>	<b>11</b>
3.1	Inverse Planung . . . . .	11
3.2	Dünnbesetzte Matrix $W$ . . . . .	14
3.3	Einordnung der Verfahren . . . . .	15
3.4	Implementierung der Varianten . . . . .	15
3.5	Numerischer Vergleich der Implementierung . . . . .	17
3.5.1	Unterschiede der Dosiskalkulation . . . . .	17
3.5.2	Vergleich beider Solver . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Klinisches Beispiel</b>	<b>25</b>
4.1	Realistisches 2D Beispiel . . . . .	25
4.2	Klinisches Beispiel . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>31</b>





---

# Kapitel 1: Einleitung und theoretischer Hintergrund

Die Planung der Strahlentherapie ist eine komplexe Problemstellung und zentraler Bestandteil in der modernen Medizin. Eine Strahlentherapie ist eine kurative oder palliative Behandlung von Tumorgewebe, die häufig in Kombination mit einer Resektion des Tumors oder einer Chemotherapie eingesetzt wird. Diese Arbeit lässt sich in eine Reihe von Verfahren zur Berechnung von Dosisverteilungen und deren klinischen Verwendung in der heutigen Krebs- und Tumorbehandlung einordnen [2, 7, 14]. Dabei spielen mathematische Methoden eine wichtige Rolle. Optimierungsverfahren ermöglichen es, Strahlenpläne zu generieren, die für den jeweiligen klinischen Anwendungsfall benötigt werden. Ein Bestrahlungsplan ist eine numerische Simulation der Dosisverteilung unter festgelegten Bestrahlungsparametern, wie die Anzahl und Positionierung der verwendeten Strahlquellen. Bestehende Verfahren werden kontinuierlich weiterentwickelt, um genauere Ergebnisse und eine höhere klinische Genauigkeit zu ermöglichen [8].

## 1.1 Strahlentherapie

Die Strahlentherapie ist eine zentrale Disziplin in der modernen Krebsbehandlung. Etwa 50% aller Krebspatienten erhalten während des Verlaufs ihrer Erkrankung eine Strahlentherapie [2, 5]. Diese ist neben der Chirurgie und der Chemotherapie eine von drei Hauptbehandlungsmethoden in der Tumorthherapie. Oft wird die Strahlentherapie in Kombination mit einer Resektion des Tumors oder einer Chemotherapie eingesetzt, da ein einzelnes Verfahren den Tumor aufgrund der geometrischen Struktur des Gewebes nicht ausreichend reduzieren oder entfernen kann [20, Kapitel 19; 10].

Der Einsatz von Strahlentherapie findet vor allem in der lokalen Kontrolle von Tumoren statt. Diese sollen durch die Anwendung der Therapie vor allem am Weiterwachsen gehindert werden. Es wird hauptsächlich zwischen zwei Anwendungsfällen von Strahlentherapie unterschieden: Die kurative Strahlentherapie, wenn die Möglichkeit besteht, den Patienten zu heilen. Bei Patienten ohne Heilungschancen, zum Beispiel auf Grund von Metastasen, spricht man von einer palliativen Strahlentherapie.

Bevor die Bestrahlung des Patienten beginnen kann, wird nach der Diagnose zunächst ein Bestrahlungsplan erstellt. Dafür wird ein Patientenmodell mit Hilfe einer Computertomographie (CT) erstellt. Das CT liefert nicht nur eine Aufnahme mit Informationen über die geometrische Lage des Tumors und der *Risikoorgane (OARs)*, sondern auch über die Absorptionskoeffizienten des vorliegenden Gewebes [20, Kapitel 19]. Als Risikoorgane werden Organe bezeichnet, die bei einer Bestrahlung beschädigt werden können. In den meisten Fällen bezieht sich diese Bezeichnung auf gesunde Organe, die sich im Bestrahlungsfeld bei einer Strahlentherapie befinden [21]. Auf der Grundlage dieser Daten und des Planungsziels werden die Bestrahlungsparameter festgelegt, das heißt

- Art und Energie der Strahlung und
- Anzahl, Form und Gewichtung der Bestrahlungsfelder.

Anhand dieser Parameter wird dann eine Berechnung der Dosisverteilung durchgeführt, die Dosiskalkulation. Es handelt sich also um eine Simulation der Bestrahlung des Patienten mit den vorher festgelegten Bestrahlungsparametern. Im Anschluss erhält man eine Dosisverteilung, die mit den CT-Informationen überlagert wird [20, Kapitel 19; 16]. Eine solche Überlagerung findet sich in [20, Kapitel 24]. Der Bestrahlungsplan wird anschließend bewertet und die Planparameter angepasst bis der Plan den klinischen Anforderungen entspricht. Abschließend steht ein vollständiger Plan, der noch einmal von einem Medizinphysiker und Strahlentherapeuten geprüft wird. Der Planungsprozess ist dann abgeschlossen.

Da bei der Strahlentherapie in jedem Fall nicht nur das Zielvolumen beschädigt wird, sondern auch das gesunde Gewebe und Risikoorgane, die an das Zielvolumen angrenzen, ist eine möglichst exakte Planung notwendig [2]. Die Möglichkeiten zur Bestimmung der Dosis sind in der Realität durch äußere Faktoren beeinflusst, da unter anderem der Körper eines Patienten durch die Atmung nicht vollständig fixiert werden kann um einen Tumor zu bestrahlen [8].

Bei der herkömmlichen Strahlentherapie werden die Bestrahlungsparameter festgesetzt und in jeder Iteration der Optimierung angepasst. Dieser Prozess wird als *Vorwärtsplanung* bezeichnet. Mit Einführung der intensitätsmodulierten Strahlentherapie (IMRT) in den 1990er Jahren wurde die Verbesserung dieser Pläne immer weiter automatisiert. Dadurch wurden in der Bestrahlungsplanung immer mehr mathematische Methoden der Optimierung eingesetzt. Durch die Automatisierung kann die inverse Planung auf Basis weniger globaler Parameterbedingungen umgesetzt werden [20, Kapitel 24]. Das heißt, durch Vorgabe weniger Einschränkungen kann ein Bestrahlungsplan automatisch berechnet werden kann.

Der Unterschied zwischen der herkömmlichen und der IMRT-Planung wird in Abbildung 1 deutlich. Eine ähnliche Abbildung ist auch in [6, Part I., Kapitel 2] zu finden. Bei dieser Methode dienen nicht nur die Einstrahlrichtungen als Freiheitsgerade, sondern auch die Einstrahlfelder, wodurch eine Schonung der Risikoorgane erzielt werden kann. Dabei wird aus fünf bis neun Einstrahlrichtungen auf das Volumen gestrahlt. Die räumliche Modulation der Einstrahlfelder wird durch Multileaf-Kollimatoren (MLC, eine genaue Erklärung ist in [20, Kapitel 20]) erreicht und kompensiert die fehlende Anpassung der Position der Einstrahlrichtungen [20, Kapitel 24].

Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 1 der Tumor in rot und das strahlensensitive Gewebe, das OAR, in grün dargestellt. Der Tumor soll dabei eine hohe Strahlung erhalten. Die Schwierigkeit besteht darin, dass das OAR nur einen geringen Abstand zum Zielvolumen hat. In 1a liegt das Risikoorgan im Schnitt aller Strahlfelder. Eine ausreichende Bestrahlung des Tumors führt damit, je nach Toleranz des Risikoorgans, zu einer Überdosierung im OAR. Durch die intensitätsmodulierten Bestrahlungsfelder kann eine höhere Dosis im Zielvolumen bei Geometrien wie in Abbildung 1 erreicht werden. Man erkennt, dass die Intensitätsfunktion in Bereichen, die ausschließlich auf das Zielvolumen gerichtet sind, einen höheren Wert annimmt als in Bereichen, die direkt auf das OAR gerichtet sind.

Im Folgenden steht der IMRT-Ansatz im Fokus und soll durch ein einfaches Modell

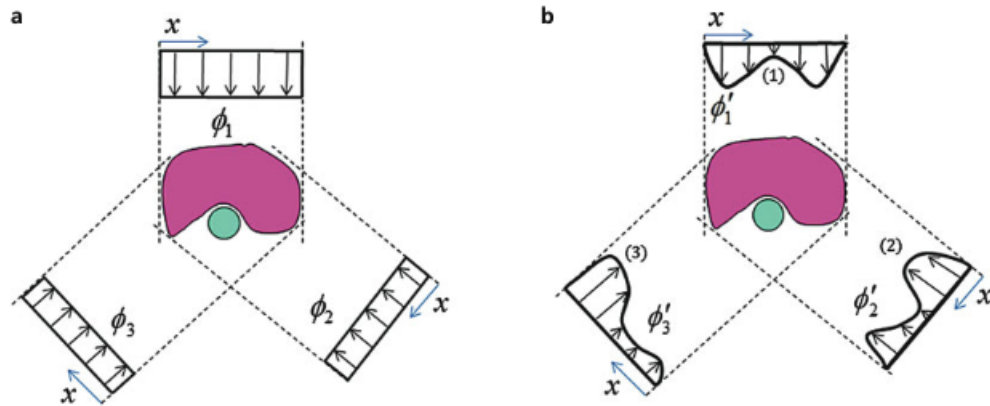


Abbildung 1: Die Abbildung ist aus [20, Kapitel 24] übernommen. a zeigt die konformale Therapie mit offenen Bestrahlungsfeldern. In b ist die Verwendung von intensitätsmodulierten Bestrahlungsfeldern gezeigt.

dargestellt werden. Dafür werden wir im nächsten Abschnitt einige notwendige Grundlagen betrachten.

## 1.2 Grundlagen der Strahlenphysik

In der Medizinphysik wird hauptsächlich mit Photonenenergien im Bereich von 1 keV bis 10 MeV gearbeitet. In diesem Bereich sind im wesentlichen drei Wechselwirkungsprozesse relevant und treten auf, wenn ein Photonenstrahl auf ein Medium trifft [20, Kapitel 1]:

- Absorption,
- Streuung, sowie
- Erzeugung eines Elektronen-Positronen-Paares.

Ein Teil der Strahlungsenergie wird durch das Medium aufgenommen. Photonen wechselwirken mit Atomen und Molekülen. Dabei wird Energie auf Elektronen übertragen, die dann Ionisation und Anregungsprozesse hervorrufen können. Die Energie führt zu Ionisierung, Bildung freier Radikale und DNA-Schäden. Durch diese Prozesse können biologische und chemische Schäden im gesunden Gewebe verursacht werden [20, Kapitel 1]. Dadurch kann es zu irreversiblen Zellschäden bis hin zum Zelltod kommen. Die Prozesse sind also entscheidend für die strahlenbiologische Wirkung der Behandlung. Durch eine gezielte Dosis im Tumor kann Tumorzellsterben erreicht werden [2]. Gleichzeitig besteht ein Risiko für gesundes Gewebe. Deshalb ist die Therapieplanung auf Grundlage von Dosissimulationen notwendig.

Absorption und Streuung haben unterschiedliche Auswirkungen auf die Dosisverteilung. Absorption führt zu einer Abnahme der Intensität des primären Strahls entlang einer Strecke. Streuung dagegen lenkt Photonen sowie durch Sekundärelektronen vermittelte Energie aus der Primärrichtung um und führt dadurch zu einer Dosis außerhalb

des zentralen Strahls [20, Kapitel 1]. Durch das Zusammenstoßen der Photonen mit den Elektronen des Gewebes werden diese abgelenkt und ändern ihre Richtung oder werden absorbiert. Die Streuung setzt sich aus der kohärenten (Rayleigh-) und der inkohärenten (Compton-) Streuung zusammen. Des Weiteren kann ein Elektron-Positron-Paar entstehen. Jeder der hier genannten Prozesse hat die Absorption oder Ablenkung des Photons zur Folge.

Da diese Arbeit eine vereinfachte Modellformulierung verfolgt, wird im Folgenden die Streuung nicht explizit berücksichtigt. Das Lambert-Beer'sche Gesetz beschreibt ausschließlich die exponentielle Abschwächung eines primären Strahls durch Absorption [20, Kapitel 8; 1]. Die Intensität  $\hat{\mathbf{i}}(\Delta t)$  nach der Absorption  $\mu$  über eine durchstrahlte Strecke  $\Delta t$  folgt dem Lambert-Beer'schen Gesetz

$$\hat{\mathbf{i}}(\Delta t) = \mathbf{i}_0 \cdot e^{-\mu \cdot \Delta t}, \quad (1)$$

wobei  $\mathbf{i}_0$  die Anfangsintensität,  $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  der lineare Abschwächungskoeffizient und  $\Delta t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die Weglänge in dem Material ist (vgl. [3, Kapitel 1; 1; 20, Kapitel 1]. Oft wird für die Abschwächung der Massenabschwächungskoeffizient  $\frac{\mu}{\rho}$  angegeben. Der Abschwächungskoeffizient hängt sowohl von der Photonenenergie in  $MV$  als auch von der Ordnungszahl des Absorbers ab.

Die präzise Modellierung des Gewebes und damit der Absorption und Streuung sind essentiell für die Dosiskalkulation. Ungenauigkeiten führen zur Überschätzung, wie häufig bei Typ-1-Kalkulationsmethoden (siehe Abschnitt 1.3), oder Unterschätzung der deponierten Dosis.

### 1.3 Dosiskalkulationsverfahren

Die Verfahren zur Dosiskalkulation sind grundlegend für die Planung einer Bestrahlung. Seit der ersten Anwendung von Strahlentherapie sind die Methoden weiter entwickelt worden und moderne Ansätze entstanden. Besonders die Genauigkeit der Dosiskalkulation und die Geschwindigkeit der Berechnung sind dabei im Fokus, um möglichst exakte Ergebnisse zu erlangen und den Planungsprozess zu beschleunigen. Die grundlegenden Methoden lassen sich in zwei Klassen unterteilen und werden im Folgenden kurz dargestellt.

Methoden vom Typ 1 basieren auf äquivalenten Weglängen, die genutzt werden, um Inhomogenitäten im Gewebe zu korrigieren. Der Elektronentransport wird nicht modelliert. Änderungen der Dichte werden entlang der eindimensionalen Strahlen berücksichtigt, um die Veränderung in der Absorption zu erfassen. Dabei wird die Streuung der Strahlung im Gewebe nicht betrachtet. In der Praxis verhalten sich Typ-1-Algorithmen dichteabhängig. Solche Algorithmen neigen dazu, die Dosis in Bereichen mit geringerer Elektronendichte zu überschätzen, was zu einer Unterdosierung des Tumors führt, und sie in Bereichen mit höherer Elektronendichte zu unterschätzen. Damit kann das Behandlungsziel verfehlt werden [15, 7]. Ein typisches Beispiel für einen Typ-1-Algorithmus ist der Pencil-Beam-Algorithmus. Er basiert auf der Zerlegung eines Bestrahlungsfeldes in viele schmale Teilstrahlen („Pencil Beams“). Die Dosisberechnung beruht auf Messungen der Tiefendosis. In der Praxis wird der Pencil-Beam-Algorithmus durch laterale

Gauß-Funktionen erweitert, die Strahlprofile approximieren. Dadurch kann Streuung approximiert werden [13].

Im Gegensatz dazu berücksichtigen die Methoden vom Typ 2 zusätzlich den Elektronentransport, wobei Elektronen- und Photonentransport approximiert werden. Die Dichte für die Absorption wird dreidimensional abgetastet. Ein Beispiel ist hier der Collapsed-Cone-Algorithmus.

Zwischen diesen Methoden bestehen große Unterschiede, die sich vor allem auf die Genauigkeit der Berechnung und damit insbesondere die Vorhersage, wie viel Strahlung im Zielvolumen ankommt, auswirken. Der Algorithmus, mit dem die Verfahren verglichen werden, ist der Monte Carlo Algorithmus. Dieser liefert in der Regel die höchste Genauigkeit, allerdings auf Kosten deutlich höherer Rechenzeit [14, 12, 7]. Der Monte Carlo Algorithmus basiert auf Berechnungen mit randomisierten unabhängigen Zahlen und statistischer Analyse, die auf zuvor simulierten Ergebnissen beruht. Es werden stochastische Modellierung von Photonen- und Elektronentransport durchgeführt, dabei werden zufällige Partikelbahnen durch das Gewebe simuliert und die resultierende Dosisverteilung wird statistisch ausgewertet. Der Algorithmus lässt sich nach [18] in vier Teilschritte unterteilen.

Zu Beginn einer neuen Simulation wird ein deterministisches Modell zur Beschreibung des Bestrahlungsszenarios erstellt. Anschließend werden bekannte Eingangsgrößen, etwa aus existierenden Patientendaten, verwendet, um die Verteilung der relevanten Variablen zu bestimmen. Danach finden die stochastischen Simulationen statt, bei denen die zufälligen Partikelpfade berechnet werden. Durch die Simulationen der Teilchenpfade entstehen unterschiedliche Abbildungen des Strahlentransports im Gewebe. Die Ergebnisse werden statistisch analysiert, um die Dosisverteilung im Zielvolumen und dem umgebenden Gewebe abzuschätzen [4, 18].

Ein Vergleich verschiedener Typ 1 und Typ 2 Methoden mit dem Monte Carlo Algorithmus zeigte, dass vor allem einfache Typ 1 Algorithmen die im Zielvolumen deponierte Dosis überschätzen, wenn die Elektronendichte kleiner als eins ist. Ist die Elektronendichte größer als eins ist können sie auch unterschätzen [7, 14]. Beispielsweise wird die deponierte Dosis im Bereich der Lunge aufgrund der geringen Elektronendichte eher überschätzt [7; 20, Kapitel 24].

## 1.4 Beiträge und Aufbau dieser Arbeit

In dieser Arbeit wird ein vereinfachtes Modell entwickelt, um die Prinzipien der Strahlentherapieplanung nachvollziehbar darzustellen. Ziel ist es, eine Dosisverteilung für ein Bestrahlungsgebiet zu berechnen. Es wird ein zweidimensionaler Bereich mit einem Bestrahlungsziel angenommen, auf dem mit Methoden der Optimierung die Intensitäten für eine Bestrahlungssimulation berechnet werden. Die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren sind stark simplifiziert und betrachten ausschließlich die Absorption der abgestrahlten Intensitäten. Präzisere Simulationen werden in der Praxis zum Beispiel durch den Monte-Carlo-Algorithmus erreicht [7, 14, 12]. Die Zielsetzung besteht vor allem in der mathematischen Formulierung zur Problemlösung und der Umsetzung des Verfahrens auf eine zweidimensionale Schicht eines klinischen Beispiels. Alle Angaben zu Dosis-

oder Intensitätswerten sind relativ und stehen nicht im direkten Zusammenhang mit der klinischen Anwendung.

Zu Beginn wird in Kapitel 2 das Strahlenmodell, was wir in dieser Arbeit verwenden wollen, dargestellt wird. Dieses soll ausschließlich die Absorption von Strahlung modellieren. Dafür wird ein 2D-Bereich als Grundlage für die Entwicklung eines stark vereinfachten Verfahrens zur Dosiskalkulation klassifiziert.

In Kapitel 3 wird der Berechnungsansatz über eine Vorwärts-Funktion hergeleitet und das Planungsproblem als Minimierungsproblem modelliert. Die Vorwärts-Funktion soll Abschwächungsgewichte auf Grundlage der Absorptionskoeffizienten berechnen. Das Problem wird anschließend aufgrund der linearen Struktur mittels einer Vorberechnung in ein lineares Problem überführt. Die in der Vorberechnung erhaltenen Gewichte werden in einer dünnbesetzten Matrix gespeichert. Abschließend werden beide Verfahren hinsichtlich der Laufzeit und eventueller Dosisunterschiede verglichen.

Im letzten Kapitel 4 wird das lineare Verfahren auf zwei realistische Beispiele angewendet. Zunächst wird eine realistisch konstruierte Geometrie verwendet und in einem weiteren Schritt ein klinischer CT-Datensatz, um das Verfahren zu testen. Das Ergebnis wird mit einer klinischen Dosisverteilung verglichen. Dadurch werden die Plausibilität und Limitationen des simplifizierten Modells und des darauf angewendeten Verfahrens herausgestellt.

---

## Kapitel 2: Mathematische Formulierung

In diesem Abschnitt wird das Strahlenmodell vorgestellt, das die Grundlage der Planungsoptimierung darstellt. Anschließend wird der darauf aufbauende 2D-Bereich erläutert. Der 2D-Bereich ist ein zweidimensionaler Schnitt eines dreidimensionalen Planungsgebiets, auf dem die Modellierung durchgeführt werden soll.

### 2.1 Strahlenmodell

Der Plan für eine Bestrahlung enthält hauptsächlich drei wichtige Punkte:

- Das Isozentrum: der Mittelpunkt, um den die Bestrahlungsachse dreht,
- die Beampositionen und
- die Intensitätswerte.

Das Isozentrum ist der Mittelpunkt des Zielvolumens. Je nach Planungsziel kann die Position variieren, da das Planungsziel individuell an den Patienten und damit an das Tumervolumen und die geometrischen Strukturen des Gewebes angepasst wird [20, Kapitel 19]. Die Intensitätswerte liefern eine Dosisverteilung im bestrahlten Volumen, wobei das Volumen durch Voxel diskretisiert wird. Im Zweidimensionalen kann man dazu die Pixel des Bildes als Diskretisierung nutzen. Eine mögliche Diskretisierung ist anschaulich in Abbildung 2 dargestellt. Dabei stellt der Vektor vom Eintrittspunkt bis zum Punkt P den Weg eines Strahls im inhomogenen Gewebe dar. Jedes Voxel kann dabei genau einen Dichtewert annehmen und hat damit einen festen Abschwächungskoeffizienten. Daher kann man die Dosisverteilung als Matrix mit auf den Voxeln basierenden Dosen schreiben

$$0 \leq (d_{yx}) = \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m_y \times m_x}. \quad (2)$$

Dabei hängt die Anzahl der Einträge von der Auflösung ab und liegt üblicherweise im Bereich von  $10^5$ – $10^6$  [19]. Tragen mehrere Strahler von einem oder verschiedenen Beams zur Dosis in einem Voxel bei, addieren sich die Beiträge linear. Die Beams sind außerhalb des Volumens angeordnet und haben einen Abstand  $d$  zum Isozentrum. Auf die Beampositionen wird genauer im nächsten Abschnitt 2.2 eingegangen. Die Intensität aller Strahler wird in einem Intensitätsvektor  $\mathbf{i}$  zusammengefasst

$$0 \leq (i_j) = \mathbf{i} \in \mathbb{R}^J, \quad (3)$$

wobei  $J \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Strahler aller Beams beschreibt. Ziel ist es die Intensität so anzupassen, dass das Planungsziel mit den Tumervolumen und Risikoorganen erfüllt wird. Die Intention besteht darin, eine optimale Lösung  $\mathbf{i}^*$  für das gegebene Planungsproblem zu finden, sodass das Bestrahlungsziel eine ausreichenden Dosis erhält und im Risikogewebe eine vorgegebene Dosisgrenze nicht überschritten wird.

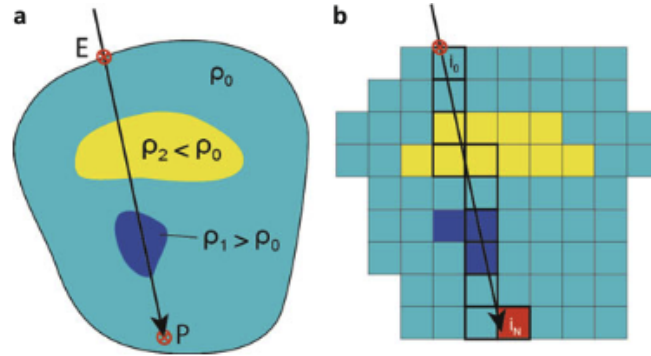


Abbildung 2: Weg eines einzelnen Strahls (schwarz) durch ein inhomogenes Medium. In a ist die kontinuierliche Darstellung und in b die diskretisierte Darstellung einer Geometrie mit inhomogener Dichte abgebildet. Der Strahl durchläuft vom Eintrittspunkt E bis zum Punkt P Gewebe mit unterschiedlicher Dichte (gelb und dunkelblau), von der die Abschwächung abhängt. Abbildung aus [20, Kapitel 24]

## 2.2 Datensatz

Abbildung 3 zeigt den Testfall. Um die Analyse der Optimierung zu vereinfachen wird ein zweidimensionales Volumenmodell angenommen, das auf einem quadratischen Bild aufbaut. Das Isozentrum wird auf den Koordinatenursprung festgelegt. Das Bild hat eine Seitenlänge von 20 cm und ist diskretisiert mit  $256 \times 256$  Pixeln. Die Wahl der Auflösung ist ein Kompromiss, um einerseits relevante Dosisunterschiede im Bild abbilden zu können und andererseits die Rechenzeiten während der Optimierung gering zu halten. Im Zentrum des Bildes befindet sich ein Kreis mit Radius  $r_T = 1$ . Der Kreis repräsentiert das Zielvolumen, welches etwa einen Tumor darstellt. Dieser liegt in einem kreisförmigen Körper der Form mit Radius  $r_K = 10$ . Die Fläche um das Zielvolumen im Körper wird als Risikogewebe bezeichnet. Ein Beispiel ist normales Weichgewebe, das den Tumor umschließt. Das Risikogewebe soll geschont werden, also möglichst keine Strahlung abbekommen.

Die Beampositionen sind in diesem Beispiel konzentrisch außerhalb des Bildbereichs angeordnet. Ein Beam stellt dabei einen Vektor von einzelnen Punktstrahlern dar, von denen jeweils die Strahlen geradlinig auf das Target abgegeben werden. Der Beam-Vektor wird anhand des Vektors vom Zentrum bis zum Mittelpunkt des Beams berechnet und wird um  $90^\circ$  gedreht. Auf diesem Vektor werden dann die Strahler mit paralleler Strahlrichtung auf das Target  $\mathcal{T}$  mit einem vorgegebenen Abstand angeordnet. Der Mittelpunkt jedes Beams hat in diesem Modell einen Abstand von  $d = \sqrt{200}$  cm zum Zentrum des Bildes. Dadurch liegen für die hier gewählte Modellgröße alle Strahler außerhalb des Bestrahlungsobjekts.

Die abgegebene Anfangsstrahlung  $\mathbf{i}_0$  erreicht das Target nicht, da zwischen Strahlanfang und dem betrachteten Pixel unterschiedliches Gewebe liegt. In Abbildung 3 ist eine modellhafte Abschwächung dargestellt. Wie in Abschnitt 1.2 eingeführt, ist  $\mu$  der lineare Abschwächungskoeffizient des Gewebes [17]. Der Abschwächungskoeffizient wird in einer



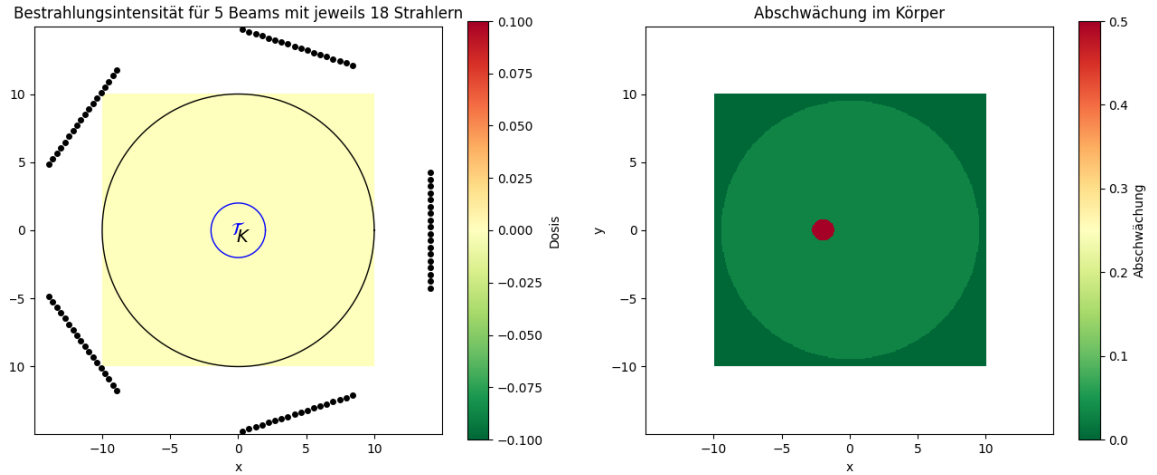


Abbildung 3: In der linken Abbildung sieht man den 2D-Bereich mit dem Target  $\mathcal{T}$  in Zentrum. Hier ist der Radius  $r_{\mathcal{T}} = 2$ . Außen befinden sich 5 Beams mit jeweils 18 Strahlern. Der Abstand zwischen den Strahlern beträgt 0.5 cm. In der rechten Hälfte ist eine Abschwächungsmatrix abgebildet.

Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m_y \times m_x}$  gespeichert, wobei für dieses Modell  $m_y = m_x = 256$  gilt. Daher gilt für die Matrix  $A$

$$A = (a_{yx}) = \mu_{v_y, v_x} \quad (4)$$

mit den Abschwächungskoeffizienten  $\mu_{v_y, v_x}$  des Pixels  $(v_x, v_y)$ . Die Abschwächungen werden für jeweils ein Organ einheitlich festgelegt. Für den 2D-Bereich wird im Risikogewebe eine Abschwächung von  $\mu = 0.03 \text{ cm}^{-1}$  angenommen. Als Standardmodell wird das folgende Modell definiert:

Isozentrum	Beams	Strahler	Abstand zwischen den Strahlern	$r_{\mathcal{T}}$
(0, 0)	5	10	0.5	1

Tabelle 1: Standardmodell

Dieses Modell wird in dieser Arbeit als Referenz verwendet, um einen Bezug zwischen verschiedenen Modellen herstellen zu können.



---

## Kapitel 3: Verfahrensansätze

In dieser Arbeit werden zwei Implementierungsvarianten untersucht. Beide Varianten basieren auf einer Vorwärtsberechnung, an die eine Optimierung der Strahlenintensitäten des inversen Planungsproblems gekoppelt ist. Die erste Variante wird in die zweite überführt, welche die Vorwärtsberechnung vor der Optimierung durchführt.

### 3.1 Inverse Planung

Die grundlegende Idee der Ansätze in dieser Arbeit beruht darauf, die von den Strahlern deponierte Dosis in jedem Pixel des Volumens zu berechnen, dabei ist mit der deponierten Dosis die transmittierte Strahlenintensität gemeint. Es muss also eine Vorwärtsberechnung der Dosis ausgehend von der eingegebenen Intensität durchgeführt werden. Die Anzahl der Strahler und die Beampositionen werden vor der Berechnung festgelegt. Um die Dosis in einem Pixel zu erhalten, wird jeder Strahl  $j \in \{1, \dots, J\}$  mit einer Schrittweite  $\Delta t \in \mathbb{R}_{>0}$  diskretisiert. Der Strahl wird damit in diskrete Punkte mit entsprechender Schrittweite unterteilt. Abbildung 4 zeigt eine solche Diskretisierung eines Strahls.

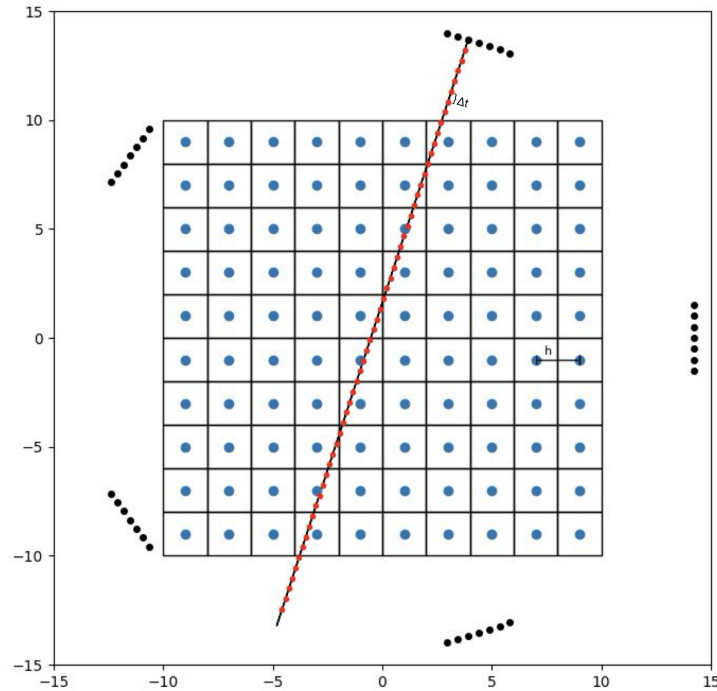


Abbildung 4: Eine Diskretisierung eines  $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$  Bildes mit  $10 \times 10$  Pixeln. Blaue Punkte stellen die Pixelmittelpunkte dar, schwarze Punkte mögliche Strahlerpositionen. Ein Strahl ist als schwarze Gerade durch das Gitter dargestellt. Die Abtastung mit der Schrittweite  $\Delta t = 0.5$  ist durch die roten Punkte auf der Geraden dargestellt.

Schneidet Strahl  $j$  ein Pixel, wird die dort deponierte Dosis in der Dosis-Matrix  $\mathbf{D}$  gespeichert. Das Ziel besteht darin, eine optimale Intensitätseinstellung für jeden Strahler zu erreichen, damit das vorgegebene Planungsziel erfüllt wird. Dabei werden hier die Intensitäten direkt optimiert, was in der Praxis nicht funktioniert, da eine feste Photonenenergie festgelegt wird. Die unterschiedlichen Intensitäten werden dann durch Anpassen der Bestrahlungsfelder erreicht (siehe Kapitel 1.1).

Die Vorwärts-Funktion stellt die Berechnung der erhaltenen Dosis in jedem Pixel des Bildes dar. Für jeden Strahler sind die Startintensitäten  $\mathbf{i}_0 = (i_1, \dots, i_J)$  vorgegeben. Dazu sei

$$D : \mathbb{R}^J \longrightarrow \mathbb{R}^{m_y \times m_x}, \quad \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_J) \longmapsto D(\mathbf{i}), \quad (5)$$

wobei  $J \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Strahler ist, die gleichmäßig auf die Beams verteilt sind.  $(v_x, v_y)$  ist der Index eines Pixels  $v$  im Bildgitter mit  $v = (v_x, v_y) \in \{1, \dots, m_x\} \times \{1, \dots, m_y\}$ .

Die Dosis  $D[v](\mathbf{i})$  in jedem Pixel ergibt sich durch Aufsummieren der Beiträge aller Strahlen  $j = 1, \dots, J$ , die mit dem Pixel interagieren. Mit (1) kann die Dosis im Pixel  $v$  durch

$$D[v](\mathbf{i}) = \sum_{j=1}^J i_j \cdot e^{-\sum_{l=1}^{k_v^{(j)}} \mu_{v_y^{(l,j)}, v_x^{(l,j)}} \cdot \Delta t} \quad (6)$$

dargestellt werden. Der letzte Diskretisierungsschritt entlang von Strahl  $j$ , der im Pixel  $v$  liegt wird durch den Index  $k_v^{(j)}$  angegeben. Die Summe im Exponenten gibt die Abschwächung bis zu dieser Stelle an, wobei  $\mu_{v_y^{(l,j)}, v_x^{(l,j)}}$  die Abschwächung im  $l$ -ten Schritt von Strahl  $j$  beschreibt.

Um die zwei verfolgten Ansätze zu unterscheiden, werden diese im Folgenden mit Ansatz  $A$  und Ansatz  $B$  bezeichnet. Da die Zielfunktion unabhängig von der Art der Berechnung ist, definieren wir für beide Ansätze  $A$  und  $B$  die Zielfunktion  $f : \mathbb{R}^J \longrightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(\mathbf{i}) = - \sum_{(v) \in \mathcal{T}} D[v](\mathbf{i}) + \lambda \sum_{(v) \notin \mathcal{T}} D[v](\mathbf{i}). \quad (7)$$

$\mathcal{T}$  ist die Menge aller Pixel die sich im Target befinden. Da eine vorgegebene Minstdosis im Target erreicht werden soll, können wir die Zielfunktion um den Term über das Target reduzieren. Über den Strafterm mit Faktor  $\lambda > 0$  soll die Dosis im Risikogewebe reguliert werden. Für die Berechnungen in diesem Modell wird  $\lambda = 1$  angenommen. Damit lässt sich die Zielfunktion schreiben als

$$f(\mathbf{i}) = \sum_{(v) \notin \mathcal{T}} D[v](\mathbf{i}). \quad (8)$$

Als Nebenbedingung wird Intensität  $\mathbf{i} \geq 0$  erzwungen. Des Weiteren wird eine maximale Strahlenintensität  $i_{\max}$  festgelegt. Dadurch können lokale Hotspots vermieden und das Risiko für gesundes Gewebe begrenzt werden. Damit können wir das Planungsproblem

über die Zielfunktion  $f$  wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned}
& \inf_{\mathbf{i} \in \mathbb{R}^J} f(\mathbf{i}) \quad \text{u.d.N.} \\
& \mathbf{i} \geq 0, \\
& \mathbf{i} \leq i_{\max}, \\
& \sum_{(v) \in \mathcal{T}} D[v](\mathbf{i}) \geq d_{\min}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Wir formulieren die Dosisanforderung für das Target  $\mathcal{T}$  als die Summenbedingung über alle Pixel, die sich im Target befinden. In diesem Fall wird diese Anforderung auf  $d_{\min} = 50$  relative Einheiten festgelegt. Die Summenbedingung ist weniger restriktiv als eine Pixel-Mindestbedingung und erlaubt lokale Unterschiede innerhalb von  $\mathcal{T}$ . Für die Beispieldaten in 3.5 wählen wir  $i_{\max} = 20$ .

### Verfahren ohne Vorberechnung

Der heuristische Ansatz (A) führt eine Vorwärtsberechnung durch, indem von einer gegebenen Anfangsstrahlung die dazugehörige Dosisverteilung im Volumen berechnet wird. Dazu werden die einzelnen Strahlen  $j$  separat mit einer Schrittweite  $\Delta t$  abgelaufen. So wird die deponierte Dosis in einem Pixel  $(v_x, v_y)$  über die Summe der Strahler, die dieses Pixel schneiden, gemäß Gleichung (6) berechnet. In jedem Optimierungsschritt wird diese Berechnung wiederholt. Notwendig ist diese Berechnung vor allem dann, wenn sich die Abschwächungskoeffizienten entlang der Strahlwege während der Optimierung ändern. Dies könnte zum Beispiel durch Atem- und Organbewegungen entstehen, wird aber hier nicht weiter betrachtet. Insgesamt hat diese Methode damit eine Laufzeit von  $\mathcal{O}(J \cdot L)$ . Dabei ist  $L$  die Anzahl der Diskretisierungsschritte pro Strahl in Abhängigkeit von  $\Delta t$ .

### Vorberechnung

Da wir für die Berechnung eine konstante Abschwächung im Gewebe annehmen, kann wie im zweiten Ansatz (B) zu Beginn eine Vorberechnung durchgeführt werden. Es werden für jeden Strahl  $j$ , unabhängig von der Startintensität  $\mathbf{i}$ , Koordinaten und die dazugehörigen Abschwächungsgewichte in einer Liste `beam_data[j]` gespeichert. Das heißt, für jeden Pixel können alle Strahler abgerufen werden, die in einem Pixel Strahlung deponieren. Zusätzlich kennt man dadurch direkt deren Abschwächungsgewichte. Die Vorberechnung hat den gleichen Aufbau wie die Berechnung von Ansatz A und liegt daher ebenfalls in  $\mathcal{O}(J \cdot L)$ . Die Berechnung wird allerdings nur einmalig durchgeführt. Mit (6) ergibt sich für die Abschwächungsgewichte

$$w_v^{(j)} = e^{-\sum_{l=1}^{k_v^{(j)}} \mu_{v_y^{(l,j)}, v_x^{(l,j)}} \cdot \Delta t} \tag{10}$$

In jedem Schritt der Optimierung wird dann auf die vorberechneten Gewichte zurückgegriffen. Damit reduziert sich das Modell und es gilt für jeden Pixel  $(v_x, v_y)$

$$D[v](\mathbf{i}) = \sum_{j=1}^J i_j \cdot w_v^{(j)} = \langle \mathbf{i}, w_v \rangle. \tag{11}$$

Durch die Vorberechnung der Abschwächungsgewichte reduziert sich der Rechenaufwand pro Funktionsauswertung auf Kosten eines höheren Speicheraufwands. Bei schwierigen Problemen kann das Auslesen der vorher berechneten Abschwächungen dabei zu einer Erhöhung der Laufzeit führen. Um den Speicheraufwand der Vorberechnungsmethode auf ein Minimum zu reduzieren, werden die Abschwächungsgewichte in einer dünnbesetzten Matrix  $W$  gespeichert, da die meisten Pixel nicht von einem Strahl berührt werden und damit Nulleinträge entstehen. Die Anzahl der Nulleinträge wird mit  $n$  bezeichnet. Die Matrix  $W$  ergibt sich als

$$0 \leq w_{p,j} = W \in \mathbb{R}^{P \times J}, \quad \text{mit} \quad m_y \cdot m_x = P \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

$P$  stellt hier die Gesamtzahl aller Pixel dar, sodass sich für  $m_x = m_y = 256$  also  $P = 65.536$  ergibt. Alle Gewichte, die zu dem Strafterm beitragen, also im Risikogebiet liegen, werden in einem Vektor  $c \in \mathbb{R}^J$  mit

$$c_j = \sum_{p \in \mathcal{T}} W_{p,j} \quad (13)$$

gespeichert. Damit kann das Problem in ein lineares Problem (LP) der Form,

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{i} \in \mathbb{R}^J} \quad & c^\top \mathbf{i}, \\ \text{u.d.N.} \quad & \mathbf{i} \geq 0, \\ & \mathbf{i} \leq 20, \\ & \sum_{p \in \mathcal{T}} \sum_{j=1}^J W_{p,j} i_j \geq 50, \end{aligned} \quad (14)$$

umformuliert werden.

### 3.2 Dünnbesetzte Matrix $W$

Die Matrix  $W \in \mathbb{R}^{P \times J}$  ist die zentrale Struktur von Ansatz B. Sie kodiert für jeden Strahler  $j$  und jeden Bildpunkt  $p$  die Abschwächungsgewichte des jeweiligen Pixels. Dabei wird der zweidimensionale Bildindex  $(v_x, v_y)$  durch eine flache Indizierung

$$p = (v_y - 1) \cdot m_x + (v_x - 1) \quad (15)$$

in einen eindimensionalen Index überführt. Die Matrix ist dünnbesetzt (*engl.* sparse), da jeder Strahl nur eine kleine Teilmenge der Pixel beeinflusst. Diese Form der Speicherung reduziert den Speicherbedarf und ermöglicht die vollständige lineare Modellierung des Dosisproblems. Ein Beispiel für das gegebene Problem ist in Abbildung 5 für ein stark reduziertes Bild mit geringerer Auflösung dargestellt. Die Einträge im Bereich des Targets wurden dabei bewusst ausgeblendet, um die Struktur für die restlichen Pixel besser sichtbar zu machen. Der Anteil der von Null verschiedenen Einträge der Matrix liegt bei 4%. Die dünnbesetzte Struktur bleibt bei komplexeren Strukturen und höherer Auflösung erhalten. Der Anteil der nicht verschwindenden Einträge ist hier sogar deutlich geringer und liegt bei 0.5% in den Testfällen aus Tabelle 2 und dem realistischen Beispiel (siehe Abschnitt 4.1).

### 3.3 Einordnung der Verfahren

Die beiden vorgestellten Varianten zur inversen Planungsoptimierung basieren auf demselben physikalischen Grundmodell, unterscheiden sich jedoch deutlich in ihrer Speicher- und Berechnungskomplexität.

In Abschnitt 3.1 wurde festgestellt, dass die einmalige Berechnung der Abschwächungsgewichte in  $\mathcal{O}(L \cdot J)$  liegt. Da diese bei der Optimierung mit Typ *A* in jeder Iteration durchgeführt wird ist die Berechnungszeit deutlich größer als bei der linearen Formulierung mit Gewichtsmatrix  $W$ . Durch das Speichern der Abschwächungsgewichte ist der Speicheraufwand deutlich größer, als wenn die Gewichte in jedem Schritt neu berechnet werden. Die meisten der Einträge sind in der Matrix jedoch Null, wodurch sich der Speicheraufwand gut kontrollieren lässt, da eine Speicherung als schwach besetzte Matrix möglich ist.

Beide Verfahren nutzen die gleiche Form der Berechnung und ähneln vor allem dem Pencil-Beam-Algorithmus [13]. Dies ist begründet durch die Modellierung der Dosis entlang aller Strahlpfade mit exponentieller Abschwächung. Das heißt sie erfassen die Photonabschwächung in die jeweilige Strahlrichtung, betrachten aber Streuung und Elektronentransport nicht. Der Pencil-Beam-Algorithmus ist, wie in Abschnitt 1.3 erläutert, physikalisch weniger genau als der Collapsed-Cone oder Monte Carlo Algorithmus, da er stärkere Approximationen verwendet und Streuung nur vereinfacht berücksichtigt.

### 3.4 Implementierung der Varianten

Alle Algorithmen wurden in Python implementiert. In Algorithmus 1 ist die Berechnung der dünnbesetzten Matrix  $W$  dargestellt. Für die Berechnungen wurde insbesondere das Paket `scipy.sparse` mit der Funktion `coo_matrix` verwendet. Das COO-Format (Coordinate Format) speichert die Koordinaten aller nicht verschwindenden Einträge der Matrix. Konkret werden drei Vektoren gespeichert. In diesen stehen die Zeilen und Spaltenindizes sowie die dazugehörigen Einträge. Durch diese Darstellung wird die Verwendung der linearen Indizierung der Voxelkoordinaten verdeutlicht. Durch die Umwandlung des COO-Formats in das CSR-Format lassen sich Matrix-Vektor Produkte schneller berechnen. Das CSR-Format (Compressed Sparse Row) speichert, genau wie das COO-Format, nur Informationen über die von Null verschiedenen Einträge. Dabei werden wieder drei Vektoren gespeichert:

- die Einträge,
- zugehörige Spalten der Einträge,
- zugehörige Zeilen der Einträge.

Das COO-Format wird nur für den Aufbau der dünnbesetzten Struktur verwendet.

Mit der Nutzung einer Target-Maske und Risiko-Maske können entscheidende Gewebestrukturen kontrolliert werden. Jeder Eintrag der Matrix  $W$  repräsentiert den Beitrag,

den ein einzelner Strahler zu einem bestimmten Voxel liefert. Damit stellt  $W$  die Verbindung zwischen den Intensitäten und der daraus resultierenden Dosisverteilung dar.

---

**Algorithmus 1** Berechnung der dünnbesetzten Matrix  $W$

---

**Eingabe:** Absorptionskoeffizienten  $\mu$ , Gitterkoordinaten  $X, Y$ , Strahldaten `beam_data` aus der Vorberechnung

- 1: Initialisiere `rows`, `cols`, `values`
  - 2: **for** Strahler  $j$  in `beam_data` **do**
  - 3:     Extrahiere Voxelkoordinaten  $(p_x, p_y)$  und Gewichte  $w$
  - 4:     Wandle Koordinaten  $(p_x, p_y)$  in linearen Indexvektor  $k$  um  $\triangleright py \cdot m_{x1} + p_x$
  - 5:     Füge  $k$  zu `rows`,  $(j, \dots, j)$  mit Länge von  $k$  zu `cols`,  $w$  zu `values` hinzu
  - 6: **end for**
  - 7:  $W \leftarrow \text{coo\_matrix}(\text{values}, (\text{rows}, \text{cols}))$   $\triangleright$  Konstruiere dünnbesetzte Matrix
  - 8:  $W \leftarrow W.\text{tocsr}()$   $\triangleright$  Umwandlung in CSR-Format
  - 9: **Ausgabe:**  $W \in \mathbb{R}^{(m_{x2}m_{x1}) \times J}$
- 

Mit Hilfe von  $W$  lässt sich dann das in 3.1 formulierte Problem mit dem Trust-Region Solver wie in Algorithmus 2 implementieren. Als Solver wird das Trust-Region-Verfahren aus der Bibliothek von `scipy.optimize` mit der Funktion `minimize` und der Methode `trust_constr` verwendet. Die Toleranz werden auf `tol` =  $10^{-12}$  und die Anzahl der maximalen Iteration auf 1000 gesetzt, um ein frühzeitiges Stoppen des Solvers zu verhindern und eine möglichst hohe numerische Genauigkeit zu erreichen. Die für das lineare

---

**Algorithmus 2** LP-Formulierung mittels Trust-Region-Verfahren

---

**Eingabe:** Gewichtsmatrix  $W$ , Vektoren `risk_sum`, `target_sum`, obere Schranke  $i_{\max}$

- 1: Initialisiere  $i \in \mathbb{R}^J$  mit  $i_0 = (10, \dots, 10)$
  - 2:  $c \leftarrow \text{risk\_sum}$
  - 3: Setze Zielfunktion:  $c^\top \cdot i$
  - 4: Formuliere Nebenbedingungen:
    - $i \geq 0$
    - $i \leq i_{\max}$
    - $\text{target\_sum}^\top \cdot i \geq \text{ziel}$
  - 5: Löse das Minimierungsproblem mit einem Trust-Region-Solver
  - 6: Berechne  $\text{DoseA} \leftarrow W \cdot i$
  - 7: Umformen von  $\text{DoseA}$  in die gewünschte Matrixform  $(m_{x2}, m_{x1})$
  - 8: **Ausgabe:**  $i^*$ ,  $\text{DoseA}$ , Zielfunktionswert
- 

Problem optimale Variante ist in Algorithmus 3 implementiert. Diese geht aus der Implementierung des Trust-Region-Verfahrens hervor. Als Solver wird der LP-Solver aus der Bibliothek `cvxpy` verwendet.

Die beiden Implementierungen folgen damit einem einheitlichen Schema und lassen



**Algorithmus 3** LP-Formulierung mit LP-Solver

---

**Eingabe:** Gewichtsmatrix  $W$ , Vektoren `risk_sum`, `target_sum`, obere Schranke  $i_{\max}$ 

- 1: Initialisiere  $i \in \mathbb{R}^J$
  - 2:  $c \leftarrow \text{risk\_sum}$
  - 3: Setze Zielfunktion:  $c^\top \cdot i$
  - 4: Formuliere Nebenbedingungen:
    - $i \geq 0$
    - $i \leq i_{\max}$
    - $\text{target\_sum}^T \cdot i \geq \text{ziel}$
  - 5: Löse das Optimierungsproblem mittels LP-Solver
  - 6: Berechne  $\text{DoseB} \leftarrow W \cdot i$
  - 7: Umformen von  $\text{DoseB}$  in die gewünschte Matrixform  $(m_{x2}, m_{x1})$
  - 8: **Ausgabe:**  $i^*$ ,  $\text{DoseB}$ , Zielfunktionswert
- 

sich dadurch im nächsten Abschnitt hinsichtlich der Laufzeit und Genauigkeit gegenüberstellen.

### 3.5 Numerischer Vergleich der Implementierung

In diesem Abschnitt werden beide Implementierungen miteinander verglichen. Im Fokus stehen insbesondere die Unterschiede der Dosiskalkulationen beider Varianten durch Rundungsfehler. Weiterhin werden die Ergebnisse unterschiedlichen Optimierungsverfahren verglichen. Durch dieses Vorgehen kann ausgeschlossen werden, dass sich die Fehler der Dosiskalkulation und Optimierungsverfahren gegenseitig verstärken oder abschwächen.

#### 3.5.1 Unterschiede der Dosiskalkulation

Um über die Unterschiede beider Varianten fundierte Aussagen treffen zu können, werden die Implementierungen gegenübergestellt. Mit dem Variante A wird die Intensität direkt mit der Abschwächung verrechnet. Bei Variante B werden alle Abschwächungskoeffizienten für jeden Pixel und Strahler in der Matrix  $W$  (siehe Abschnitt 3.2) gespeichert, bevor die Dosisverteilung über eine Matrix-Vektor Multiplikation ausgegeben wird. Insgesamt müssen bei der einmaligen Berechnung aller Abschwächungskoeffizienten einige mehrmals berechnet werden, da viele Pixel von mehreren Strahlen durchlaufen werden. Da die Berechnung der einzelnen Abschwächungskoeffizienten identisch ist, wurde sich ausschließlich auf die letztendlich berechnete Dosisverteilung fokussiert. Die von Ansatz A wird mit  $D_A$  und die von Ansatz B mit  $D_B$  bezeichnet. Für alle Berechnungen wird das in Kapitel 2 definierte Standardmodell (siehe Tabelle 1) angewendet, um eine feste Anzahl an Strahlen und Beams festzulegen.

In einem ersten Schritt betrachten wir den größten absoluten Fehler zwischen beiden

Dosisverteilungen

$$e_{abs} = \max_{\substack{j=1,\dots,m_y \\ k=1,\dots,m_x}} |(D_A)_{j,k} - (D_B)_{j,k}| = \|D_A - D_B\|_\infty.$$

Weiterhin wird auch der relative Fehler zwischen beiden Dosisverteilungen betrachtet

$$e_{rel} = \frac{\|D_A - D_B\|_F}{\|D_B\|_F}.$$

Dabei bezeichnet  $\|\cdot\|_F$  die Frobeniusnorm. Als Berechnungsfehler sind Differenzen im Bereich der Maschinengenauigkeit zu erwarten. Es wurde mit 64-Bit Gleitkommazahlen (`float64`) gerechnet, deren Maschinengenauigkeit  $eps \approx 2.22 \cdot 10^{-16}$  beträgt. Das ist dadurch begründet, dass die grundlegendsten Unterschiede vor allem in der Verwendung des Intensitätsvektors liegen. Die absoluten und relativen Fehler wurden für konstante als auch zufällig variierende Test-Intensitäten berechnet.

In einem ersten Durchlauf wurde dafür der Vektor  $i = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{50}$  verwendet. Für den absoluten Fehler zwischen den Dosisverteilungen ergab sich

$$e_{abs}^1 = 0,$$

sowie

$$e_{rel}^1 = 0$$

für den relativen Fehler. Hier ist eine keine Abweichung zu erkennen. Für den zweiten Testfall wurde der Intensitätsvektor

$$i = (10, \dots, \underbrace{10}_{j=25}, 0, \dots, 0)$$

verwendet. Insgesamt ergaben sich in diesem Fall folgende Ergebnisse:

Der absolute Fehler war mit

$$e_{abs}^2 \approx 1.776 \cdot 10^{-15}$$

immer noch im Bereich der Maschinengenauigkeit und für einen nicht signifikanten Unterschied in weiterführenden Berechnungen klein genug. Der relative Fehler liegt mit

$$e_{rel}^2 \approx 1.596 \cdot 10^{-17},$$

genau im Bereich der Maschinengenauigkeit. Auch im Testfall mit einem randomisierten Vektor ergibt sich ein ähnliches Bild mit

$$e_{abs}^3 \approx 3.552 \cdot 10^{-15}$$

und

$$e_{rel}^3 \approx 2.084 \cdot 10^{-16}.$$

Insgesamt lässt sich feststellen, dass alle berechneten Fehler im Bereich oder nahe dem Bereich der Maschinengenauigkeit liegen. Dieses Ergebnis weist auf eine numerisch äquivalente Implementierung hin, was den zuvor beschriebenen Erwartungen entspricht. Die Laufzeit der Berechnungen sind in dieser Fehlerbetrachtung nicht von Interesse.

### 3.5.2 Vergleich beider Solver

Nach der Überprüfung beider Berechnungsansätze für die Dosisverteilung, sollen in diesem Abschnitt die verwendeten Solver gegenübergestellt werden, welche für den jeweiligen Ansatz bei Optimierung der Intensitätsvektoren verwendet werden.

Für den heuristischen Ansatz  $A$  wird das Trust-Region-Verfahren `trust-constr` von der Python Bibliothek `scipy.optimize` verwendet, da es eine robuste Optimierung unter Nebenbedingungen ermöglicht. Die allgemeine Funktionsweise findet sich in [9, Kapitel 1]. Bei der Verwendung der `trust-constr`-Methode wird in jeder Iteration ein quadratisches Modell der Zielfunktion innerhalb einer Region um den aktuellen Iterationspunkt  $x_k$  minimiert. Das Modell hat die Form

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^d} \Phi_k(p) &= g_k^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p, \\ \text{u.d.N.} \quad \|p\| &\leq \Delta_k \end{aligned} \tag{16}$$

wobei  $g_k = \nabla f(x_k)$ ,  $B_k$  eine Approximation der Hesse-Matrix und  $\Delta_k$  der aktuelle Trust-Region Radius ist [22]. Die Größe der Trust-Region wird adaptiv an die Abweichung zwischen Modell und Zielfunktion angepasst, indem nach jeder Iteration das Verhältnis

$$\gamma_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{\Phi_k(0) - \Phi_k(p_k)} \tag{17}$$

berechnet wird [22, 9]. Der Solver terminiert schließlich, sobald die Optimalitätsbedingungen erfüllt sind. Bei einem linearen Problem entspricht dies dem Fall, dass der konstante Gradient der Zielfunktion,

$$\nabla f(i) = c,$$

durch die aktiven Nebenbedingungen kompensiert wird. Der Solver gibt „gtol“ aus [9, Kapitel 1, Kapitel 6]. Das bedeutet, dass die Norm des Lagrange-Gradienten und die Verletzung der Nebenbedingungen kleiner als eine gewählte Toleranz sind. Da sich das Problem linear formulieren lässt, gilt  $B_k = 0$  und die Solver-Auswahl ist nicht optimal, da die quadratische Approximation an dieser Stelle überdimensioniert ist. Es wird eine Null-Hesse-Matrix und der konstante Gradient übergeben, welcher sich aus der Zielfunktion ergibt.

Für die Optimierung der linearen Formulierung wird der LP-Solver von „CVXPY“ genutzt. Um die Unterschiede der Solver nicht durch minimale Rundungsfehler, die im vorherigen Abschnitt festgestellt wurden zu verändern, werden beide Solver mit der selben Formulierung ausgeführt. Es wird die LP-Formulierung mit vorberechneter dünnbesetzten Matrix verwendet, wodurch sich die Laufzeiten unter anderem besser kontrollieren lassen.

Da zunächst ein Kreis im Zentrum des Volumens angenommen wird, zwingen wir die Lösung in eine bestimmte Richtung. Andernfalls gibt es viele zulässige Lösungen, wodurch eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse nicht sinnvoll wäre. Dazu wird eine rechts-offene Box um das Target  $\mathcal{T}$  gelegt. Die Box besitzt eine sehr hohe Abschwächung, die klinisch nicht realistisch ist. Die Abschwächung ist in Abbildung 6 dargestellt.

Parameter	Testfall 1	Testfall 2	Testfall 3
Anzahl Beams	5	5	20
Anzahl Strahler	10	10	20
Schrittweite $\Delta t$	0.003	0.001	0.003

Tabelle 2: Exemplarische Testfälle. Testfall 1 beschreibt das Standardmodell. In Testfall 2 wird die Schrittweite variiert und in Fall 3 werden die Anzahl der Beams und Strahler verändert.

Die Anfangsintensität wird in allen Testfällen auf  $\mathbf{i} = (10, \dots, 10) \in \mathbb{R}^J$  festgelegt. Dieser Startwert stellt eine konstante und zulässige Initialisierung dar. Weitere Möglichkeiten sind zum Beispiel der Nullvektor oder die Lösung des linearen Ansatzes als Startwert zu verwenden. Insgesamt werden 3 Testfälle betrachtet. Es werden die grundlegenden Parameter Schrittweite und die Anzahl der Beams und Strahler variiert. Das grundlegende Modell aus Abschnitt 2.2 ändert sich nicht. Als Bestrahlung soll mindestens ein Wert von 50 im Target erreicht werden. Die Testfälle sind in der Tabelle 2 aufgeführt.

Im ersten Testfall zeigt der Vergleich beider Verfahren zunächst, dass das Trust-Region-Verfahren eine deutlich höhere Laufzeit hat als die LP-Formulierung um eine praktikable Lösung zu erreichen (Tabelle 3). Am Ende hat der vom Trust-Region-Verfahren gefundene Minimierer eine sehr geringe relative Abweichung von etwa  $2.7 \cdot 10^{-7}$  in den Intensitäten und  $2.8 \cdot 10^{-7}$  der resultierenden Dosisverteilung von LP-Ergebnis. Die erreichte Dosis im Target unterscheidet sich erst ab einem Faktor von  $10^{-9}$  und ist damit numerisch vernachlässigbar.

Insbesondere treten größere Ungenauigkeiten auf, wenn Schrittweiten  $\Delta t$  gewählt werden, die nicht mit der Diskretisierung des Volumengitters zusammenpassen. Das heißt, die Schrittweite ist nicht ausreichend klein gewählt. Dadurch werden einzelne Pixel, die ein Strahl  $j$  berührt, nicht erfasst. Um diesen Fehler zu vermeiden, wird für alle Strahlen eine einheitliche Schrittweite  $\Delta t$  gewählt, die sich an der Gitterauflösung orientiert. Dazu seien  $h_x$  und  $h_y$  die Pixelgrößen in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Aufgrund normierter Richtungsvektoren ergibt sich

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \min(h_x, h_y)$$

als Schranke für die Schrittweite.

In Testfall 2 ergibt sich ein ähnliches Bild (siehe Tabelle 5). Hier ist der maximale absolute Fehler zwischen den Varianten  $A$  und  $B$  kleiner als  $10^{-6}$ . Die Laufzeit von Typ  $A$  ist gestiegen auf 0.1042 s und liegt immer noch über der Zeit des LP-Solvers.

Für den dritten Testfall ergibt sich ein anderes Bild als zuvor (siehe Tabelle 6). Die Dosis im Target bleibt für beide Methoden bis auf Unterschiede im Bereich von  $10^{-10}$  gleich und auch die Differenz der Zielfunktionswerte ändert sich nicht. Sowohl die absoluten, als auch die relativen Differenzen zwischen den berechneten Dosisverteilungen sind wieder im Bereich von  $2 \cdot 10^{-7}$  und  $1.5 \cdot 10^{-7}$ . Insbesondere die Laufzeit des Trust-Region-

Verfahren	Laufzeit s	Zielfunktionswert	Gesamtdosis im Target
trust-constr (A)	0.0929	412.9374	50.0000
LP (B)	0.0099	412.9371	50.0000

Tabelle 3: Unterschiede im Testfall 1. Man erkennt eine ausreichende Abdeckung der Dosis im Target und die Zielfunktionswerte haben eine geringe Abweichung ab  $10^{-4}$ . Die Laufzeit unterscheidet sich schon bei kleinen Problemen deutlich.

iteration	function value	optimality	constraint violation
1	$7.10 \cdot 10^4$	$1.99 \cdot 10^2$	$0.00 \cdot 10^0$
2	$7.04 \cdot 10^4$	$1.99 \cdot 10^2$	$0.00 \cdot 10^0$
3	$6.39 \cdot 10^4$	$1.97 \cdot 10^2$	$0.00 \cdot 10^0$
4	$1.94 \cdot 10^4$	$1.30 \cdot 10^2$	$0.00 \cdot 10^0$
5	$-1.95 \cdot 10^5$	$1.26 \cdot 10^2$	$4.20 \cdot 10^3$
6	$-1.92 \cdot 10^5$	$7.17 \cdot 10^0$	$3.94 \cdot 10^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
20	$4.13 \cdot 10^2$	$3.32 \cdot 10^{-10}$	$0.00 \cdot 10^0$
21	$4.13 \cdot 10^2$	$1.18 \cdot 10^{-9}$	$0.00 \cdot 10^0$
22	$4.13 \cdot 10^2$	$8.24 \cdot 10^{-11}$	$0.00 \cdot 10^0$
23	$4.13 \cdot 10^2$	$1.88 \cdot 10^{-12}$	$0.00 \cdot 10^0$
24	$4.13 \cdot 10^2$	$3.64 \cdot 10^{-11}$	$0.00 \cdot 10^0$
25	$4.13 \cdot 10^2$	$4.89 \cdot 10^{-13}$	$0.00 \cdot 10^0$

Number of iterations: 25, function evaluations: 19, CG iterations: 34, optimality:  $4.89\text{e-}13$ , constraint violation:  $0.00\text{e}+00$ , execution time: 0.11 s.

Tabelle 4: Optimierungsverlauf für **trust-constr** im Testfall 1. Der Solver konvergiert nach 25 Iterationen. Die Optimalitätsbedingungen (Norm des Lagrange-Gradienten) liegt mit  $4.89 \cdot 10^{-13}$  unter der vorgegeben Toleranz und es werden keine Nebenbedingungen verletzt.

Verfahren	Laufzeit s	Zielfunktionswert	Gesamtdosis im Target
trust-constr (A)	0.1042	412.9557	50.0000
LP (B)	0.0150	412.9554	50.0000

Tabelle 5: Unterschiede im Testfall 2. Es wird eine ausreichende Dosisverteilung im Target erreicht. Der Zielfunktionswert unterscheidet sich wieder um einen Faktor von  $10^{-4}$  bei einem verringertem Laufzeitunterschied.

Verfahren	Laufzeit s	Zielfunktionswert	Gesamtdosis im Target
trust-constr (A)	6.1855	412.9372	50.0000
LP (B)	0.0104	412.9371	50.0000

Tabelle 6: Unterschiede im Testfall 3. Die vorgeschriebene Dosis im Target wird erreicht, dabei unterscheidet sich der Zielfunktionswert wie in Testfall 1 und 2 um einen Faktor von  $10^{-4}$ . Der Laufzeitunterschied ist auf etwa 6 Sekunden angestiegen.

Verfahrens ist deutlich angestiegen. Bei Problemstellungen mit vielen Nebenbedingungen oder schwierigen Geometrien kann sich dieser Unterschied weiter verdeutlichen. Der Iterationsverlauf verhält sich ähnlich zu dem in Tabelle 4 dargestellten Verlauf.

Bei dem hier verwendeten, einfachen 2D-Phantommodell und den gewählten Parametern liegen die absoluten und relativen Differenzen in der Dosisverteilung im Bereich von  $10^{-10}$  bis  $10^{-7}$  und sind damit numerisch sehr klein. Dies zeigt, dass beide Optimierungsverfahren im einfachen Versuchsaufbau praktisch identische Dosisvorhersagen liefern.

Aufgrund der Einfachheit sollten diese Ergebnisse nicht ohne Weiteres auf komplexe klinische Situationen übertragen werden. In stark inhomogenen Situationen können Unterschiede zwischen Rechenverfahren deutlich größer ausfallen, wie in Abschnitt 1.3 angedeutet [3, Kapitel 15; 14, 12].

Aufgrund der geringeren Laufzeit wird im Folgenden die LP-Formulierung mit vorberechneter dünnbesetzten Matrix bevorzugt.

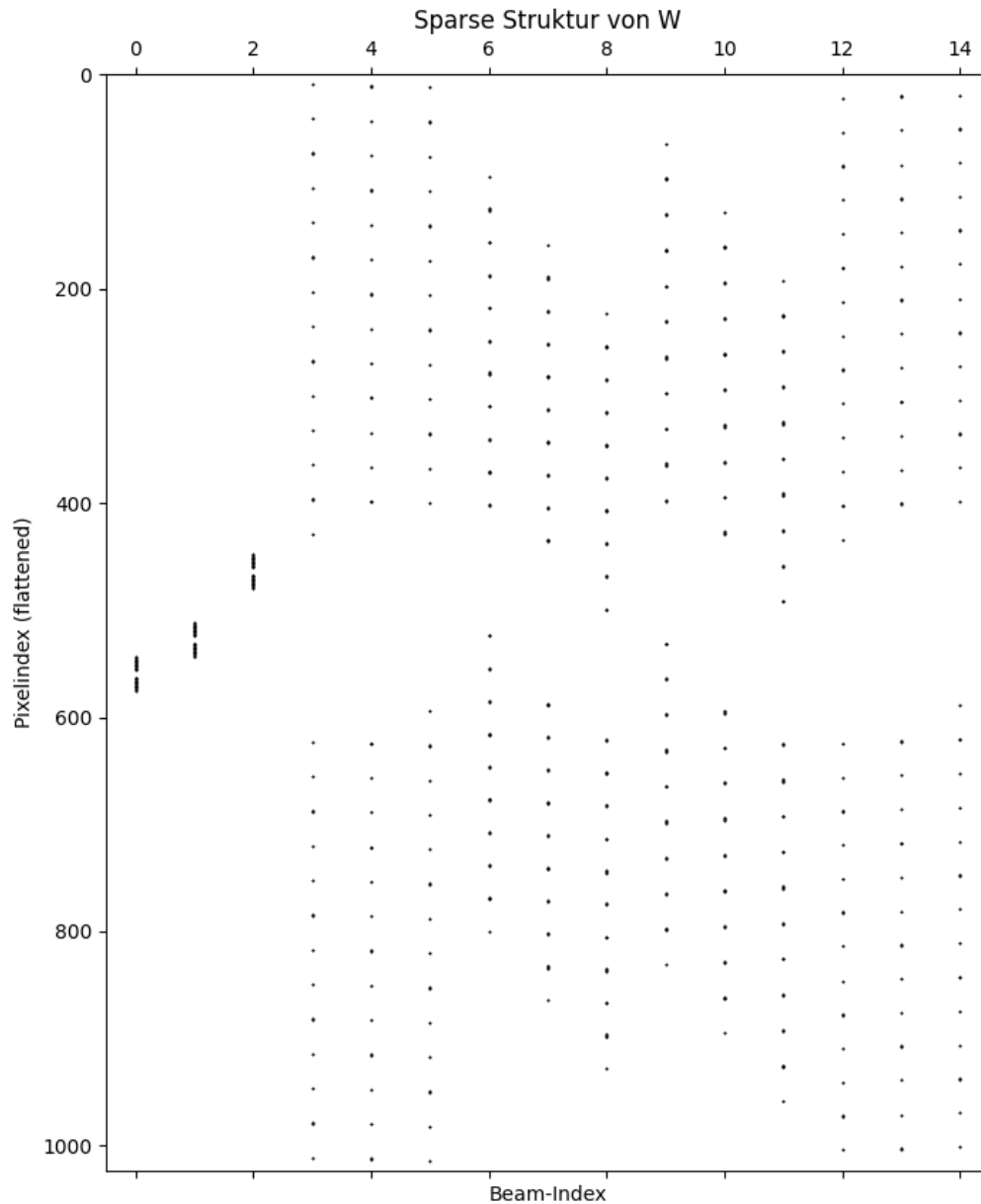


Abbildung 5: Dünnbesetzte Matrix  $W$  für ein reduziertes Problem mit  $32 \times 32$  Pixelgitter auf einem  $10\text{cm} \times 10\text{cm}$  Bild mit 15 Strahlern. Die nicht verschwindenden Einträge der Matrix sind durch die schwarzen Punkte dargestellt. Die Struktur ändert sich für größere Bilder und höhere Auflösung nicht. Die ersten drei Strahler verlaufen von rechts nach links im Bild, daher sind die Punkte im Bild direkt nebeneinander. Alle anderen Strahler verlaufen nicht parallel zur unteren Bildkante und treten daher durch viele einzelne Punktlinien auf.

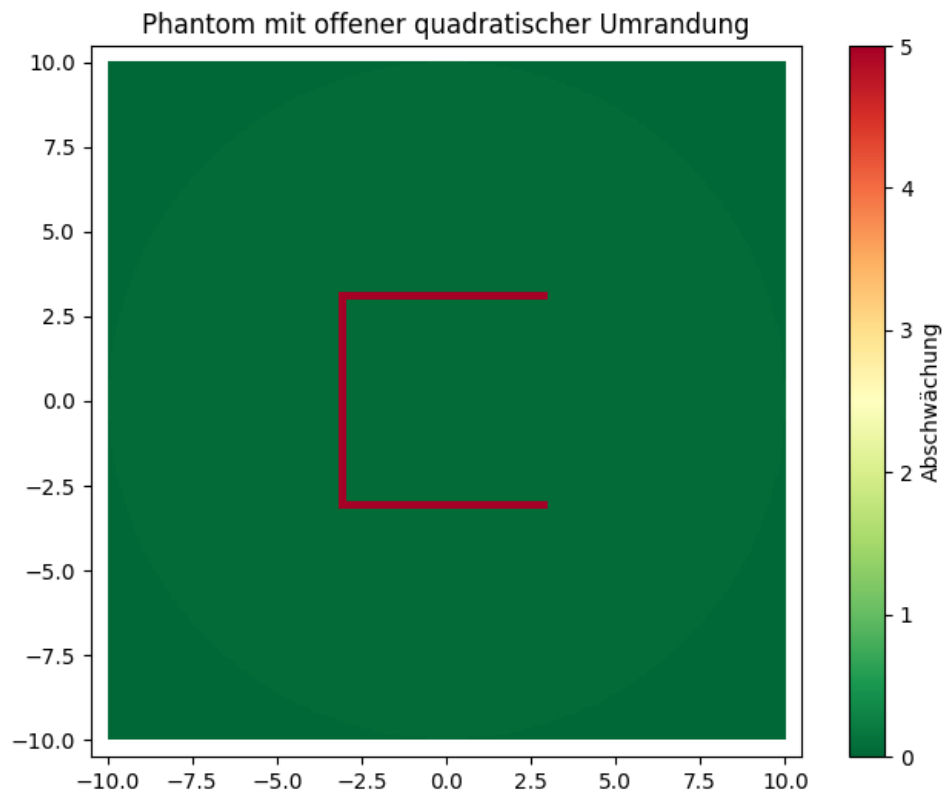


Abbildung 6: Darstellung der Abschwächungsgewichte. Die rechts-offene Box (rot) hat die größte Abschwächung. Strahlen die auf die Box treffen werden abgeblockt. Um die Nebenbedingungen zu erfüllen, muss das Target von rechts bestrahlt werden.



---

## Kapitel 4: Klinisches Beispiel

In diesem Abschnitt soll das konstruierte Verfahren auf einen zweidimensionalen Schnitt eines realistischen klinischen Problems angewendet werden. Dazu wird zunächst ein realistisches Phantom erstellt, an dem der Algorithmus getestet wird. Anschließend erfolgt die Anwendung auf klinische Daten.

### 4.1 Realistisches 2D Beispiel

Das Beispiel ist in diesem Abschnitt ein einfaches klinisches Szenario, welches anhand der Abbildung 1 in Kapitel 1 dargestellt ist. Das Beispiel stellt nur einen Schnitt dar und vernachlässigt die 3D-Struktur. Anders als in Abbildung 1 stellt hier die blaue Form das Target und der rote Kreis das Risikoorgan dar. Das Planungsziel besteht darin, eine Minstdosis in allen Punkten des Targets zu erreichen, dabei soll das Risikoorgan ausreichend geschont werden. Das Gebiet, welches Target und Risikoorgan umschließt, wird als Weichgewebe angenommen. Nach Diskretisierung des Problems für das Programm ergibt sich das in Abbildung 7 dargestellte Bild. Die Abschwächung ist dementsprechend wie in Abbildung 8.

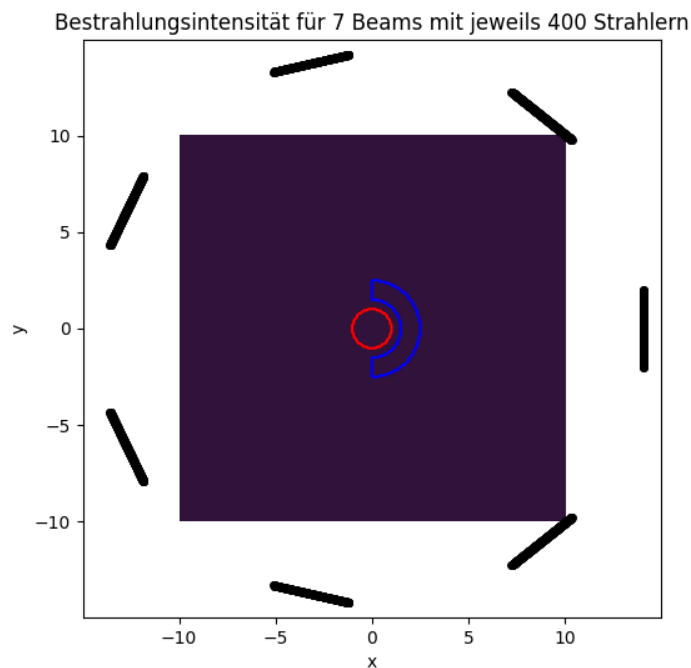


Abbildung 7: Dargestellt ist das Planungsgebiet. Das Target ist in blau umrandet und das Risikoorgan in rot. Außerhalb des Planungsgebiets sind 7 Beams angeordnet.

Sei im Folgenden  $\mu_N = 0.3 \text{ cm}^{-1}$  die Abschwächung des Weichgewebes im gesamten Patientengebiet. Die Abschwächungskoeffizienten für das Target und Risikoorgan sind als  $\mu_{OAR} = \mu_T = 0.5 \text{ cm}^{-1}$  gewählt. Das Planungsziel soll mit sieben gleichverteilten Beams

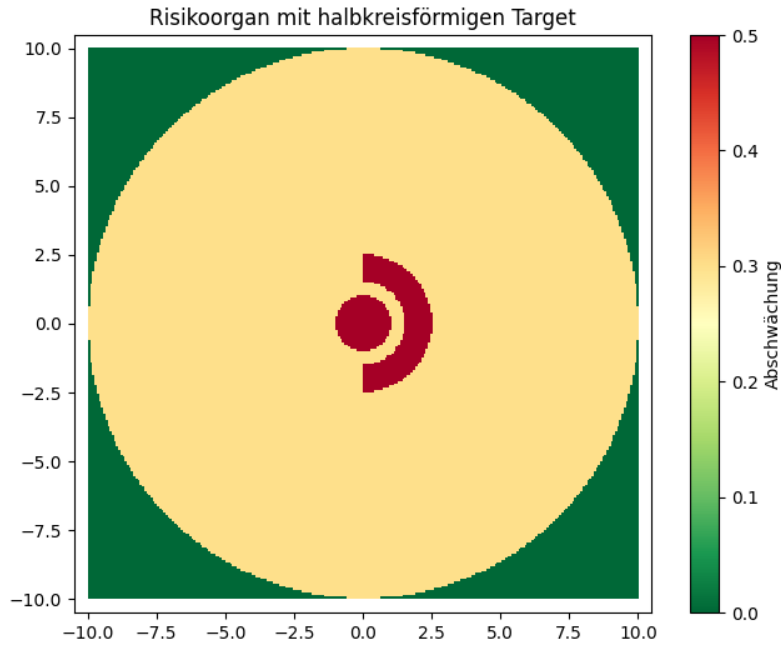


Abbildung 8: Das Weichgewebe hat eine Abschwächung von  $\mu_N = 0.3 \text{ cm}^{-1}$  (gelb) und sowohl Risikoorgan als auch Target haben eine Abschwächung von  $\mu_{OAR} = \mu_T = 0.5 \text{ cm}^{-1}$  (rot).

erreicht werden. Die im Target vorgeschriebene Dosis wird auf 70 relative Einheiten gesetzt und die Dosis im Risikoorgan soll 40 relative Einheiten nicht überschreiten. Die Werte orientieren sich an einem Beispiel aus [20, Kapitel 24]. Die Dosis bezeichnet hier wieder die transmittierte Strahlenintensität gemäß (6).

In der Praxis sind die vorgeschriebenen Dosisverteilungen physikalisch oft nicht realisierbar, weshalb mit speziellen Zielfunktionen gearbeitet wird [20, Kapitel 24]. Diese sind in der Regel quadratisch. Um das Problem an dieser Stelle weiterhin linear formulieren zu können, müssen kleine Abweichungen zugelassen werden. Das Planungsproblem lässt sich dann schreiben als

$$\begin{aligned}
 c^\top i &\mapsto \min \\
 \text{s. t. } & \mathbf{i} \geq 0, \\
 & W_{\text{target}} \mathbf{i} \geq 0.8 \cdot \text{ziel} \cdot \mathbf{1}, \\
 & W_{\text{target}} \mathbf{i} \leq 1.1 \cdot \text{ziel} \cdot \mathbf{1}, \\
 & W_{\text{OAR}} \mathbf{i} \leq 0.5 \cdot \text{ziel} \cdot \mathbf{1},
 \end{aligned}$$

mit

$$c_j = \sum_{p \notin \mathcal{T}} W_{p,j} \quad (18)$$

und  $i \in \mathbb{R}^J$ ,  $J = 2800$ . Hierbei ist  $\mathcal{T}$  das Target.

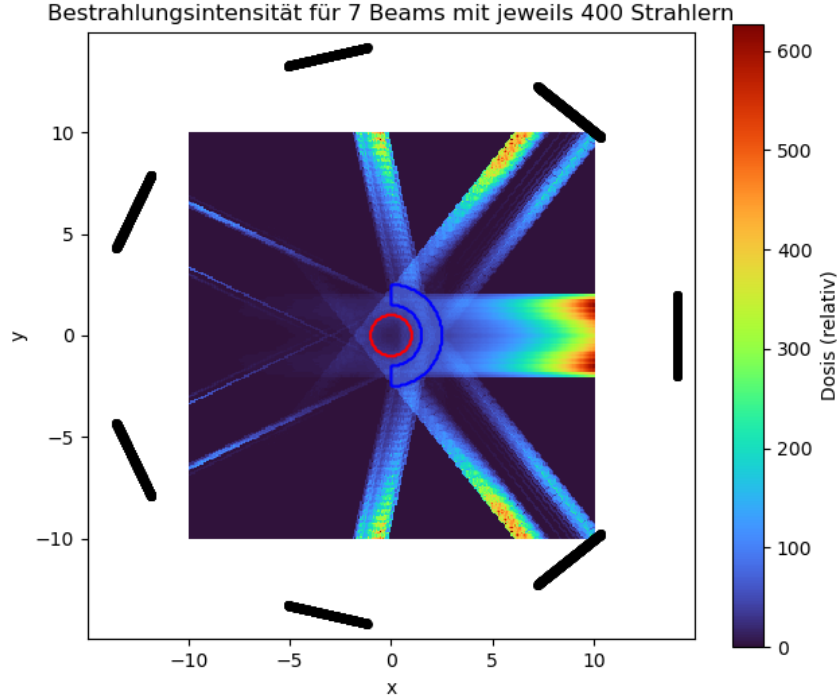


Abbildung 9: Dosisverteilung des realistischen Beispiels mit 7 Beams. Das Target (blau) wird hauptsächlich von rechts bestrahlt. Aus den anderen Strahlrichtungen sind nur Intensitäten zu erkennen, wenn der Strahler nicht auf das Risikoorgan (rot) zeigt.

Mit der Anwendung des LP-Algorithmus auf das Problem ergibt sich die in Abbildung 9 dargestellte Dosisverteilung. Die Vorberechnung benötigte wie zu erwarten die meiste Zeit von 49.1 s. Die eigentliche Optimierung lieferte nach circa 2.4 s das Ergebnis. Die Intensitätsverteilung ist in Abbildung 10 dargestellt. Allgemein ist die Intensitätsverteilung ähnlich zu der in Abbildung 1 skizzierten Verteilung und die Form der Bestrahlungsfelder spiegelt sich ebenso in der Dosisverteilung in Abbildung 9 wider. Besonders auffällig sind hier einzelne sehr hohe Intensitäten. Diese lassen sich durch die Nebenbedingungen erklären, die Lösungen ausschließen, die inhomogene Verteilungen oder zu hohe Dosen im Risikoorgan zulassen.

Das realistische 2D-Beispiel zeigt, dass das vorgestellte Verfahren auch bei komplexen Strukturen stabil funktioniert und Dosisverteilungen erwartungsgemäß wiedergibt. Dennoch ist darauf hinzuweisen, dass die Komplexität klinischer Strukturen sowie die physikalischen Anforderungen das Problem deutlich erschweren, sodass eine rein lineare Formulierung nicht ausreicht. Um die Übertragbarkeit des Verfahrens und seine Gren-

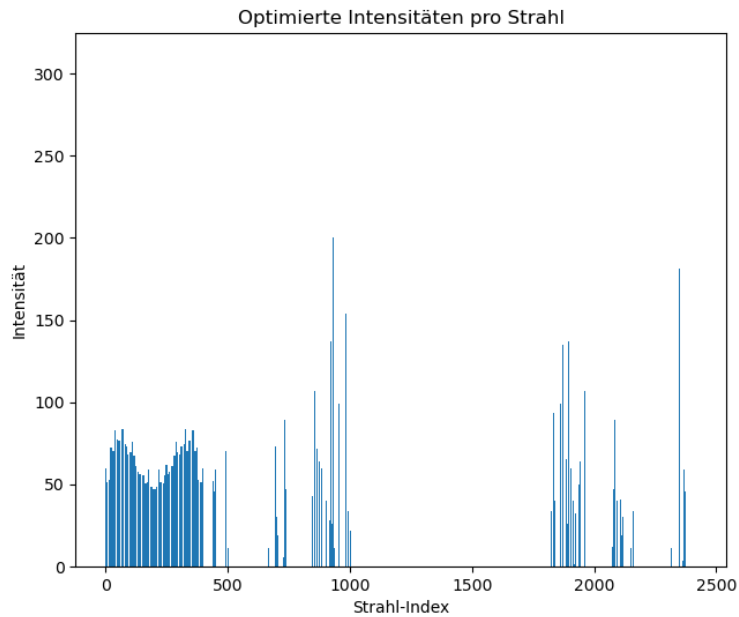


Abbildung 10: Dargestellt sind die Intensitäten von jedem Strahler der sieben Beams. Auf der x-Achse ist der Strahlindex und auf der y-Achse die Intensität abgebildet.

zen im praktischen Kontext zu untersuchen, wird es im Folgenden auf klinische Daten angewendet.

## 4.2 Klinisches Beispiel

Im Unterschied zum vorherigen 2D-Beispiel, das vor allem die technische Umsetzbarkeit zeigt, handelt es sich in diesem Abschnitt um ein klinisch motiviertes Szenario. Als Grundlage für das praxisorientierte Beispiel dient ein CT-Datensatz des Beckenbereichs eines Patienten. Es handelt sich bei den Daten um Korrespondierende axiale Schichten aus einem 3D-CT- und Dosis-Verteilungsdatensatz aus einer klinischen Testdatenreihe in der Strahlentherapie vom Fraunhofer MEVIS im Jahr 2024.

Das Becken ist ein typisches Bestrahlungsgebiet, zum Beispiel bei Prostatakrebs, und bietet sich daher als klinisches Beispiel an, da der räumliche Abstand zwischen Target und Risikoorgan eine realistische Herausforderung darstellt [11].

Es wird wieder ein 2D-Schnitt betrachtet, also eine Schicht des Beckens. Die Gewebestruktur ist in Abbildung 11 dargestellt. Dabei ist in blau das Target konturiert und in rot das Rektum, als das Risikoorgan. Das Modell soll so diskretisiert werden, dass ein lineares Planungsproblem formuliert werden kann. Auch in diesem Beispiel werden die Einheiten relativ betrachtet, da keine exakten Dosiswerte vorliegen. Aus diesem Grund wird eine homogene Zieldosis im Target von 70 relativen Einheiten festgelegt, da die klinischen Daten ebenfalls auf 70 Einheiten skaliert sind. Aufgrund der geringen Entfernung des Risikoorgans zum Target soll die Dosis im Rektum nicht mehr als 50% der Zieldosis

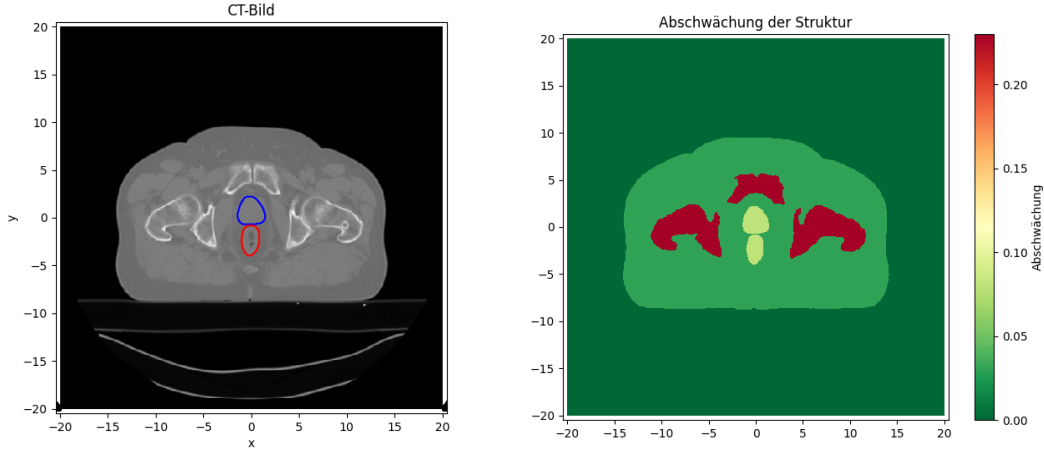


Abbildung 11: Links: Klinisches CT des Beckenbereichs eines Patienten (Target blau, Rektum rot). Rechts: Abschwächung der Gesamtstruktur durch die Gewebetypen Luft, Weichgewebe, Knochen und Rektum sowie das Target.

betragen. Da der klinische Bestrahlungsplan mit Verwendung von 7 Strahlrichtungen erreicht wurde, werden für die Modellierung ebenfalls 7 Strahlerrichtungen mit jeweils 600 Strahlern genutzt, um das Planungsziel zu erreichen. Zur Vereinfachung werden die CT-Informationen auf die Gewebetypen Luft, Weichgewebe und Knochen reduziert. Als Abschwächung im Körper wird  $\mu_N = 0.03 \text{ cm}^{-1}$  und  $\mu_B = 0.2 \text{ cm}^{-1}$  als die Abschwächung durch Knochen gesetzt. Die Koeffizienten für das Risikoorgan und Target werden auf  $\mu_{OAR} = \mu_T = 0.05 \text{ cm}^{-1}$  festgelegt. Dadurch ergibt sich die in Abbildung 11 dargestellte Abschwächung. Es werden erneut kleine Abweichungen zugelassen. Das Problem lässt sich dann, ähnlich wie in Abschnitt 4.1, schreiben als

$$\begin{aligned}
 c^\top i &\mapsto \min \\
 \text{s. t. } & \mathbf{i} \geq 0, \\
 & \mathbf{i} \leq 50, \\
 & W_{\text{target}} \mathbf{i} \geq 0.95 \cdot \text{ziel} \cdot \mathbf{1}, \\
 & W_{\text{target}} \mathbf{i} \leq 1.05 \cdot \text{ziel} \cdot \mathbf{1}, \\
 & W_{\text{OAR}} \mathbf{i} \leq 0.5 \cdot \text{ziel} \cdot \mathbf{1},
 \end{aligned}$$

mit  $c$  wie in Gleichung (18). Um eine Vergleichbarkeit der klinischen Lösung und der des hier implementierten Verfahrens zu ermöglichen, werden die Originaldaten auf 70 relative Einheiten skaliert. Für den Vergleich wird der Mittelwert von erreichter Dosis im Target und Risikoorgan genutzt.

Aufgrund der deutlich höheren Anzahl an Strahlern als noch in Abschnitt 4.1, liegt hier eine Vorberechnungszeit von 151.71 s vor. Die Optimierung hat eine Zeit von 2.9 s benötigt. Insgesamt ergibt sich die in Abbildung 12 dargestellte Dosisverteilung. Man er-

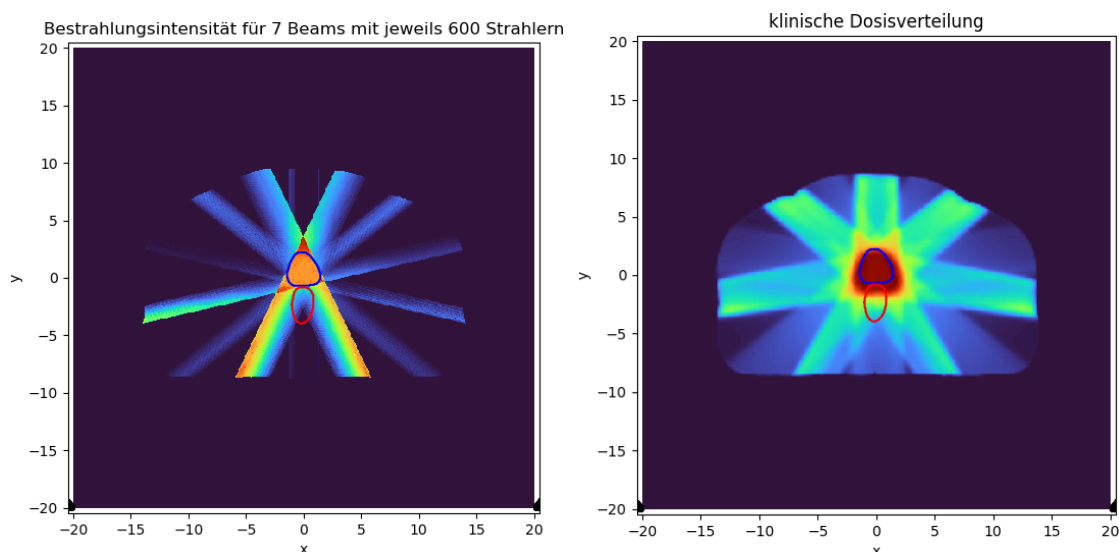


Abbildung 12: Links: Das Ergebnis des LP-Verfahrens mit 7 Strahlern. Rechts: Das klinische Ergebnis des Bestrahlungsplans.

kennt deutlich die Abdeckung des Targets bei gleichzeitiger Schonung des Risikoorgans. Wenn man die Dosisverteilung mit der klinischen Dosisverteilung vergleicht, erkennt man deutliche Unterschiede, vor allem im Bereich des Rektums. Die dort simulierte Dosis ist deutlich höher als bei der Verwendung des LP-Verfahrens. Auch der Mittelwert bestätigt diesen Unterschied. Dieser erreicht in der klinischen Verteilung einen Wert von 39.83 relativen Einheiten. Das LP-Verfahren erreicht einen Wert von 13.83. In jedem Fall bedeutet eine geringere Dosis im Risikoorgan auch eine bessere Schonung. Der Unterschied lässt sich durch die fehlende Betrachtung der Streuung in dem simplifizierten Modell dieser Arbeit begründen. Da das Modell nur die Abschwächung und lineare Strahlen verwendet, können steile Dosisgradienten erreicht werden, die sowohl klinisch als auch physikalisch weniger realistisch sind. Für das Zielvolumen wird in beiden Varianten eine ausreichende Dosis simuliert, was auch durch den Mittelwert bestätigt wird. Dieser beträgt in dem klinischen Ergebnis 67.98 und mit dem LP-Verfahren wird ein Wert von 67.62 berechnet.

Durch den Vergleich mit dem klinischen Ergebnis wird deutlich, dass das in dieser Arbeit erstellte Verfahren die Grundlagen der Strahlentherapieplanung abbildet. Es werden einige Vereinfachungen vorgenommen, um ein grobes Verständnis für den Planungsprozess zu bekommen. Nichtsdestotrotz bilden die Resultate das klinische Ergebnis gut ab.

---

## Kapitel 5: Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden zwei Modellierungsansätze für die inverse Planungsoptimierung in der intensitätsmodulierten Strahlentherapie untersucht. Ansatz *A* berechnet die Abschwächungsgewichte während der Optimierung direkt (Vorwärtsberechnung pro Iteration) und ist konzeptionell einfacher, führt aber zu einem hohen numerischen Aufwand. Ansatz *B* führt eine einmalige Vorberechnung der Abschwächungskoeffizienten durch und speichert diese in einer dünnbesetzten Gewichtsmatrix  $W$  (siehe Abschnitt 3.2).

Der wesentliche Vorteil von Ansatz *B* liegt in der Effizienz. In den numerischen Experimenten reduzierte die Vorberechnung zusammen mit der LP-Formulierung die Optimierungszeiten deutlich, während die erreichten Zielfunktionswerte und Dosisverteilungen im Planungsgebiet praktisch identisch mit denen von Ansatz *A* waren. Die gemessenen numerischen Abweichungen zwischen beiden Implementierungen liegen im Bereich von Rundungsfehlern und deuten auf eine numerisch äquivalente Implementierung hin.

Im realistischen Beispiel sowie im Vergleich mit dem klinischen CT-Datensatz lieferte das vereinfachte Modell eine sinnvolle Dosisverteilung des Planungsgebiets. Dabei müssen ausreichend viele Nebenbedingungen gewählt werden um das Planungsziel bestmöglich einzuschränken. Deutliche Unterschiede traten vor allem in der Dosisverteilung des Risikoorgans auf. Diese Differenzen lassen sich durch die starken Modellvereinfachungen begründen, da Streuung, Elektronentransport und Volumeneffekte vernachlässigt wurden. Dadurch entstehen steilere Dosisgradienten als in der klinisch berechneten Verteilung.

Aufbauend auf den Ergebnissen kann die Modellierung weiter verbessert werden, indem das Modell um zusätzliche physikalische Modellbestandteile, wie die mehrfach erwähnte Streuung, erweitert wird. Des Weiteren können Anpassungen an der Zielfunktion vorgenommen werden, um Anforderungen an einzelne Organe und Gewebereiche besser zu kontrollieren und dadurch die Dosisbelastung von Risikoorganen einzuschränken. Für eine höhere Genauigkeit und klinische Übertragbarkeit sollte zudem eine exakte Skalierung auf klinische Einheiten durchgeführt werden, da die in diesem Modell verwendeten Werte ausschließlich relativ sind. Gleichzeitig sollte das Modell um realistische Photonenenergien erweitert werden.





## Literatur

- [1] Torsten Arndt. *Lambert-Beer-Gesetz*, chapter L, pages 1432–1433. Springer Berlin Heidelberg, 2019. ISBN 978-3-662-48986-4. doi: 10.1007/978-3-662-48986-4\\_1822.
- [2] Rajamanickam Baskar, Karen A. Lee, Rachel Yeo, and Kheng-Wei Yeoh. Cancer and radiation therapy: current advances and future directions. *International Journal of Medical Sciences*, 9(3):193–199, 2012. doi: 10.7150/ijms.3635.
- [3] Eva Bezak, Alun H. Beddoe, Loredana G. Marcu, Martin Ebert, and Roger Price. *Johns and Cunningham’s the Physics of Radiology*, volume 46. Thomas, Charles C., LTD., 2021. doi: 10.4103/jmp.JMP\_102\_21. PMCID: PMC8415248.
- [4] Peter Bonate. A brief introduction to Monte Carlo simulation. *Clinical pharmacokinetics*, 40:15–22, 02 2001. doi: 10.2165/00003088-200140010-00002.
- [5] Thomas Bortfeld. *Dosiskonformation in der Tumorthherapie mit externer ionisierender Strahlung: Physikalische Möglichkeiten und Grenzen*. Habilitation, Universität Heidelberg, Fakultät für Physik und Astronomie, Heidelberg, 07 1995. URL <http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/33027>.
- [6] Thomas Bortfeld, Rupert Schmidt-Ullrich, Wilfried De Neve, and David E. Wazer, editors. *Imaging for IMRT*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-30356-5. doi: 10.1007/3-540-30356-1\\_3.
- [7] Wen-Zhen Chen, Ying Xiao, and Jun Li. Impact of dose calculation algorithm on radiation therapy. *World Journal of Radiology*, 6(11):874–880, 2014. doi: 10.4329/wjr.v6.i11.874.
- [8] Ky Cheung. Intensity modulated radiotherapy: advantages, limitations and future developments. *Biomedical Imaging and Intervention Journal*, 2006. doi: 10.2349/bij.2.1.e19.
- [9] Andrew R. Conn, Nicholas I. M. Gould, and Philippe L. Toint. *Trust Region Methods*. MPS-SIAM, 2000. doi: 10.1137/1.9780898719857.
- [10] Rainer Fietkau, Ulrike Höller, Mechthild Krause, Cordula Petersen, Michael van Kampen, Dirk Vordermark, and Jochen Willner. Strukturelle, prozedurale und personelle voraussetzung für die erbringung radioonkologischer und strahlentherapeutischer leistungen 2023 in deutschland – ein positionspapier der deutschen gesellschaft für radioonkologie (degro). *Strahlentherapie und Onkologie*, 199(8):697–705, 2023. doi: 10.1007/s00066-023-02105-6.
- [11] Ben W. Fischer-Valuck, Yuan James Rao, and Jeff M. Michalski. Intensity-modulated radiotherapy for prostate cancer. *Translational Andrology and Urology*, 7(3), 2018. doi: 10.21037/tau.2017.12.16.

- [12] Antonella Fogliata, Eugenio Vanetti, Daniela Albers, et al. On the dosimetric behaviour of photon dose calculation algorithms in the presence of simple geometric heterogeneities: comparison with monte carlo calculations. *Physics in Medicine and Biology*, 52(5):1363–1385, 2007. doi: 10.1088/0031-9155/52/5/011.
- [13] Linda Hong, Michael Goitein, Marta Bucciolini, Robert Comiskey, Bernard Gottschalk, Skip Rosenthal, Chris Serago, and Marcia Urie. A pencil beam algorithm for proton dose calculations. *Physics in Medicine and Biology*, 41(8):1305–1330, 08 1996. doi: 10.1088/0031-9155/41/8/005.
- [14] Tommy Knöös, Elin Wieslander, Luca Cozzi, et al. Comparison of dose calculation algorithms for treatment planning in external photon beam therapy for clinical situations. *Physics in Medicine and Biology*, 51(22):5785–5807, 2006. doi: 10.1088/0031-9155/51/22/005.
- [15] Michael B. Liu, Neville C. W. Eclow, Nicholas Trakul, James Murphy, Maximilian Diehn, Quynh-Thu Le, Sonja Dieterich, Peter G. Maxim, and Jr Loo, Billy W. Clinical impact of dose overestimation by effective path length calculation in stereotactic ablative radiation therapy of lung tumors. *Practical Radiation Oncology*, 3(4):294–300, 2013. doi: 10.1016/j.prro.2012.09.003.
- [16] Lawrence B. Marks, Søren M. Bentzen, Joseph O. Deasy, et al. Radiation dose-volume effects in the lung. *International Journal of Radiation Oncology, Biology, Physics*, 76(3 Suppl):S70–S76, 2010. doi: 10.1016/j.ijrobp.2009.06.091.
- [17] Almahdi Mousa, Kusminarto Kusminarto, and Gede Suparta. A new simple method to measure the x-ray linear attenuation coefficients of materials using micro-digital radiography machine. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12: 10589–10594, Januar 2017.
- [18] Samik Raychaudhuri. Introduction to Monte Carlo simulation. In S. J. Mason, R. R. Hill, L. Mönch, O. Rose, T. Jefferson, and J. W. Fowler, editors, *Proceedings of the 2008 Winter Simulation Conference*, pages 91–100, Miami, FL, USA, 2008. IEEE. doi: 10.1109/WSC.2008.4736059. Oracle Crystal Ball Global Business Unit, Broomfield, CO, USA.
- [19] Alexander Scherrer, Filipa Yaneva, Thomas Grebe, and Karl-Heinz Küfer. A new mathematical approach for handling DVH criteria in IMRT planning. *Journal of Global Optimization*, 61(3):407–428, March 2015. doi: 10.1007/s10898-014-0212-9. Epub 2014 May 18. PMID: 37701267; PMCID: PMC10497224.
- [20] Wolfgang Schlegel, Christian P. Karger, and Oliver Jäkel, editors. *Medizinische Physik: Grundlagen – Bildgebung – Therapie – Technik*. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg, 2018. ISBN 978-3-662-54800-4. doi: 10.1007/978-3-662-54801-1.

- [21] Y. Yonekura, H. Tsujii, J.W. Hopewell, P. Ortiz López, J-M. Cosset, H. Paganetti, A. Montelius, D. Schardt, B. Jones, and T. Nakamura. Icrp publication 127: Radiological protection in ion beam radiotherapy. *Annals of the ICRP*, 43(4):5–113, 2014. doi: 10.1177/0146645314559144.
- [22] Q. Zhou, Y. Zhang, and X. Zhang. An improved line search and trust region algorithm. *Journal of Software Engineering and Applications*, 6:49–52, 2013. doi: <http://dx.doi.org/10.4236/jsea.2013.65B010>.

